Devoir sur table n° 9

9/02/2024, 14h20–17h20, type Mines

Dans tout le problème, d est un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ et $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de X, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $S_0 = \vec{0}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *marche aléatoire de pas* X, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$.

On note R la variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{N}\setminus\{0\})\cup\{+\infty\}$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad R(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \mid S_n(\omega) = \vec{0}\},$$

avec la convention : $\min(\emptyset) = +\infty$. Autrement dit, R est égale à $+\infty$ si la marche aléatoire $(S_n)_{n\geqslant 1}$ ne revient jamais en $\vec{0}$, et au premier instant auquel cette marche aléatoire revient en $\vec{0}$ sinon.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$N_n = \operatorname{card}\left(\{S_k \mid k \in [\![0, n]\!]\}\right).$$

Le nombre N_n est donc le nombre de points de $\mathbb{Z}^d$ visités par la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ après n pas.

Le but du problème est d'étudier asymptotiquement l'espérance $\mathrm{E}(N_n)$ de la variable aléatoire N_n. La partie III est indépendante des parties précédentes.

Première partie

On considère les fonctions F et G définies par :

$$\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n = \vec{0})x^n, \quad \forall x \in [-1,1],\ G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(R = n)x^n.$$

1. Justifier que les fonctions F et G sont définies et de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
   Montrer que G est définie et continue sur $[-1,1]$ et que : $G(1) = \mathrm{P}(R \neq +\infty)$.
2. Si k et n sont des entiers naturels tels que : $k \leqslant n$, montrer :
   $$\mathrm{P}((S_n = \vec{0}) \cap (R = k)) = \mathrm{P}(R = k)\mathrm{P}(S_{n-k} = \vec{0}).$$
   En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \mathrm{P}(S_n = \vec{0}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(R = k)\mathrm{P}(S_{n-k} = \vec{0}).$$
3. Montrer : $\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = 1 + F(x)G(x)$.
   Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 1^-$, en discutant selon la valeur de $\mathrm{P}(R \neq +\infty)$.
4. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(S_n = \vec{0})$ est divergente si et seulement si : $\mathrm{P}(R \neq +\infty) = 1$.
5. Pour tout $i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, soit Y_i la fonction indicatrice de l'événement :
   $$\left(S_i \notin \{S_k \mid k \in [\![0, i-1]\!]\}\right).$$
   Montrer : $\forall i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\mathrm{P}(Y_i = 1) = \mathrm{P}(R > i)$, et en déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \mathrm{E}(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(R > i).$$
   (Précisons que : $\forall i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $(R > i) = (R = +\infty) \cup (R \in \mathbb{N}\setminus[\![0, i]\!])$.)

6. Conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{E}(N_n)}{n} = \mathrm{P}(R = +\infty)$. *On pourra utiliser le théorème de Cesàro.*

Deuxième partie

Dans cette partie : $d = 1$. Par ailleurs : $p \in]0,1[$, $q = 1 - p$ et la loi de X est donnée par :

$$\mathrm{P}(X = 1) = p \quad \text{et :} \quad \mathrm{P}(X = -1) = q.$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathrm{P}(S_{2n+1} = 0)$ et $\mathrm{P}(S_{2n} = 0)$.
8. Pour tout $x \in]-1,1[$, donner une expression simple de $G(x)$. Exprimer $\mathrm{P}(R = +\infty)$ en fonction de $|p - q|$ et donner la loi de R.
   Se ramener à des développements en série entière usuels.
9. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer : $\forall \alpha > 1$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$, et : $\forall \alpha < 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
10. On suppose : $p = q = \frac{1}{2}$. Donner un équivalent simple de $\mathrm{P}(R = 2n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent simple de $\mathrm{E}(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Troisième partie

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 1.$$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$.

11. Soient m et n deux entiers naturels tels que : $m > n$. Montrer :
$$a_n \leqslant \frac{1}{B_n}, \quad \text{et :} \quad 1 \leqslant a_n B_{m-n} + a_0(B_m - B_{m-n}).$$
12. On suppose dans cette question qu'il existe $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $m_n > n$ pour tout n assez grand et :
$$B_{m_n - n} \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n, \quad \text{et :} \quad B_{m_n} - B_{m_n - n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   Montrer : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{B_n}$.
13. On suppose dans cette question qu'il existe $C > 0$ tel que : $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n}$. En utilisant la question 12 pour une suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bien choisie, montrer : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{C\ln(n)}$.

Quatrième partie

14. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer : $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(S_k = \vec{0})\mathrm{P}(R > n - k)$.

Dans les deux questions suivantes, on suppose : $d = 2$, et que la loi de X est donnée par :

$$\mathrm{P}(X = (0,1)) = \mathrm{P}(X = (0,-1)) = \mathrm{P}(X = (1,0)) = \mathrm{P}(X = (-1,0)) = \frac{1}{4}.$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir l'égalité : $\mathrm{P}(S_{2n} = \vec{0}) = \dfrac{1}{4^{2n}}\dbinom{2n}{n}^2$.
   On pourra éventuellement démontrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, via *l'identité polynomiale suivante :* $(1+T)^{2n} = ((1+T)^n)^2$.
16. Donner un équivalent simple de $\mathrm{E}(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.