Devoir sur table n$^\text{o}$ 8

31/01/2024, 13h45–17h45, type X-ENS

Pour toute suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$, sa *série entière exponentielle génératrice* est par définition la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{u_n}{n!}z^n$. On se propose d'étudier ce type de série entière à des fins probabilistes.

Les deux parties sont complètement indépendantes.

Première partie

On se propose de démontrer quelques propriétés du nombre d'applications surjectives d'un ensemble fini sur un autre. Pour tout $(k,n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2$, on note $S_{k,n}$ l'ensemble des applications surjectives de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, et : $s_{k,n}=\mathrm{card}(S_{k,n})$, qui est nul si $k<n$ (car $S_{k,n}$ est vide dans ce cas). On pose aussi : $s_{k,0}=0$.

Pour tout $(k,n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2$, on munit $\Omega_{k,n}=[\![1,n]\!]^{[\![1,k]\!]}$ de la probabilité uniforme $\mathrm{P}_{k,n}$.

Soit $(k,n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2$, fixé jusqu'à la question 2.

1. Préciser la valeur de $s_{n,n}$, en la justifiant très brièvement.
2. Montrer : $n^k=\displaystyle\sum_{q=1}^{n}s_{k,q}\binom{n}{q}$.
3. En déduire, pour tout $r\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, le déterminant de la matrice $\left(\left(n^k\right)\right)_{1\leqslant k,n\leqslant r}$.

Soit $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière exponentielle génératrice de $(s_{k,n})_{n\geqslant 0}$.
5. On pose, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que la somme soit définie : $F(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{s_{k,n}}{n!}z^n$. En passant par le calcul de $F(z)e^z$, établir une formule de la forme :
$$\forall(n,k)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2,\quad \mathrm{P}_{k,n}(S_{k,n})=\sum_{q=1}^{n}\lambda_{n,k,q}q^k\binom{n}{q},$$
où les coefficients $\lambda_{n,k,q}$ sont à déterminer. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, la valeur de :
$$\lim_{k\to+\infty}\mathrm{P}_{k,n}(S_{k,n}).$$

Pour tout $(k,n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2$:

— on note $A_{k,n}$ l'ensemble des applications $f:[\![1,n]\!]\to\mathbb{N}$ telles que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f(i)=k$;

— si $k\geqslant n$, on note $B_{k,n}$ l'ensemble des applications $f\in A_{k,n}$ telles que : $\forall i\in[\![1,n]\!],\ f(i)\geqslant 1$.

6. Montrer, pour tout $(k,n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2$ et pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$:
$$(x_1+\cdots+x_n)^k=\sum_{f\in A_{k,n}}\frac{k!}{f(1)!\cdots f(n)!}\,x_1^{f(1)}\cdots x_n^{f(n)}.\qquad\text{(formule du multinôme)}$$
On pourra procéder par récurrence sur n.
7. Pour tous $(k,n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2$ et $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, montrer : $(x_1+\cdots+x_n)^k=\displaystyle\sum_{\varphi\in\Omega_{k,n}}\prod_{i=1}^{k}x_{\varphi(i)}$.

8. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $n \in [\![1, k]\!]$, on a :

$$\mathrm{P}_{k,n}(S_{k,n}) = \frac{1}{n^k} \sum_{f \in B_{k,n}} \frac{k!}{f(1)! \cdots f(n)!}.$$

On considère une série entière à coefficients réels $\sum_{k \geqslant 0} a_k x^k$. On suppose : $a_0 = 0$, et on note R_1 son rayon de convergence supposé non nul, φ sa somme. Pour tous entiers naturels n et k, on pose :

$$\alpha_{0,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \geqslant 1, \end{cases} \qquad \alpha_{n,k} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{f \in B_{k,n}} a_{f(1)} \cdots a_{f(n)} & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant k, \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n-1. \end{cases}$$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner un minorant $\rho > 0$ du rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geqslant 0} \alpha_{n,k} x^k$, puis déterminer la somme de cette série dans l'intervalle $]-\rho, \rho[$.

On considère une seconde série entière $\sum_{n \geqslant 0} b_n x^n$; on note R_2 son rayon de convergence supposé non nul et ψ sa somme.

10. Montrer que la série entière $\sum_{k \geqslant 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \alpha_{n,k} \right) x^k$ a un rayon de convergence non nul, et préciser sa somme au voisinage de 0.
11. On considère la fonction $\theta : x \mapsto e^{e^x - 1}$. Exprimer les coefficients de la série de Taylor de θ à l'aide des nombres $s_{k,n}$.

Deuxième partie

On rappelle que toute permutation d'un ensemble fini se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de cycles à supports disjoints, un cycle de longueur 1 correspondant à un point fixe de la permutation.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $\mathcal{P}_n(A)$ l'ensemble des permutations σ de S_n dont les longueurs des cycles (dans la décomposition en cycles à supports disjoints) appartiennent à A, et pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on note $\mathcal{P}_n(A, k)$ l'ensemble des permutations dans $\mathcal{P}_n(A)$ qui s'écrivent comme le produit de k cycles exactement. Par exemple :

$$(1\ 2)(3\ 4\ 5\ 7)(6)(8) \in \mathcal{P}_8(\{1{,}2{,}4\}{,}4) \subseteq \mathcal{P}_8(\{1{,}2{,}4\}).$$

On pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que ces sommes soient définies :

$$\Phi_A(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{card}(\mathcal{P}_n(A))}{n!} z^n, \qquad \Phi_{A,k}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{card}(\mathcal{P}_n(A,k))}{n!} z^n, \qquad L_A(z) = \sum_{n \in A} \frac{z^n}{n}.$$

On définit enfin : $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\overline{\mathrm{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$, et : $\overline{\mathrm{D}}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1,\ z \neq 1\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on munit S_n de la probabilité uniforme P_n.

12. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que Φ_A et $\Phi_{A,k}$ sont au moins définies sur D.
13. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer : $\forall z \in \mathrm{D}$, $\Phi_{A,k}(z) = \dfrac{(L_A(z))^k}{k!}$. *Raisonner par récurrence sur k.*
14. En déduire : $\forall z \in \mathrm{D}$, $\Phi_A(z) = \exp(L_A(z)) - 1$.
15. Déduire de la question précédente, par un choix adéquat de A, que l'ensemble D_n des permutations de S_n sans point fixe vérifie : $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}_n(D_n) = \dfrac{1}{e}$.

16. Donner l'expression, puis un équivalent asymptotique quand $n \to +\infty$, de la probabilité qu'une permutation dans S_n n'ait que des cycles de longueur paire.

Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On pose : $H_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$, et on définit la fonction :

$$\varphi_m : \begin{cases} \overline{\mathrm{D}}^* & \to \quad \mathbb{C} \\ z & \mapsto \quad \dfrac{\exp\left(-L_{[\![1,m]\!]}(z)\right)}{1-z} - \dfrac{\exp(-H_m)}{1-z} \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $p_n(m)$ la probabilité qu'une permutation dans S_n ait tous ses cycles de longueur supérieure ou égale à $m+1$.

17. Montrer : $\forall z \in D$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(m) z^n = \frac{\exp\left(-\sum_{k=1}^{m} \frac{z^k}{k}\right)}{1-z} - 1$.

18. Montrer que φ_m est continue sur $\overline{\mathrm{D}}^*$ et prolongeable par continuité sur $\overline{\mathrm{D}}$.

On notera toujours φ_m ce prolongement continu.

19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\forall \rho \in]0,1[, \quad p_n(m) = e^{-H_m} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_m\left(\rho e^{it}\right) \frac{e^{-int}}{\rho^n} \mathrm{d}t.$$

20. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application $\rho \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_m\left(\rho e^{it}\right) \frac{e^{-int}}{\rho^n} \mathrm{d}t$ est définie et continue sur $]0,1]$.

21. Montrer :

$$\lim_{n \to +\infty} p_n(m) = e^{-H_m}.$$