Devoir sur table n° 7

17/01/2024, 13h45–17h45, type Mines

L'objectif du problème est de démontrer le théorème taubérien de Hardy–Littlewood-Karamata. Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0,+\infty[$.

Première partie – Une intégrale à paramètre

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose, sous réserve d'existence :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\mathrm{d}u \quad \text{et :} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

1. Démontrer que $\psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur I.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F.
3. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur I et exprimer $F'(x)$ pour tout $x \in I$ sous forme intégrale.
4. En déduire que pour tout $x \in I$, on a :
$$xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x) = -K.$$
5. Pour tout $x \in I$, on pose : $G(x) = \sqrt{x}e^{-x}F(x)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I$, on ait :
$$G(x) = C - K\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$
6. Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$, et en déduire la valeur de K.

Deuxième partie – Étude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$, et : $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$, pour tout $x \in I$.

7. Montrer que f et g sont définies et continues sur I.
8. Montrer que pour tout $x \in I$, on a : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.
   En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.
9. Montrer que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.
10. Démontrer que pour tout $x \in I$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.
11. En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \to 0$. Montrer alors : $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$.

Troisième partie – Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

À toute partie $A \subseteq \mathbb{N}$ on associe la suite $(a_n)_{n\geqslant 0} = (\mathbb{1}_A(n))_{n\geqslant 0}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note : $A(n) = A \cap [0, n]$. Soit I_A l'ensemble des réels $x \geqslant 0$ tels que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n e^{-nx}$ converge. On pose :

$$\forall x \in I_A, \quad f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}.$$

Enfin, sous réserve d'existence, on pose :

$$\Phi(A) = \lim_{x\to 0} x f_A(x),$$

et on note S l'ensemble des parties $A \subseteq \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

12. Quel est l'ensemble I_A si A est fini ? Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $b_n = 1$. Déterminer I_A dans ce cas.
13. Soient $A \subseteq \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite associée. Vérifier que pour tout $x \in I$ la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{card}(A(n)) e^{-nx}$ converge et que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{card}(A(n)) e^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1 - e^{-x}}.$$

Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

14. Montrer que si $x \in I$, alors : $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{-nx}$.

    En déduire un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx} - \dfrac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}}$, puis un équivalent de f_{A_1} en 0. Prouver alors que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

Dans la question suivante, $A = A_2$ désigne l'ensemble constitué des entiers qui sont la somme des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que A_2 appartient à S, et on désire majorer $\Phi(A_2)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $v(n)$ le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) tels que : $n = p^2 + q^2$.

15. Montrer que pour tout réel $x \in I$, la série $\sum_{n\geqslant 0} v(n) e^{-nx}$ converge et établir :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.$$
    Montrer alors que pour tout $x \in I$, on a : $f_{A_2}(x) \leqslant (f_{A_1}(x))^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

Quatrième partie – Un théorème taubérien

Soit $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x \in I$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n e^{-nx}$ converge. On suppose :

$$\lim_{x\to 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \right) = \ell \in [0, +\infty[.$$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de]0,1] et à valeurs réelles, E l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur [0,1] et à valeurs réelles, E_0 le sous-espace vectoriel de E des fonctions continues sur [0,1]. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Pour toute fonction $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x \in I$ associe :

$$L(\psi)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx}).$$

16. Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que l'application L est une application linéaire de E dans F. Vérifier que pour toutes fonctions ψ_1 et ψ_2 dans E_1, on a :

$$\psi_1 \leqslant \psi_2 \implies L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2).$$

On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim\limits_{x\to 0} xL(\psi)(x)$ existe et pour tout $\psi \in E_1$ on pose :

$$\Delta(\psi) = \lim_{x\to 0} xL(\psi)(x).$$

17. Vérifier que E_1 est un sous espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue sur $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$.
18. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $e_p : t \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$. En déduire que $E_0 \subseteq E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E_0$.

Soient $a \in]0,1[$ et $\varepsilon \in]0, \min(a,1-a)[$. On note :

$$g_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a-\varepsilon] \\ \dfrac{a-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a-\varepsilon, a[\\ 0 & \text{si } x \in [a,1] \end{cases} \quad , \quad \text{et :} \quad g_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a] \\ \dfrac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a, a+\varepsilon[\\ 0 & \text{si } x \in [a+\varepsilon,1]. \end{cases}$$

19. Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$. Montrer alors que $\mathbb{1}_{[0,a]} \in E_1$ et calculer $\Delta(\mathbb{1}_{[0,a]})$. En déduire que $E_1 = E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.

On considère maintenant la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{e}\right[, \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{e}, 1\right]. \end{cases}$$

20. Calculer $L(\psi)\left(\dfrac{1}{N}\right)$ pour tout entier naturel non nul N et en déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} \alpha_k. \qquad \text{(Théorème taubérien)}$$

On rappelle que $v(n)$ est le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p,q) tels que : $n = p^2 + q^2$.

21. Si $A \in S$, que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\text{card}\,(A(n))$? Déterminer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} v(k)$.