Devoir sur table n° 6

13/12/2023, 13h45–17h45

Notations. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$. Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_{n,p}(K)$, on note : $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ lorsqu'on veut préciser les éléments de A ; quand le contexte est clair, on écrit simplement $A = (a_{i,j})$ ou $A = (A_{i,j})$. Pour tout $X \in \mathrm{M}_{n,1}(K)$, on note D_X la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les coefficients de X (ordonnés de même).

Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$, on note : $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|$. C'est le *rayon spectral* de A.

Résultat admis. On pourra librement utiliser le fait que toutes les normes sur un même espace vectoriel de dimension finie soient équivalentes.

La partie III est indépendante des parties précédentes à l'exception des questions 26 et 30.

Première partie

Dans cette partie, on munit $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

On définit une application sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathrm{N}_\infty : ((a_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mapsto \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

1. Montrer que N_∞ est une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer : $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \forall Z \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \|AZ\|_\infty \leqslant \mathrm{N}_\infty(A)\|Z\|_\infty$.
3. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'égalité :
$$\mathrm{N}_\infty(A) = \max_{Z \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}} \frac{\|AZ\|_\infty}{\|Z\|_\infty}.$$
4. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer : $\rho(A) \leqslant \mathrm{N}_\infty(A)$.
5. Montrer que N_∞ est une norme d'algèbre, c'est-à-dire qu'elle vérifie :
$$\forall (A,B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^2, \quad \mathrm{N}_\infty(AB) \leqslant \mathrm{N}_\infty(A)\,\mathrm{N}_\infty(B).$$

Soit $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On définit une application sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathrm{N}_Q : A \mapsto \mathrm{N}_\infty(Q^{-1}AQ)$.

6. Vérifier que N_Q est une norme d'algèbre sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
7. Montrer qu'il existe une constante $C_Q \in \mathbb{R}_+^*$ telle que :
$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \quad \frac{1}{C_Q}\,\mathrm{N}_\infty(A) \leqslant \mathrm{N}_Q(A) \leqslant C_Q\,\mathrm{N}_\infty(A).$$
8. Soient $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure et $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut choisir $s > 0$ de sorte que, si l'on pose $S = \begin{pmatrix} s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors :
$$\mathrm{N}_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon.$$
Étant donnés $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe une norme d'algèbre N_ε telle que :
$$\mathrm{N}_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon.$$
9. En déduire l'équivalence : $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \iff \rho(A) < 1$.

Deuxième partie

Soit $A = ((a_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ fixée. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose :

$$L_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|, \qquad C_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{j,i}|.$$

On définit les sous-ensembles du plan complexe :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{D}_i(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leqslant L_i\}, \quad \mathrm{D}'_i(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leqslant C_i\},$$

$$\mathrm{G}_L(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i(A), \quad \mathrm{G}_C(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{D}'_i(A).$$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on désigne par $\mathrm{C}_i(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| = L_i\}$ le cercle bordant le disque $\mathrm{D}_i(A)$.

10. On suppose uniquement dans cette question que :

$$A = \begin{pmatrix} 4+3i & i & 2 & -1 \\ i & -1+i & 0 & 0 \\ 1+i & -i & 5+6i & 2i \\ 1 & -2i & 2i & -5-5i \end{pmatrix}.$$

Représenter dans le plan complexe $\mathrm{G}_L(A)$ et $\mathrm{G}_C(A)$.

On se propose de montrer l'inclusion : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq \mathrm{G}_L(A) \cap \mathrm{G}_C(A)$.

11. Soit $M = ((m_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice non inversible. Montrer : $\exists p \in [\![1,n]\!]$, $|m_{p,p}| \leqslant L_p$.
12. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Montrer : $\lambda \in \mathrm{G}_L(A)$.
13. Conclure en justifiant l'inclusion $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq \mathrm{G}_C(A)$.

On suppose jusqu'à la question 15 que A a une valeur propre μ sur le bord de $\mathrm{G}_L(A)$. (*Un point z appartient au bord de $\mathrm{G}_L(A)$ si et seulement si $z \in \mathrm{G}_L(A)$ et $|z - a_{i,i}| \geqslant L_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.*) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à μ.

14. Montrer que si $k \in [\![1,n]\!]$ vérifie : $|x_k| = \|X\|_\infty$, alors : $\mu \in \mathrm{C}_k(A)$.
15. On suppose de plus : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \neq 0$. Montrer : $\mu \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{C}_j(A)$.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note : $X > 0$, lorsque l'on a : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i > 0$.

16. Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $X > 0$. Décrire $\mathrm{D}_i(D_X^{-1} A D_X)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
17. Déduire de tout ce qui précède l'inégalité :

$$\rho(A) \leqslant \inf_{X>0} \left\{ \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} x_j |a_{i,j}| \right\}. \qquad \left(\text{on a noté } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

18. On suppose uniquement dans cette question que : $A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & 8 \\ -16 & 7 & -8 \\ 8 & -8 & -5 \end{pmatrix}$. Montrer que le majorant de $\rho(A)$ donné par la question 17 est supérieur ou égal à $\frac{83}{3}$, puis déterminer $\rho(A)$ par un calcul exact.

Applications.

19. On suppose : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > L_i$, et : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} \in \mathbb{R}_-^*$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on a : $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.
20. Soit $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Montrer qu'il existe une constante $\kappa_\infty(B)$ telle que :

$$\forall E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall \hat{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B+E),\ \exists \lambda_i \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B), \quad |\hat{\lambda} - \lambda_i| \leqslant \kappa_\infty(B)\,\mathrm{N}_\infty(E).$$

Troisième partie

Soit $t \mapsto P_t$ une application de [0,1] dans $\mathbb{C}_n[X]$ avec :

$$\forall t \in [0,1], \quad P_t(X) = X^n + \sum_{j=1}^{n} c_j(t) X^{n-j},$$

où les n applications $t \mapsto c_j(t)$ sont des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{C}$. Pour tout $t \in [0,1]$, on note Z_t l'ensemble des racines complexes de P_t.

21. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que : $\forall t \in [0,1]$, $Z_t \subseteq \mathrm{B}_f(0,R)$.
22. Soient t_0 fixé et $\omega \in Z_{t_0}$. Montrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall t \in [0,1],\ |t - t_0| < \eta \implies \exists \omega_t \in Z_t,\ |\omega_t - \omega| < \varepsilon.$$

On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la propriété de Bolzano-Weierstraß convenablement.

23. Exhiber une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ pour laquelle $\mathrm{D}_1(A)$ (notation de la partie II) ne contient pas de valeurs propres de A.

Soient $A = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{G}_L(A)$ défini dans la partie II. On se propose de prouver la propriété suivante :

« Si, pour tout $j \in [\![2,n]\!]$, on a : $\mathrm{D}_1(A) \cap \mathrm{D}_j(A) = \emptyset$, alors le disque $\mathrm{D}_1(A)$ contient au moins une valeur propre de A. »

On suppose donc que : $\forall j \in [\![2,n]\!]$, $\mathrm{D}_1(A) \cap \mathrm{D}_j(A) = \emptyset$. On écrit : $A = D + B$, où D est diagonale et $B = ((b_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

On définit une application sur [0,1] ainsi : $A : t \mapsto D + tB \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

24. Montrer : $\forall t \in [0,1]$, $\mathrm{G}_L(A(t)) \subseteq \mathrm{G}_L(A)$.

Soit $E = \{t \in [0,1] \mid \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A(t)) \cap \mathrm{D}_1(A) \neq \emptyset\}$.

25. Montrer : $E \neq \emptyset$.
26. Montrer la propriété :

$$\forall t \in E,\ \exists \eta > 0, \quad]t - \eta, t + \eta[\ \cap [0,1] \subseteq E.$$

27. Soit $(t_k)_{k \geqslant 1}$ une suite d'éléments de E qui converge vers $a \in [0,1]$. Montrer : $a \in E$.
28. Montrer que si A est à la fois un ouvert relatif et fermé relatif de [0,1], alors : $A \in \{\emptyset, [0,1]\}$.
On commencera par démontrer la continuité de la fonction indicatrice de A.
29. Conclure.
30. Déduire des parties II et III des propriétés du spectre de la matrice A définie dans la question 10.