Devoir sur table n° 5

29/11/2023, 13h45–17h45

Dans tout ce problème l'entier n est supérieur ou égal à 1 et E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Le but de ce problème est d'étudier les applications semi-linéaires de l'espace vectoriel E dans lui-même : une application u de E dans lui-même est *semi-linéaire* si elle possède la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \quad u(\lambda\vec{x}+\vec{y}) = \overline{\lambda}u(\vec{x}) + u(\vec{y}).$$

Un nombre complexe μ est une *valeur co-propre* de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur $\vec{x} \in E$ différent de $\vec{0}$ tel que : $u(\vec{x}) = \mu\vec{x}$. Le vecteur $\vec{x}$ est un *vecteur co-propre associé à la valeur co-propre* μ.

Première partie

Pour une application semi-linéaire u donnée, nous voulons étudier les valeurs et vecteurs co-propres.

Premières propriétés.

Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E.

1. Montrer qu'étant donné $\vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, il existe au plus un nombre complexe μ tel que : $u(\vec{x}) = \mu\vec{x}$.
2. Démontrer que, si $\mu \in \mathbb{C}$ est une valeur co-propre de u, alors pour tout réel θ le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de u. Exprimer un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$ en fonction d'un vecteur co-propre $\vec{x}$ associé à la valeur co-propre μ et du réel θ.
3. Étant donnée une valeur co-propre μ de u, on pose :
$$E_\mu = \{\vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = \mu\vec{x}\}.$$
Est-ce que l'ensemble E_μ est un espace vectoriel complexe ? réel ?
4. Étant données deux applications semi-linéaires u et v, étudier la linéarité de l'application composée $u \circ v$.

Matrice associée à une application semi-linéaire.

Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E ; soit $\mathcal{B}$ une $\mathbb{C}$-base de E. À un vecteur $\vec{x}$ de coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans $\mathcal{B}$ est associée une matrice colonne $X = [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Pour une telle matrice colonne, la notation $\overline{X}$ désigne la matrice complexe conjuguée $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$.

5. Démontrer qu'à une application semi-linéaire u est associée dans la base $\mathcal{B}$ de E une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la relation $\vec{y} = u(\vec{x})$ s'écrive : $Y = A\overline{X}$.
6. Soient A et B les matrices associées à une même application semi-linéaire u dans les bases $(\vec{e}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\vec{f}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ respectivement. Soit S la matrice de passage de la base $(\vec{e}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à la base $(\vec{f}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Exprimer la matrice B en fonction des matrices A et S.

Étant donnée $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, le vecteur colonne X, différent de $0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, est un *vecteur co-propre* de A associé à la valeur co-propre μ, si l'on a :

$$A\overline{X} = \mu X.$$

Dans la suite toutes les matrices considérées sont des matrices carrées complexes.

Exemples.

7. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Rechercher les valeurs co-propres $\mu \in \mathbb{C}$ et les vecteurs co-propres X associés.
8. Démontrer que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ admet une valeur propre réelle λ, alors A a au moins une valeur co-propre.

Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice A et les valeurs propres de la matrice $A\overline{A}$.

Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée complexe d'ordre n. On pose : $\overline{A} = ((\overline{a_{i,j}}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

9. Montrer que si $\mu \in \mathbb{C}$ est une valeur co-propre de A, alors $|\mu|^2$ est une valeur propre réelle de $A\overline{A}$.
10. Soient λ une valeur propre positive ou nulle de $A\overline{A}$ et X un vecteur propre associé : $A\overline{A}X = \lambda X$. Démontrer que $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A, en effectuant une distinction de cas selon que les vecteurs colonnes $A\overline{X}$ et X soient liés ou non.
11. Soit $\mu \in \mathbb{R}_+$. Montrer que, pour que μ soit valeur co-propre de la matrice A, il faut et il suffit que μ^2 soit valeur propre de la matrice $A\overline{A}$.

Cas d'une matrice triangulaire supérieure.

Dans les questions 12 et 13 la matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est triangulaire supérieure.

12. Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors pour tout réel θ le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A.
13. Démontrer que si $\mu \in \mathbb{C}$ est une valeur co-propre de la matrice A, il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice A.
14. Soit $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. Démontrer que 1 est valeur co-propre de A et déterminer un vecteur co-propre $X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ associé.

Une caractérisation des valeurs co-propres.

Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et B, C les matrices réelles définies par la relation : $A = B + iC$.

15. Démonter que $\mu \in \mathbb{C}$ est valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice définie par blocs ainsi : $D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Deuxième partie

Étant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, s'il existe une matrice carrée complexe $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que : $B = SA\bar{S}^{-1}$ soit vérifiée, alors les deux matrices A et B sont dites *co-semblables*. Si une matrice A est co-semblable à une matrice diagonale, la matrice A est dite *co-diagonalisable*. Le but de cette partie est de rechercher à quelles conditions une matrice est co-diagonalisable.

Une relation d'équivalence.

Étant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, ces matrices sont dites satisfaire la relation $\approx$ si et seulement si ces deux matrices sont co-semblables :

$$A \approx B \iff \exists S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ B = SA\bar{S}^{-1}.$$

16. Démontrer que la relation $\approx$ est une relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Indépendance des vecteurs co-propres.

17. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Soient $k \in [\![0, n]\!]$ et $(X_1,\ X_2, \dots, X_k)$ une famille de vecteurs co-propres de A associés à des valeurs co-propres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$. Démontrer que si :

$$\forall (p, q) \in [\![1, k]\!]^2,\ p \neq q \implies |\mu_p| \neq |\mu_q|,$$

alors la famille $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ est libre. En déduire que si $A\overline{A}$ admet n valeurs propres distinctes, positives ou nulles, alors la matrice A est co-diagonalisable.

Quelques propriétés.

18. Soit $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit $A = S\bar{S}^{-1}$. Calculer la matrice produit $A\overline{A}$.
19. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $A\overline{A} = \mathrm{I}_n$. Démontrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice :

$$S(\theta) = e^{i\theta} A + e^{-i\theta} \mathrm{I}_n,$$

soit inversible. Pour un tel choix de θ, calculer la matrice $A\overline{S(\theta)}$; en déduire la matrice $S(\theta)\overline{S(\theta)}^{-1}$.

Une condition nécessaire.

20. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice co-diagonalisable. Il existe par suite $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $S^{-1}A\overline{S}$ soit diagonale. Démontrer que la matrice $A\overline{A}$ est diagonalisable et que :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A\overline{A}) \subseteq \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A\overline{A}).$$

Une condition suffisante.

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n qui vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) la matrice $A\overline{A}$ est diagonalisable ;

(ii) les valeurs propres de la matrice $A\overline{A}$ sont positives ou nulles ;

(iii) le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A\overline{A}$.

Soient $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots,\ \lambda_k$, les valeurs propres deux à deux distinctes de la matrice $A\overline{A}$; elles sont positives et ordonnées ainsi : $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k \geqslant 0$.

Les valeurs propres $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots,\ \lambda_k$ ont respectivement pour ordres de multiplicité $n_1,\ n_2, \dots,\ n_k$. Une matrice diagonale Λ, semblable à la matrice $A\overline{A}$, s'écrit par blocs sous la forme suivante :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{n_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_k \mathrm{I}_{n_k} \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse il existe une matrice S inversible telle que : $A\overline{A} = S\Lambda S^{-1}$. Soit B la matrice définie par la relation suivante : $B = S^{-1}A\overline{S}$.

21. Démontrer les relations : $B\overline{B} = \overline{B}B$, et : $B\Lambda = \Lambda B$.
22. Démontrer que la matrice B s'écrit comme une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux B_p sont carrés d'ordre n_p :

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & B_k \end{pmatrix}.$$

23. Démontrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $\Delta \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $B = P\Delta\overline{P}^{-1}$. En déduire que toute matrice vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) est co-diagonalisable.

Exemples.

24. Soient A, B, C, D les matrices d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que ces matrices sont diagonalisables ? co-diagonalisables ?

Troisième partie

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Cette partie, essentiellement indépendante des précédentes, étudie une application semi-linéaire particulière en vue de démontrer le résultat suivant :

$$\det(\mathrm{I}_n + A\overline{A}) \in \mathbb{R}_+.$$

25. Démontrer :

$$\det(\mathrm{I}_n + A\overline{A}) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A \\ \overline{A} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

On notera désormais : $A_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A \\ \overline{A} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à A_0.

26. Soit $(R, S, T, U) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^4$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à la matrice $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Montrer de même que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$.
27. En déduire que le polynôme caractéristique de la matrice A_0 est à coefficients réels.

On considère l'application $\Omega : \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C}), \quad \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix}.$$

28. Démontrer que Ω est une application semi-linéaire telle que : $\Omega^2 = -\mathrm{Id}_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$. En déduire que Ω n'admet pas de vecteur co-propre.
29. Soit $Z \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus \left\{0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\right\}$. Montrer que la famille $(Z, \Omega(Z))$ est libre et que le plan engendré par Z et $\Omega(Z)$ est stable par Ω.
30. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ stable par Ω, et soit $Z \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus E$. Montrer :

$$E \cap \mathrm{Vect}\,(Z, \Omega(Z)) = \left\{0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\right\}.$$

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A_0)$, on note $\alpha_\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ son ordre de multiplicité comme racine du polynôme caractéristique. On peut donc écrire : $\chi_{A_0} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A_0)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$. On note alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A_0)$:

$$F_\lambda = \ker\left((A_0 - \lambda \mathrm{I}_{2n})^{\alpha_\lambda}\right).$$

31. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A_0)$, on a : $\Omega(F_\lambda) = F_{\overline{\lambda}}$. *Commencer par comparer $f \circ \Omega$ et $\Omega \circ f$.*
32. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A_0) \cap \mathbb{R}$, alors F_λ est de dimension paire.
33. Conclure : $\det(A_0) \in \mathbb{R}^+$.