Devoir sur table n° 2

Notations

On note E l'espace vectoriel des applications continues du segment $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $f \in E$, on pose : $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|$. Si $u \in \mathrm{L}(E)$ et $f \in E$, on écrira abusivement uf l'élément $u(f)$ de E.

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés d'un opérateur dû à Abel, appliquant E dans lui-même, qui est introduit dans la quatrième partie. Pour ce faire, on met en place dans les trois premières parties des outils nécessaires à cette étude.

Rappels

La fonction Γ est la fonction réelle définie sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$. Pour tout $x > 0$, cette fonction vérifie l'équation : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Comme $\Gamma(1) = 1$, il en découle que, pour tout entier naturel n, on a : $\Gamma(n+1) = n!$.

Première partie

1. Montrer que la fonction Γ est strictement positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans la suite du problème, on admettra que cette fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t.$$

2. Montrer que la fonction Γ est strictement croissante sur l'intervalle $[2, +\infty[$.
3. Montrer : $\forall \gamma \in \mathbb{R}_+^*,\ \gamma^x = \underset{x \to +\infty}{o}(\Gamma(x))$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer : $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathrm{d}t$. En déduire : $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n} (x+k)}$.

Deuxième partie

Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe un nombre réel $t_0 \geqslant 0$ tel que la fonction ϕ soit décroissante sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$.

5. Établir que la fonction ϕ est positive sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$.
6. Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout n suffisamment grand, on a : $0 \leqslant h\phi(nh) \leqslant \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t) \mathrm{d}t$.
7. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} h\phi(nh)$ converge.
8. Montrer : $\lim_{h \to 0^+} h \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(nh) = \int_0^{+\infty} \phi(t) \mathrm{d}t$. *Indication. On pourra introduire un nombre réel a suffisamment grand et écrire :* $\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{a}{h} \rfloor} h\phi(nh) + \sum_{n=\lfloor \frac{a}{h} \rfloor + 1}^{+\infty} h\phi(nh)$.

Soit $\alpha \geqslant 1$. On note g_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ g_\alpha(t) = e^{-t} t^{\alpha - 1}$.

9. Montrer : $\lim_{x \to 1^-} (-\ln(x)) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln(x)) = \Gamma(\alpha)$.
10. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} n^{\alpha-1} x^n$ converge si $x < 1$ et diverge si $x > 1$.

On note S_α la somme de cette série.

11. Montrer : $S_\alpha(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}$.

Troisième partie

12. Montrer que, pour tout $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est intégrable sur $]0,1[$.

Pour tout $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose : $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t$.

13. Prouver successivement, pour tout $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, les relations suivantes :
    (a) $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \mathrm{B}(\beta,\alpha)$;
    (b) $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\mathrm{d}t$ *(on pourra utiliser le changement de variable $u = \dfrac{t}{1-t}$.)*;
    (c) $\mathrm{B}(\alpha+1,\beta) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta)$.

On se propose d'établir, pour tous réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la formule suivante : $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

14. À l'aide de la relation 13.(c), montrer qu'il suffit de prouver l'assertion lorsque : $(\alpha,\beta) \in]2,+\infty[^2$.

Soient α et β deux nombres réels strictement supérieurs à 2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on pose :

$$u_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1}.$$

15. Établir que la fonction $\psi_{\alpha,\beta} : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est lipschitzienne sur le segment $[0,1]$.

On note $A_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}_+$ un rapport de Lipschitz de cette fonction, c'est-à-dire que :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |\psi_{\alpha,\beta}(x) - \psi_{\alpha,\beta}(y)| \leqslant A_{\alpha,\beta}|x-y|.$$

16. Prouver que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$: $|u_n(\alpha,\beta) - \mathrm{B}(\alpha,\beta)| \leqslant \dfrac{A_{\alpha,\beta}}{2n}$.

17. On reprend les notations de la deuxième partie. Établir que, pour tout $x \in [0,1[$:

$$S_\alpha(x)S_\beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n.$$

Déduire de la question 16 que, pour tout réel $x \in [0,1[$, on a :

$$|S_\alpha(x)S_\beta(x) - \mathrm{B}(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \leqslant \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x),$$

et en utilisant le comportement des fonctions $(S_\gamma)_{\gamma\geqslant 1}$ au voisinage du point 1, conclure que :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \mathrm{B}(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta).$$

18. Établir que la fonction $\alpha \mapsto \mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha)$ est continue sur l'intervalle $]0,1[$.

Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$.

19. Vérifier : $\mathrm{B}\left(\dfrac{2p+1}{2q}, 1-\dfrac{2p+1}{2q}\right) = 2q\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\mathrm{d}t$.

20. Pour tout $k \in [\![0,q-1]\!]$, on note : $z_k = e^{i\frac{2k+1}{2q}\pi}$. Montrer :

$$\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = -\frac{1}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\left(\frac{1}{X-z_k} - \frac{1}{X+z_k}\right). \qquad (*)$$

21. Après avoir vérifié que, pour tout $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, la fonction :

$$t \mapsto \frac{1}{2}\ln\left((t-\mathrm{Re}(c))^2 + (\mathrm{Im}(c))^2\right) + i \arctan\left(\frac{t-\mathrm{Re}(c)}{\mathrm{Im}(c)}\right)$$

est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-c}$, montrer, en utilisant judicieusement $(*)$, que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\mathrm{d}t = -i\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$. En conclure que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2q}\frac{1}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}.$$

22. Déduire des questions 18 à 21 que : $\forall \alpha \in]0,1[$, $\mathrm{B}(\alpha,1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.

23. Montrer : $\forall x \in]0,\pi[$, $\sin(x) = x \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$ (*produit de Weierstraß du sinus*).

Quatrième partie

Dans toute cette dernière partie, on suppose que α est un nombre réel appartenant à $]0,1[$.

24. Montrer que pour tout $f \in E$ et tout $x \in]0,1]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur $]0,x[$.

Pour tout élément f de E, on note $A_\alpha f$ la fonction définie sur le segment $[0,1]$ par les formules suivantes :

$$A_\alpha f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x = 0, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\mathrm{d}t & \text{si } \ 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

25. Vérifier que, pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0,1]$, on a : $A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha}\displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\mathrm{d}t$.

26. Montrer que, pour tout élément f de E, la fonction $A_\alpha f$ appartient à E.

27. Montrer que $A_\alpha : f \mapsto A_\alpha f$ est un endomorphisme de E et que : $\forall f \in E$, $\|A_\alpha f\|_\infty \leqslant \dfrac{\|f\|_\infty}{1-\alpha}$.

On définit par récurrence la suite $(A_\alpha^n)_{n\geqslant 0}$ par : $A_\alpha^0 = \mathrm{Id}_E$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_\alpha^{n+1} = A_\alpha \circ A_\alpha^n$. On pose : $\beta = 1-\alpha$.

28. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, pour tout $f \in E$, établir l'inégalité suivante :

$$\forall x \in [0,1], \quad |A_\alpha^n f(x)| \leqslant \frac{x^{n\beta}(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\|f\|_\infty.$$

29. Montrer : $\forall \gamma \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\gamma^n\frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0$. *On pourra utiliser le résultat de la question 3.*

30. Soient $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $f \in E$. Montrer que la suite de fonctions $\left(x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda^k A_\alpha^k f(x)\right)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$. On note $g = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n A_\alpha^n f$ sa limite uniforme.

31. Montrer : $(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha)\, g = f$.

32. En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, l'endomorphisme $\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha$ est inversible et que :

$$\forall f \in E, \quad (\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha)^{-1}(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f.$$

Pour tout entier naturel n, on note $e_n \in E$ la fonction monomiale $t \mapsto t^n$.

33. Soit n un entier naturel. Calculer $A_\alpha e_n$.
34. En déduire que : $(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha) e_n = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \dfrac{e_{n+1}}{n+1}$.

Ce résultat suggère d'introduire l'application P définie sur E par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0{,}1], \quad Pf(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi, avec cette notation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha) e_n = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P e_n$.

35. Établir que, pour toute fonction polynômiale $\psi \in E$, on a : $(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)\psi = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P\psi$.
36. Montrer que P est un endomorphisme de E et que : $\forall f \in E$, $\|Pf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.
37. On pose : $B_\alpha = A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$. Montrer : $B_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P$.
38. Soit D l'application définie sur $\mathrm{C}^1([0{,}1], \mathbb{C})$ par $f \mapsto f'$. Montrer que $D \circ B_\alpha$ est bien définie et que : $D \circ B_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \mathrm{Id}_E$.
39. En déduire que l'endomorphisme A_α est injectif.