# Devoir sur table n° 11

20/03/2024, 13h–19h, type ENS, Mathématiques D

Ce problème est consacré à l'étude des spectres de graphes finis. À tout graphe fini – composé de sommets et d'arêtes reliant ces sommets – on associe une matrice dont les valeurs propres sont intimement liées aux propriétés géométriques du graphe. La première partie établit quelques estimations élémentaires des valeurs propres. La deuxième étudie le cas particulier du graphe à soixante sommets reproduisant la structure du buckminsterfullerène. Dans une troisième partie, on relie la constante de Cheeger – dite aussi constante isopérimétrique – à la deuxième valeur propre du graphe puis on s'intéresse au cas des graphes planaires. Finalement, la quatrième partie étudie les propriétés des graphes découverts par Gabber et Galil en 1980. Ce sont des « graphes expanseurs » qui possèdent des propriétés de connectivité exceptionnelles. Mathématiquement, cela se traduit par une minoration uniforme de leur deuxième valeur propre.

**Notations.** On appelle *graphe* un couple $G = (V, E)$ où $V$ est un ensemble fini non vide et $E \subseteq V \times V$ est un sous-ensemble vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in E, \quad x \neq y \text{ et : } (y, x) \in E.$$

On appellera les éléments de $V$ les *sommets* et ceux de $E$ les *arêtes*. On dit que deux sommets $x$ et $y$ sont reliés par *un chemin de longueur* $k \in \mathbb{N}$ s'il existe une suite $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant k}$ avec $x_0 = x$, $x_k = y$ et $(x_i, x_{i+1}) \in E$ pour $i \in [\![0, k-1]\!]$.

Si, pour tout $(x, y) \in V^2$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x$ et $y$ soient reliés par un chemin de longueur $k$, alors le graphe $G$ sera dit *connexe*.

Pour tout sommet $x \in V$, on appelle *valence* de $x$ et on note $\mathrm{val}(x)$ le cardinal de l'ensemble $\{y \in V \mid (x, y) \in E\}$. On dira que $G$ est *régulier* si, pour tout $(x, y) \in V^2$, on a : $\mathrm{val}(x) = \mathrm{val}(y)$.

Le graphe $G$ est *biparti* s'il existe des parties $A$ et $B$ de $V$ telles que $V = A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$, et qu'on a : $E \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$.

Si $G = (V, E)$ est un graphe, on note $\mathbb{R}^V$ l'espace euclidien des fonctions de $V$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (f, g) \in \left(\mathbb{R}^V\right)^2, \quad \langle f, g\rangle = \sum_{x\in V} f(x)g(x).$$

On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. On définit l'endomorphisme $T_G$ de $\mathbb{R}^V$ par la formule suivante :

$$\forall f \in \mathbb{R}^V,\ \forall x \in V, \quad (T_G f)(x) = \sum_{\substack{y\in V\\(x,y)\in E}} (f(x) - f(y)).$$

On notera $q_G$ la fonction définie par : $q_G(f) = \langle T_G f, f\rangle$ pour tout $f \in \mathbb{R}^V$.

On rappelle que si $A$ est un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien de dimension $n$, il existe une seule suite finie de nombres réels $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ tels que la matrice de $A$ dans une base orthonormée soit une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on appellera $\lambda_k$ la $k^{\text{e}}$ valeur propre de $A$.

**Les parties II, III et IV sont indépendantes entre elles.**

# Première partie

Fixons un graphe $G = (V, E)$ et posons $n = \mathrm{card}(V)$. On supposera dans tout le sujet que : $n \geqslant 2$.

1. Montrer que $T_G$ est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^V$ et que pour tout $f \in \mathbb{R}^V$, on a :

$$q_G(f) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in E} (f(x) - f(y))^2.$$

**Dans le reste de cette partie, on note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de $T_G$.**

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^V$ vérifiant $T_G(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2. Montrer que pour tout $f \in \mathbb{R}^V$ on a :

$$q_G(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i^2$$

où $(f_1, \ldots, f_n)$ sont les coordonnées de $f$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.
En déduire : $\lambda_1 \geqslant 0$.

3. Notons $S$ la sphère unité de $\mathbb{R}^V$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ notons $F_k$ l'orthogonal de $\sum\limits_{i=1}^{k-1} \mathbb{R}e_i$ dans $\mathbb{R}^V$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$\lambda_k = \inf_{f\in F_k\cap S} q_G(f)$$

et en déduire que $q_G(f) \geqslant \lambda_k \|f\|^2$ pour tout $f \in F_k$.

4. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons $\mathcal{W}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension $k$ de $\mathbb{R}^V$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$\lambda_k = \inf_{W\in\mathcal{W}_k} \left( \sup_{f\in W\cap S} q_G(f) \right).$$

**Dans le reste de cette partie on suppose que le graphe $G$ est connexe.**

5. Montrer que le noyau de $T_G$ est engendré par la fonction constante égale à 1.
6. Calculer $\lambda_1$ et montrer l'inégalité : $\lambda_2 > 0$.

Posons : $d_G = \max\{\mathrm{val}(x), x \in V\}$.

7. Montrer que toutes les valeurs propres de $T_G$ sont inférieures ou égales à $2d_G$.
*Si $f$ est un vecteur propre de $T_G$, on pourra considérer un sommet $x \in V$ tel que $|f(x)|$ soit maximal.*
8. Montrer que si $G$ est biparti et régulier alors $2d_G$ est valeur propre de $T_G$.
9. Prouver réciproquement que si $2d_G$ est valeur propre de $T_G$ alors $G$ est régulier et biparti.

Soit $G' = (V, E')$ un graphe vérifiant $E' \subseteq E$ et soient $\lambda'_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda'_n$ les valeurs propres de $T_{G'}$.

10. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $\lambda'_k \leqslant \lambda_k$.
11. Soit $K_n$ le graphe $([\![1, n]\!], \{(i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \mid i \neq j\})$. Calculer les valeurs propres de $T_{K_n}$. En déduire que pour tout graphe $G = (V, E)$, les valeurs propres de $T_G$ sont inférieures ou égales à $\mathrm{card}(V)$.

# Deuxième partie

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $A_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ de signature $+1$. On admet que c'est un sous-groupe de $S_n$.

12. Montrer que $A_3$ est engendré par le cycle $(1\ 2\ 3)$.
13. Montrer que $A_4$ est engendré par les éléments $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 2)(3\ 4)$.
    *On pourra se ramener au cas des permutations $\sigma \in A_4$ vérifiant $\sigma(4) = 4$.*
14. Montrer que $A_4$ est engendré par les éléments $a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ et $b = (1\ 2)(3\ 4)$.

**Dans le reste de cette partie, on pose $G = (A_5, E)$ où :**

$$E = \{(g,h) \in (A_5)^2 \mid g^{-1}h \in \{a, a^{-1}, b\}\}.$$

Pour $g \in A_5$, on note $L_g$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^V$ défini par : $\forall f \in \mathbb{R}^V$, $\forall x \in A_5$, $(L_g f)(x) = f\left(g^{-1}x\right)$.

15. Montrer que $G$ est un graphe connexe et régulier.
16. Montrer que $L_g$ est une isométrie de $\mathbb{R}^V$ qui vérifie les identités suivantes :

$$\forall (g,h) \in (A_5)^2, \quad L_g \circ L_h = L_{gh}, \quad \text{et :} \quad T_G \circ L_g = L_g \circ T_G.$$

17. En déduire que toute valeur propre non nulle de $T_G$ est de multiplicité au moins 3.
    *On montrera qu'il n'y a pas de morphisme non trivial de $A_5$ vers les groupes $\mathrm{O}_1(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.*

Soit $\rho : A_5 \to \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^5\right)$ le morphisme défini par :

$$\forall g \in A_5,\ \forall x = (x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5, \quad \rho(g)(x) = \left(x_{g^{-1}(1)}, \dots, x_{g^{-1}(5)}\right)$$

18. Soit $F$ l'hyperplan de $\mathbb{R}^5$ d'équation $\sum_{i=1}^{5} x_i = 0$. Montrer que pour tout $g \in A_5$, le sous-espace $F$ est stable par $\rho(g)$ : on note $\tilde{\rho}(g) \in \mathrm{L}(F)$ l'endomorphisme défini par $\tilde{\rho}(g)(x) = \rho(g)(x)$ pour tout $x \in F$. Montrer que la famille $(\tilde{\rho}(g))_{g \in A_5}$ engendre linéairement $\mathrm{L}(F)$.
19. Déterminer à quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe $M \in \mathrm{L}(F)$ tel que la fonction $f \in \mathbb{R}^V$ définie par $f(g) = \mathrm{tr}(\tilde{\rho}(g) \circ M)$ soit une fonction propre de $T_G$ pour la valeur propre $\lambda$. On pourra introduire la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

    dont on admettra que le polynôme caractéristique vérifie : $\chi_A = X(X-2)(X-5)(X^2-7X+8)$.
20. Montrer que chacune des valeurs propres de la question précédente est de multiplicité au moins 4.

# Troisième partie

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Pour une partie $A$ de $V$, on note :

$$\partial A = \{(x,y) \in E \mid x \in A,\ y \in V \setminus A\}.$$

On appelle *constante de Cheeger* la quantité :

$$h_G = \inf \left\{ \frac{\mathrm{card}(\partial A)}{\mathrm{card}(A)} \mid A \subseteq V,\ 0 < \mathrm{card}(A) \leqslant \frac{\mathrm{card}(V)}{2} \right\}.$$

Pour tout $(x,y) \in V^2$, il existe un chemin de longueur $k \in \mathbb{N}$ reliant $x$ à $y$ (avec $k = 0$ si $x = y$). On note $\mathrm{d}(x,y)$ la plus petite longueur d'un tel chemin et on pose :

$$\Delta_G = \max_{(x,y) \in V^2} \mathrm{d}(x,y).$$

21. Montrer que pour tout $(x,y,z) \in V^3$ on a : $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$ et : $\mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$.

Pour toute partie $A$ de $V$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$\mathrm{B}(A,k) = \{x \in V \mid \exists y \in A,\ \mathrm{d}(x,y) \leqslant k\}$$

et on rappelle que : $d_G = \max\{\mathrm{val}(x) \mid x \in V\}$.

22. Montrer que $\mathrm{B}(A,0) = A$ pour toute partie $A$ de $V$, et que si : $\mathrm{card}(A) \leqslant \dfrac{\mathrm{card}(V)}{2}$, alors :

$$\mathrm{card}(\mathrm{B}(A,1)) \geqslant \left(1 + \frac{h_G}{d_G}\right)\mathrm{card}(A).$$

23. En déduire l'inégalité suivante :

$$\Delta_G \leqslant 2\frac{\ln\left(\dfrac{\mathrm{card}(V)}{2}\right)}{\ln\left(1 + \dfrac{h_G}{d_G}\right)} + 2.$$

Notons $\lambda_2$ la deuxième valeur propre de $T_G$.

24. Soient $A$ et $B$ deux parties de $V$ non vides telles que $A \cup B = V$ et $A \cap B = \emptyset$. Notons $a = \mathrm{card}(A)$ et $b = \mathrm{card}(B)$ et soit $f : V \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_{|A} = b$ et $f_{|B} = -a$. Montrer que $f$ est orthogonale au noyau de $T_G$ et vérifie :

$$q_G(f) = \frac{(a+b)\mathrm{card}(\partial A)}{ab}\|f\|^2.$$

25. En déduire l'inégalité : $\lambda_2 \leqslant 2h_G$.

On établit cette fois une minoration de la valeur propre $\lambda_2$.

26. Soit $f \in \mathbb{R}^V$. On note : $S(f) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{(x,y)\in E} |f(x)^2 - f(y)^2|$. Montrer l'inégalité :

$$S(f) \leqslant \sqrt{2d_G q_G(f)}\|f\|.$$

27. Soit $f : V \to [0,+\infty[$ une fonction vérifiant : $\mathrm{card}\left(f^{-1}(]0,+\infty[)\right) \leqslant \dfrac{\mathrm{card}(V)}{2}$. Montrer l'inégalité : $S(f) \geqslant h_G\|f\|^2$.
*On pourra écrire $V = \{x_1,\dots,x_n\}$ avec $f(x_1) \geqslant f(x_2) \cdots \geqslant f(x_n)$ et appliquer l'inégalité définissant $h_G$ à $A = \{x_1,\dots,x_k\}$ pour tout $k$ vérifiant $k \leqslant \frac{n}{2}$.*

28. En déduire l'inégalité : $\lambda_2 \geqslant \dfrac{h_G^2}{2d_G}$.

Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien non nul. Dans cette partie, les notations $\|\cdot\|$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ feront référence au produit scalaire et à la norme euclidienne de $\mathcal{E}$.

29. Soit $Q : \mathcal{E}^V \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $Q(f) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{(x,y)\in E} \|f(x) - f(y)\|^2$ pour tout $f \in \mathcal{E}^V$.

Montrer qu'on a l'égalité suivante :

$$\lambda_2 = \inf_{f\in S} Q(f), \qquad \text{avec :} \quad S = \left\{f : V \to \mathcal{E} \mid \sum_{x\in V}\|f(x)\|^2 = 1,\ \sum_{x\in V} f(x) = 0\right\}.$$

On appelle *plongement sphérique* de $G$ dans $\mathcal{E}$ une application $u : V \to \mathcal{E}$ vérifiant les propriétés suivantes (on pose $D(x) = \{w \in \mathcal{E} \mid \|w\| = 1, \langle u(x), w - u(x)\rangle > 0\}$ pour tout $x \in V$) :

— pour tout $x \in V$, on a : $0 < \|u(x)\| < 1$ ;

— on a : $\displaystyle\sum_{x\in V} \frac{1}{\|u(x)\|} u(x) = 0$ ;

— pour tout $(x, y) \in V^2$ tel que $x \neq y$ on a : $D(x) \cap D(y) = \emptyset$, et : $(\overline{D(x)} \cap \overline{D(y)} \neq \emptyset) \Leftrightarrow ((x, y) \in E)$.

(La notation $\overline{D(x)}$ désigne l'adhérence de $D(x)$ dans $\mathcal{E}$.)

30. Montrer qu'il existe un plongement sphérique du graphe $K_4$, défini à la question 11, dans un espace euclidien de dimension 3.
31. Montrer que si $G$ admet un plongement sphérique dans un espace euclidien de dimension 3 alors on a l'inégalité : $\lambda_2 \leqslant 8 \dfrac{d_G}{\mathrm{card}(V)}$.

    *Les arguments géométriques même incomplets seront valorisés.*

# Quatrième partie

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et posons $H_n$ le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$. On note $x \cdot y$ le produit scalaire usuel de deux vecteurs $x$ et $y$ de $\mathbb{Z}^2$ et on pose : $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Si $k$ désigne un entier ou une classe modulo $n$, on notera dans les deux cas $\omega^k$ la puissance $k^{\mathrm{e}}$ de $\omega$. De même, si $x, y \in H_n$, on note aussi $x \cdot y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ le groupe des matrices carrées de taille 2 à coefficients entiers de déterminant 1 ou $-1$.

Notons $\mathcal{H}_n$ l'espace vectoriel des fonctions de $H_n$ dans $\mathbb{C}$ et :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{H}_n)^2, \quad \langle f, g\rangle = \sum_{x\in H_n} \overline{f(x)} g(x).$$

Pour tout $f \in \mathcal{H}_n$ on définit $\hat{f} \in \mathcal{H}_n$ par : $\forall x \in H_n$, $\hat{f}(x) = \displaystyle\sum_{y\in H_n} f(y)\omega^{-x\cdot y}$.

32. Montrer que pour tout $(f, g) \in (\mathcal{H}_n)^2$ on a : $\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = n^2 \langle f, g\rangle$. En déduire que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}_n$ dans lui-même.
33. Soit $f$ un élément de $\mathcal{H}_n$. Si $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et $b \in \mathbb{Z}^2$, notons $g(x) = f(Ax + b)$ pour tout $x \in H_n$. Montrer :
$$\forall x \in H_n, \quad \hat{g}(x) = \omega^{(A^{-1}b)\cdot x} \hat{f}\left(\left(A^{-1}\right)^\top x\right).$$
34. Soit $G = (H_n, E)$ où :
$$E = \{(x, y) \in H_n^2 \mid x - y \in \{(1{,}0), (-1{,}0), (0{,}1), (0, -1)\}\}.$$
    Montrer que $G$ est un graphe connexe et régulier et déterminer la deuxième valeur propre $\lambda_2$ de $T_G$ en fonction de $n$.

    *On pourra considérer les fonctions $\chi_y \in \mathcal{H}_n$ définies par $\chi_y(x) = \omega^{y\cdot x}$ pour tous $x, y \in H_n$.*

Soient $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On définit l'endomorphisme $T$ de $\mathcal{H}_n$ par la formule suivante :

$$\forall f \in \mathcal{H}_n,\ \forall x \in H_n, \quad (Tf)(x) = 4f(x) - f(T_1x) - f(T_2x) - f(T_1x + e_1) - f(T_2x + e_2).$$

*On prendra garde qu'il ne s'agit pas d'un endomorphisme associé à un graphe.*

35. Montrer que si $f$ est un vecteur propre de $T$ associé à une valeur propre non nulle alors :
$$\sum_{x \in H_n} f(x) = 0.$$

36. Pour tout $F \in \mathcal{H}_n$ et tout $x = (x_1, x_2) \in H_n$ on pose :
$$(UF)(x) = F(T_2^{-1}x)(1 + \omega^{x_1}) + F(T_1^{-1}x)(1 + \omega^{x_2}).$$
Montrer que si la propriété :
$$\forall F \in \mathcal{H}_n, \quad F(0,0) = 0 \implies |\langle F, UF \rangle| \leqslant \frac{73}{20} \langle F, F \rangle \tag{T1}$$
est satisfaite alors toute valeur propre non nulle $\lambda$ de $T$ vérifie : $|\lambda| \geqslant \dfrac{7}{20}$.
*On pourra considérer l'endomorphisme $\hat{T}$ de $\mathcal{H}_n$ défini par $\hat{T}\hat{f} = \widehat{Tf}$ pour tout $f \in \mathcal{H}_n$.*

37. Posons pour tout $x = (x_1, x_2) \in H_n$ :
$$(U'G)(x) = G(T_2^{-1}(x)) \left| \cos\left(\frac{\pi x_1}{n}\right) \right| + G(T_1^{-1}(x)) \left| \cos\left(\frac{\pi x_2}{n}\right) \right|.$$
Montrer que la propriété suivante implique la propriété (T1).
$$\forall G \in (\mathbb{R}_+)^{H_n}, \quad G(0,0) = 0 \implies \langle G, U'G \rangle \leqslant \frac{73}{40} \langle G, G \rangle. \tag{T2}$$

Si $x \in \mathbb{Z}$, notons $\overline{x}$ l'unique représentant de $x$ modulo $n$ dans l'intervalle $\left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right[$. On notera :
$$(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2), \qquad \text{ou :} \quad (y_1, y_2) \succ (x_1, x_2)$$
si l'on a : $|\overline{x_1}| \leqslant |\overline{y_1}|$, et : $|\overline{x_2}| \leqslant |\overline{y_2}|$, et que l'une des inégalités est stricte.

Si on n'a ni $(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2)$ ni $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$, on dira que $(x_1, x_2)$ et $(y_1, y_2)$ sont *incomparables*.

38. Soit $D_n = \left\{(x_1, x_2) \in \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right[^2 \mid |x_1| + |x_2| < \frac{n}{2}\right\}$. Montrer que pour tout $x \in D_n \setminus \{(0,0)\}$ on a :
    - soit trois points parmi $T_1x, T_2x, T_1^{-1}x, T_2^{-1}x$ sont $\succ x$ et l'un est $\prec x$ ;
    - soit deux points parmi $T_1x, T_2x, T_1^{-1}x, T_2^{-1}x$ sont $\succ x$ et deux sont incomparables à $x$.

39. Notons $\gamma : H_n^2 \to \left\{\frac{4}{5}, 1, \frac{5}{4}\right\}$ la fonction définie par :
$$\forall (x, y) \in (H_n)^2, \quad \gamma(x, y) = \begin{cases} \frac{5}{4} & \text{si } x \succ y, \\ \frac{4}{5} & \text{si } x \prec y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer pour tout $x = (x_1, x_2) \in H_n \setminus \{(0,0)\}$ l'inégalité :
$$\left| \cos\left(\frac{\pi x_1}{n}\right) \right| (\gamma(x, T_2x) + \gamma(x, T_2^{-1}x)) + \left| \cos\left(\frac{\pi x_2}{n}\right) \right| (\gamma(x, T_1x) + \gamma(x, T_1^{-1}x)) \leqslant \frac{73}{20}.$$

40. Montrer que pour toute fonction $G : H_n \to \mathbb{R}_+$ et tout $(x, y) \in (H_n)^2$ on a :
$$2G(x)G(y) \leqslant \gamma(x, y) \left(G(x)\right)^2 + \gamma(y, x) \left(G(y)\right)^2$$
et en déduire que la propriété (T2) est vérifiée.