Devoir sur table n° 11

21/02/2024, 13h45–17h45, type Centrale

Notations. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour toute matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note m_{ij} son coefficient d'indice (i,j).

Première partie – décomposition polaire

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Montrer que si $S \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors S est inversible et que : $S^{-1} \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint positif (resp. défini positif). Montrer qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint positif (resp. défini positif) tel que : $v^2 = u$. Donner l'expression de l'endomorphisme induit par v sur $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.
3. Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que : $v = Q(u)$.
4. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique $(O,S) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que : $A = OS$.
5. Déterminer les matrices O et S lorsque : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.
6. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
7. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(O,S) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. Un tel couple est-il unique ?
8. Soit φ l'application de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(O,S) = OS$ pour tout couple (O,S) de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que φ est bijective, continue et que sa réciproque est continue.

Deuxième partie – deux applications

Première application. Dans cette partie, A et B désignent deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que : $U\overline{U}^\top = \mathrm{I}_n$, et : $A = UBU^{-1}$, où $\overline{U}$ désigne la matrice dont les cœfficients sont les conjugués de ceux de U.

9. Justifier : $A^\top = UB^\top U^{-1}$.

On se propose de montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et $A^\top = PB^\top P^{-1}$. Pour cela, on note X et Y les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $U = X + iY$.

10. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $X + \mu Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
11. Montrer : $AX = XB$ et $AY = YB$.
12. Conclure.

On écrit P sous la forme : $P = OS$, avec $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

13. Montrer que $BS^2 = S^2B$, puis que $BS = SB$.
14. Déduire des questions 9 à 13 que si A et B vérifient les hypothèses de cette partie, alors il existe $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A = OBO^\top$.

Deuxième application. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A^\top A + X^\top X & = & \mathrm{I}_n, \\ A^\top X - X^\top A & = & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}. \end{array} \right. \qquad (*)$$

15. Montrer que si le système $(*)$ admet une solution dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de $A^\top A$ appartiennent à l'intervalle $[0,1[$.

On suppose dans les questions 16 à 18 que les valeurs propres de $A^\top A$ appartiennent à $[0,1[$.

16. Justifier qu'on peut chercher les solutions X de $(*)$ sous la forme : $X = UH$, avec $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

17. Déterminer H.
18. Montrer l'existence d'une solution $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de $(*)$ appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Troisième partie – valeurs propres d'une matrice

Pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose :

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R}).$$

On note P_p le polynôme caractéristique de A_p.

19. Montrer que la suite $(P_p)_{p\geqslant 1}$ vérifie une relation linéaire d'ordre 2, que l'on précisera.
20. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $|2-x| < 2$. Après avoir justifié l'existence d'un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que : $2-x = 2\cos\theta$, déterminer $P_p(x)$ en fonction de $\sin((p+1)\theta)$ et de $\sin(\theta)$.
21. Déterminer les valeurs propres de A_p.
22. Montrer que A_p est diagonalisable, et en déterminer une base de vecteurs propres, en précisant pour chacun la valeur propre associée.

Quatrième partie

Soit f une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

23. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = \mathrm{tr}(AM)$.

Dans la suite, A désigne la matrice définie dans cette question 23.

24. Justifier l'existence de : $M_n = \sup\limits_{O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})} f(O)$.
25. Justifier que $A^\top A$ admet n valeurs propres positives $\mu_1, \dots, \mu_n$, comptées avec multiplicités.
26. Montrer : $M_n = \sup\limits_{O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})} \mathrm{tr}(DO)$, où D est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n}$ dans cet ordre.
27. En déduire : $M_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k}$.

Dans les questions 28 à 32, la forme linéaire f est définie par : $\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} m_{i,j}$.

28. Déterminer la matrice A telle que : $\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = \mathrm{tr}(AM)$.
29. Montrer :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

30. Déterminer les valeurs propres de $A^{-1} \left(A^{-1}\right)^\top$.
31. Montrer : $M_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.
32. Donner un équivalent de M_n lorsque n tend vers $+\infty$.