Devoir sur table n$^{\text{o}}$ 10

21/02/2024, 13h45–17h45, type inclassable

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous allons étudier ce qu'on appelle un *réseau*, ou *flot de Toda*. Posons :

$$\mathcal{O}_n = \left\{ M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top M = MM^\top = \mathrm{I}_n \right\}.$$

On admet que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Première partie – Paires de Lax

Soient $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ et :

$$T_0 = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

On pose : $a_0 = a_n = 0$ et on suppose que $a_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. *On admet que T_0 est diagonalisable dans* $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (théorème spectral).

1. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T_0)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. En raisonnant par l'absurde, montrer : $x_n \neq 0$.
2. Montrer que les sous-espaces propres de T_0 sont de dimension 1. Quel est le cardinal de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T_0)$?

On remplace désormais les a_i et les b_i par des fonctions dérivables $\alpha_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\beta_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose :

$$T = \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n-1} & \beta_n \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\alpha_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & -\alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

et on étudie le système différentiel non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} \forall t \in \mathbb{R}, & T'(t) & = & U(t)T(t) - T(t)U(t), \\ & T(0) & = & T_0, \quad (\text{donné par } (*)) \end{array} \right. \tag{$\dagger$}$$

dont on admettra qu'il possède une solution et une seule $t \mapsto T(t)$ définie sur $\mathbb{R}$. Le couple (T, U) constitue une *paire de Lax*.

3. Étant donnée une solution T de ($\dagger$) (donc U est aussi donné), démontrer que le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} \forall t \in \mathbb{R}, & V'(t) & = & U(t)V(t), \\ & V(0) & = & \mathrm{I}_n, \end{array} \right. \tag{$\ddagger$}$$

admet une solution et une seule $V : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $V(t)$ vérifiant ($\ddagger$) appartient à $\mathcal{O}_n$.
5. Montrer que $t \mapsto V(t)^\top T(t) V(t)$ est une application constante que l'on déterminera. Les valeurs propres de $T(t)$ dépendent-elles de t ?

On montre facilement, et on l'admettra, que le système différentiel (†) peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \forall t \in \mathbb{R}, & \alpha_i'(t) & = & \alpha_i(t)(\beta_{i+1}(t) - \beta_i(t)), \\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall t \in \mathbb{R}, & \beta_i'(t) & = & 2(\alpha_i^2(t) - \alpha_{i-1}^2(t)), \end{array}\right. \qquad \text{(flot de Toda)}$$

avec : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\alpha_i(0) = a_i$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\beta_i(0) = b_i$, et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\alpha_0(t) = 0 = \alpha_n(t)$.

Deuxième partie – Étude asymptotique

Pour tout réel t, on pose :

$$L(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2(t).$$

6. Montrer que la fonction L est constante. En déduire que les fonctions β_i sont bornées sur $\mathbb{R}$.
7. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}$, $2\displaystyle\int_0^t \alpha_i^2(u)\mathrm{d}u = \sum_{j=1}^{i} (\beta_j(t) - b_j)$, et en déduire que α_i^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$.
8. En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la fonction β_i possède une limite en $+\infty$ et $-\infty$.
9. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Déduire des résultats des questions précédentes que la fonction $\alpha_i\alpha_i'$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En déduire la limite de $\alpha_i(t)$ lorsque $t \to \pm\infty$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note :

$$\chi_t = \det(X\mathrm{I}_n - T(t))$$

le polynôme caractéristique de la matrice $T(t)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $T(t)$ rangées dans l'ordre décroissant.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les limites de $\beta_i(t)$ pour $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$ sont respectivement notées β_i^+ et β_i^-. On note enfin :

$$B^+ = \left\{\beta_i^+ \mid i \in [\![1, n]\!]\right\}, \quad B^- = \left\{\beta_i^- \mid i \in [\![1, n]\!]\right\}.$$

10. Montrer :

$$\lim_{t\to+\infty} \chi_t = \prod_{i=1}^{n}(X - \beta_i^+), \quad \text{et :} \quad \lim_{t\to-\infty} \chi_t = \prod_{i=1}^{n}(X - \beta_i^-).$$

L'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}_n[X]$.

11. En déduire : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T(t)) = B^+ = B^-$. On dit que la solution T est *isospectrale.*

On rappelle que, par hypothèse, on a : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\alpha_i(0) = a_i \neq 0$.

On fixe $i \in [\![1, n-1]\!]$ et on note :

$$A^+ = \{t > 0 \mid \alpha_i(t) = 0\}, \quad A^- = \{t < 0 \mid \alpha_i(t) = 0\}.$$

12. On suppose que A^+ n'est pas vide et on pose : $\tau = \inf(A^+) \in \mathbb{R}_+$. Déterminer la valeur de $\alpha_i(\tau)$ et montrer que pour $t \in]0, \tau[$, le réel $\alpha_i(t)$ est du même signe que a_i.
13. En supposant toujours que A^+ n'est pas vide, montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in [0, \tau[, \quad |\ln(|\alpha_i(t)|) - \ln(|\alpha_i(0)|)| \leqslant 2M\tau.$$

En déduire que nécessairement : $A^+ = \emptyset$, puis que α_i ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$.

14. En raisonnant par l'absurde, montrer : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\beta_{i+1}^+ < \beta_i^+$.
En déduire : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\beta_i^+ = \lambda_i$.

15. Montrer que si $\delta \in \mathbb{R}$ est choisi tel que : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $0 < \delta < \beta_i^+ - \beta_{i+1}^+$, alors il existe des réels S et C strictement positifs tels que :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \forall s > S, \quad |\alpha_i(s)| < Ce^{-\delta s}.$$

En déduire qu'il existe $C' > 0$ tel que pour $t > S$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, on ait : $|\lambda_i - \beta_i(t)| < C'e^{-2\delta t}$.

Troisième partie – Généralisation

Nous étudions à présent une généralisation du système différentiel (†). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

On admet que le résultat de la question 11 reste valable pour les solutions du système différentiel (1) ci-dessous, et que (1) et (2) admettent chacun une et une seule solution.

16. Soit $A : I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une application de classe C^1 et à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $t \mapsto A(t)^{-1}$ est de classe C^1 sur I et donner une expression simple de sa dérivée en fonction de la dérivée de A.
17. Soit $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Dériver l'application $B : t \mapsto A(t)^{-1}XA(t)$ et en déduire qu'elle vérifie :

$$B' = B \cdot A^{-1}A' - A^{-1}A' \cdot B.$$

On suppose à présent que $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles distinctes. On considère une solution Y de :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y' & = & YM(Y) - M(Y)Y, \\ Y(0) & = & X. \end{array} \right. \tag{1}$$

où $M : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une application continue.

18. Montrer que pour tout $t \in I$, il existe une matrice inversible $A(t)$ telle que : $Y(t) = A(t)^{-1}XA(t)$. Est-elle unique ?
19. Supposons que A soit solution de :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A' & = & AM(Y), \\ A(0) & = & \mathrm{I}_n. \end{array} \right. \tag{2}$$

Montrer : $\forall t \in I$, $\det(A(t)) = \exp\left(\int_0^t \mathrm{tr}\left(M(Y(u))\right) \mathrm{d}u\right)$.

20. En déduire une façon de construire la solution de (1). Que peut-on dire si X n'a pas toutes ses valeurs propres distinctes ?
21. Donner l'unique solution de (1) lorsque M est une application constante.

Quatrième partie – Solutions explicites

On note $\mathcal{A}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques, $\mathcal{I}_n$ celui des matrices triangulaires INFÉRIEURES, et enfin : $\mathcal{P}_n = \left\{M = ((m_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{I}_n \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ m_{i,i} > 0\right\}$.

22. Montrer : $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{I}_n$.

On notera par la suite p_1 le projecteur de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{A}_n$ parallèlement à $\mathcal{I}_n$.

23. Montrer que $\mathcal{P}_n$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
24. Montrer :

$$\forall M \in \mathcal{A}_n,\ \exp(M) \in \mathcal{O}_n, \quad \text{et :} \quad \forall M \in \mathcal{I}_n,\ \exp(M) \in \mathcal{P}_n.$$

25. Soient $R : I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $T : I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ deux applications de classe C^1, respectivement à valeurs dans $\mathcal{O}_n$ et $\mathcal{P}_n$. Montrer que les applications $R^{-1}R'$ et $T'T^{-1}$ sont respectivement à valeurs dans $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{I}_n$.

26. Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(C_1, \dots, C_n)$ constituée des colonnes de B, et on note $(V_1, \dots, V_n)$ la famille orthonormée ainsi obtenue.

    On note R la matrice de passage de la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $(V_n, \dots, V_1)$. Montrer : $R \in \mathcal{O}_n$, puis qu'il existe $T \in \mathcal{P}_n$ tel que : $B = RT$, et enfin que cette décomposition de B comme produit d'une matrice de $\mathcal{O}_n$ et d'une matrice de $\mathcal{P}_n$ est unique.

Autrement dit, l'application $\mathcal{O}_n \times \mathcal{P}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par $(R, T) \mapsto RT$ est bijective. On note $M \mapsto (\Pi_1(M), \Pi_2(M))$ sa bijection réciproque. Cela définit des applications $\Pi_1 : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{O}_n$ et $\Pi_2 : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n$.

27. Soit $B : I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une application de classe C^1 et à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $R : t \mapsto \Pi_1(B(t))$ et $T : t \mapsto \Pi_2(B(t))$ sont des applications de classe C^1 sur I.

On veut résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y' & = & Y p_1(Y) - p_1(Y) Y, \\ Y(0) & = & X. \end{array} \right. \tag{3}$$

28. On cherche la solution sous la forme $t \mapsto A(t)^{-1} X A(t)$ avec $A : I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 et à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Donner une équation différentielle pour A et une condition en $t = 0$ qui garantissent que $Y : t \mapsto A(t)^{-1} X A(t)$ satisfait (3).

29. Montrer que $A : t \mapsto \Pi_1(\exp(tX))$ convient.