Devoir sur table n° 1

13/09/2023, 13h–17h

Soient $f : [0{,}1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0{,}1]$ et $s = (s_j)_{j\geqslant 1}$ une suite de nombres réels vérifiant : $\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $0 \leqslant s_j \leqslant 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on désigne par $\mu_n(f, s)$ le nombre réel :

$$\mu_n(f,s) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(s_j),$$

et par $\mu(f, s)$, lorsqu'elle est définie, la limite :

$$\mu(f,s) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(f,s).$$

Première partie

1. Déterminer si $\mu(f, s)$ existe, et sa valeur le cas échéant, dans les différents cas suivants :
   (a) La fonction f est constante ;
   (b) La suite s est convergente et a pour limite ℓ ;
   (c) La suite s est la suite définie par :
   $$\forall j \in \mathbb{N}, \quad s_j = \begin{cases} 2^{-j} & \text{si} \quad j \text{ est impair,} \\ 1 - 2^{-j} & \text{si} \quad j \text{ est pair ;} \end{cases}$$
   (d) La suite s est la suite définie par :
   $$\forall j \in \mathbb{N}, \quad s_j = \begin{cases} j^{-1} & \text{si : } \exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ j = 3k, \\ 1 - j^{-1} & \text{sinon ;} \end{cases}$$
   (e) La suite s est la suite définie par $s_1 = 1$, et :
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall p \in [\![1, 2^k]\!], \quad s_{2^k+p} = \frac{2p-1}{2^{k+1}}.$$
   Est-ce que $\mu(f, s)$ existe nécessairement dans ce cas ?

On rappelle qu'une suite de fonctions $(f_j : [0{,}1] \to \mathbb{R})_{j\geqslant 1}$ vérifie le *critère de Cauchy uniforme* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que pour tout $(j, k) \in \mathbb{N}^2$:

$$j \geqslant N \text{ et } k \geqslant N \Longrightarrow \sup_{t\in[0,1]} |f_j(t) - f_k(t)| \leqslant \varepsilon,$$

et qu'une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$:

$$m \geqslant N \text{ et } n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon.$$

2. Démontrer que toute suite de Cauchy réelle converge.
3. Montrer que si $(f_j : [0{,}1] \to \mathbb{R})_{j\geqslant 1}$ est une suite de fonctions vérifiant le critère de Cauchy uniforme et si $\mu(f_j, s)$ est défini pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors $(\mu(f_j, s))_{j\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy de nombres réels.
4. En déduire que si $(f_j : [0{,}1] \to \mathbb{R})_{j\geqslant 1}$ est une suite de fonctions $f_j : [0{,}1] \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément sur $[0{,}1]$ vers une fonction f, et si $\mu(f_j, s)$ est défini pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors $\mu(f, s)$ est définie et l'on a :
$$\mu(f,s) = \lim_{j\to+\infty} \mu(f_j, s).$$

Deuxième partie

Soient I une partie non vide de $[0,1]$ et $s = (s_j)_{j\geqslant 1}$ une suite de nombres réels à valeurs dans $[0,1]$; pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on désigne par $N_k(I,s)$ le cardinal de l'ensemble :

$$\{j \in [\![1,k]\!] \mid \ s_j \in I\}.$$

On pose également : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p_k(I,s) = \dfrac{1}{k} N_k(I,s)$, et lorsque la limite existe :

$$p(I,s) = \lim_{k\to+\infty} p_k(I,s).$$

5. Soient I et J deux intervalles disjoints contenus dans $[0,1]$. Montrer que si $p(I,s)$ et $p(J,s)$ sont définis, alors $p(I \cup J, s)$ également, et que le cas échéant on a :

$$p(I \cup J, s) = p(I,s) + p(J,s).$$

6. Déterminer $p(I,s)$ si possible lorsque I est un intervalle contenu dans $[0,1]$ et s chacune des suites définies aux questions 1.(b), 1.(c), 1.(d).
7. On suppose que la suite s est telle que $p(I,s)$ soit défini pour tout intervalle I inclus dans $[0,1]$. Si $I \subseteq [0,1]$ est un intervalle d'extrémités α et β avec : $\alpha \leqslant \beta$, alors on désigne sa longueur $\ell(I)$ par le nombre : $\ell(I) = \beta - \alpha$.
   Montrer que si, pour tout intervalle $I \subseteq [0,1]$, on a : $p(I,s) = \ell(I)$, alors $\mu(f,s)$ est définie pour toute fonction continue f et on a : $\mu(f,s) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
   On pourra démontrer que f est la limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de fonctions en escalier.
8. Montrer que si une suite s est telle que pour toute fonction continue f, le nombre $\mu(f,s)$ soit défini et égal à $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, alors $p(I,s)$ est défini et égal à $\ell(I)$ pour tout intervalle $I \subseteq [0,1]$.

On dira que la suite $s = (s_j)_{j\geqslant 1}$ est *régulière* si elle vérifie, pour tout intervalle I inclus dans $[0,1]$:

$$p(I,s) = \ell(I).$$

9. Soit $s = (s_j)_{j\geqslant 1}$ une suite régulière ; déterminer :
   (a) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j^n$ (où $n \in \mathbb{N}$) ;
   (b) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \cos(2n\pi s_j)$ et $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \sin(2n\pi s_j)$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).

Troisième partie

10. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x \in [0,1]$. On pose : $\forall t \in [0,1] \setminus (x + \mathbb{Z})$, $p_n(x,t) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\sin(n\pi(x-t))}{\sin(\pi(x-t))}\right)^2$.
    Indiquer comment on peut prolonger $t \mapsto p_n(x,t)$ en une fonction continue sur $[0,1]$.

Par commodité, on note toujours $t \mapsto p_n(x,t)$ ce prolongement continu.

11. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $(a_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n-1} \in \mathbb{R}^n$ et $(b_{n,k})_{1\leqslant k\leqslant n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que :

$$\forall t \in [0,1], \quad p_n(x,t) = a_{n,0} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n,k}\cos\left(2k\pi(x-t)\right) + \sum_{k=1}^{n-1} b_{n,k}\sin\left(2k\pi(x-t)\right).$$

12. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x \in [0,1]$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 p_n(x,t)\mathrm{d}t$. Montrer que si $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie les inégalités : $0 < \eta \leqslant x \leqslant 1-\eta$, alors :

$$\int_0^{x-\eta} p_n(x,t)\mathrm{d}t + \int_{x+\eta}^1 p_n(x,t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n\left(\sin(\pi\eta)\right)^2}.$$

13. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $f(0) = f(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \int_0^1 f(t)p_n(x,t)\mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer qu'il existe $(\alpha_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n-1} \in \mathbb{R}^n$ et $(\beta_{n,k})_{1\leqslant k\leqslant n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \alpha_{n,0} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k}\cos(2k\pi x) + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{n,k}\sin(2k\pi x).$$

14. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.
15. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $f(0) = f(1)$, et soient f_n les fonctions définies, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par : $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)p_n(x,t)\mathrm{d}t$. Soit $s = (s_j)_{j\geqslant 1}$ une suite de réels $s_j \in [0,1]$ telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on ait :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^k \cos(2n\pi s_j) = 0, \quad \text{et :} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^k \sin(2n\pi s_j) = 0. \tag{$*$}$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mu(f_n, s) = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$, et en déduire : $\mu(f,s) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
16. Soit $s = (s_j)_{j\geqslant 1}$ une suite vérifiant les conditions $(*)$ de la question précédente. Soit $(\alpha,\beta) \in [0,1]^2$ tel que : $0 < \alpha \leqslant \beta < 1$, et soit : $I = [\alpha,\beta]$. Soient $(\varphi_k)_{k\geqslant k_0}$ la suite de fonctions définies, pour tout k au-delà d'un certain rang k_0, par :

$$\forall t \in [0,1], \quad \varphi_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \alpha - \frac{1}{k} \quad \text{ou} \quad \beta + \frac{1}{k} \leqslant t \leqslant 1, \\ 1 & \text{si} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \\ k(t-\alpha)+1 & \text{si} \quad \alpha - \frac{1}{k} \leqslant t \leqslant \alpha, \\ k(\beta - t)+1 & \text{si} \quad \beta \leqslant t \leqslant \beta + \frac{1}{k}, \end{cases}$$

et $(\psi_k)_{k\geqslant k_0}$ la suite de fonctions définies, pour tout k au-delà du même rang k_0, par :

$$\forall t \in [0,1], \quad \psi_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \alpha \quad \text{ou} \quad \beta \leqslant t \leqslant 1, \\ 1 & \text{si} \quad \alpha + \frac{1}{k} \leqslant t \leqslant \beta - \frac{1}{k}, \\ k(t-\alpha) & \text{si} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \alpha + \frac{1}{k}, \\ k(\beta - t) & \text{si} \quad \beta - \frac{1}{k} \leqslant t \leqslant \beta. \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que pour tout k suffisamment grand, on a : $\mu_n(\psi_k, s) \leqslant p_n(I,s) \leqslant \mu_n(\varphi_k, s)$. En déduire que $p(I,s)$ est défini et égal à $\ell(I)$. Montrer que si la suite s vérifie les conditions $(*)$, alors elle est régulière.
17. Soit $\theta \in [0,1]$ un nombre *irrationnel*. Montrer que, si n est un entier naturel non nul :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^k \exp(2i\pi jn\theta) = 0.$$

En déduire que la suite $(s_j)_{j\geqslant 1}$ définie par : $\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $s_j = j\theta - \lfloor j\theta \rfloor$, est une suite régulière.