Devoir maison n° 9

(à rendre le lundi 22 janvier 2024)

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel. On note : $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, et on admettra : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie A. Fonctions L et P.

1. Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$. Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1,1[$.

On notera : $L(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

2. Soit $z \in D$. Montrer que les fonctions $\Phi : t \mapsto L(tz)$ et $\Psi : t \mapsto (1-tz)e^{L(tz)}$ sont dérivables sur $[0,1]$ et donner une expression simple de leurs dérivées. En déduire : $\exp(L(z)) = (1-z)^{-1}$.
3. Soit $z \in D$. Montrer : $|L(z)| \leqslant -\ln(1-|z|)$. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} L(z^n)$.

Dans la suite, on notera : $\forall z \in D,\ P(z) = \exp\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right)$.

4. Soit $z \in D$. Vérifier que $P(z) \neq 0$, que : $P(z) = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}$, et que pour tout réel $t > 0$:

$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-e^{-nt}\right).$$

Partie B. Développement de P en série entière.

Pour $(n,N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{N}^N$ telles que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k a_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est fini pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que la suite $(p_{n,N})_{N\geqslant 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n,1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N\geqslant 1}$.

6. Montrer : $\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall z \in D,\ \displaystyle\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$.
7. Soit $z \in D$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n,0} = 0$. En examinant la sommabilité de $\left((p_{n,N+1} - p_{n,N})\, z^n\right)_{(n,N)\in\mathbb{N}^2}$, démontrer : $P(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$. En déduire le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} p_n z^n$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$, on a : $p_n = \dfrac{e^{nt}}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P\left(e^{-t+i\theta}\right) \mathrm{d}\theta$, si bien que :

$$p_n = \frac{e^{nt} P\left(e^{-t}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P\left(e^{-t+i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta. \tag{$*$}$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'obtenir une estimation du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Cette estimation sera obtenue *via* un choix approprié de t en fonction de n dans la formule $(*)$.

Partie C. Développement asymptotique en variable réelle.

Dans cette partie, on introduit la fonction q qui à tout réel x associe le nombre réel $q(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$.

9. Montrer que q est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, qu'elle est 1-périodique et que la fonction $|q|$ est paire.
10. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu}-1}\, \mathrm{d}u$ est bien définie pour tout réel $t > 0$.

11. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \ln(n!) + (n-1) - n\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(n) = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - 1.$$
12. Montrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = 0$. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u$ converge, puis : $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$.
13. Montrer : $\int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-u}\right)\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}$.
14. Montrer : $\lim\limits_{t\to0^+} \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u = -1$.

    On pourra commencer par établir que $x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tous $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on pose :
$$u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u \quad \text{si } t>0, \quad \text{et :} \quad u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u \quad \text{si } t=0.$$

15. Montrer que u_k est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
16. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $|u_k(t)| = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$, et : $u_k(t) = (-1)^{k+1}|u_k(t)|$, puis :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leqslant \frac{1}{2n}.$$
    On admettra dans la suite que cette majoration vaut encore pour $t=0$.
17. En déduire : $\lim\limits_{t\to0^+} \int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$.
18. Montrer, pour tout réel $t>0$, l'identité :
$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) - \ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u.$$
19. Conclure que : $\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + \underset{t\to0^+}{o}(1)$.

Partie D. Contrôle de P et conclusion.

20. Soient $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant la fonction L, montrer : $\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leqslant \exp(-(1-\cos(\theta))x)$.

    En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout réel θ, on a : $\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right)$.
21. Soient $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer : $\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) \geqslant \frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2 + 2x(1-\cos(\theta))\right)}$. En déduire que si $x \geqslant \frac{1}{2}$, alors :
$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-x)^3}\right), \quad \text{ou :} \quad \left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$
    Pour ce dernier résultat, on distinguera deux cas selon les valeurs relatives de $x(1-\cos(\theta))$ et $(1-x)^2$.
22. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $\forall \theta \in [-\pi,\pi]$, $1-\cos(\theta) \geqslant \alpha\theta^2$. En déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0, \beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in]0,t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi,\pi]$:
$$\left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant e^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2}, \quad \text{ou :} \quad \left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant e^{-\gamma\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}.$$
23. En déduire : $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}\theta = \underset{t\to0^+}{O}\left(t^{3/2}\right)$.
24. En prenant $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ dans $(*)$, conclure que : $p_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right)$.