Devoir maison n° 8

(à rendre le lundi 8 janvier 2024)

Le problème est sur les séries de fonctions. L'exercice peut être traité dès à présent, en dehors de la première question qui nécessite des théorèmes d'interversion sur les séries de fonctions.

Exercice

Vous n'avez jamais démontré la surjectivité de l'exponentielle complexe ni l'existence de π. L'objectif de l'exercice est d'y parvenir *via* des arguments *topologiques*.

Vous démontrerez tout en utilisant pour seuls acquis concernant l'exponentielle : 1° sa *définition* :

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{cases},$$

et : 2° l'identité : $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ (démontrée au chapitre II).

1. Montrer que l'exponentielle est continue sur $\mathbb{C}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée elle-même.
2. Montrer que $\exp_{|\mathbb{R}}$ est à valeurs réelles, strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer : $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$. En déduire d'une part que exp est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, et d'autre part que : $\exp(z) \in \mathbb{U} \iff z \in i\mathbb{R}$.

L'objectif des questions 5 à 8 est de montrer la surjectivité de $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. On commence par la démontrer localement. Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$. Soient f_ω l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $f_\omega : x \mapsto x - (\exp(x) - \omega)$ et : $\forall R \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$.

5. Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $z \in \mathrm{D}_R$, on ait : $|\exp(z) - 1| \leqslant \dfrac{1}{2}$, et que pour un tel R l'application f_ω induit par restriction une application contractante sur D_R.

   On introduira un chemin γ bien choisi liant z_1 et z_2, de sorte que : $f_\omega(z_1) - f_\omega(z_2) = \displaystyle\int_0^1 (f_\omega \circ \gamma)'(t)\mathrm{d}t$.
6. Déduire de ce qui précède que 1 est un point intérieur à $\exp(\mathbb{C})$.
7. Justifier que $\exp(\mathbb{C})$ est un ouvert relatif de $\mathbb{C}^*$.
8. Grâce à un argument de théorie des groupes, montrer l'existence d'une partie X de $\mathbb{C}^*$ contenant 1 et telle que :

   $$\mathbb{C}^* = \bigsqcup_{x \in X} x \exp(\mathbb{C}). \qquad \text{(réunion disjointe)}$$

   En déduire que $\exp(\mathbb{C})$ est un fermé relatif de $\mathbb{C}^*$, et conclure que l'exponentielle est une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.
9. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $z = |z|\exp(it)$.
10. Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $(\exp(it) = 1 \iff t \in a\mathbb{Z})$, et en déduire : $\forall z \in \mathbb{C}$, $(\exp(z) = 1 \iff z \in ia\mathbb{Z})$.

On pose : $\pi = \dfrac{a}{2}$. C'est la **définition** de π.

11. Calculer $\exp(i\theta)$ pour tout $\theta \in \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{6}, \pi\right\}$.

Problème

L'objectif de ce problème est de définir la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique et de comprendre pourquoi c'est le candidat naturel pour l'approcher d'aussi près que possible par une combinaison linéaire des fonctions périodiques « par excellence » (à savoir $t \mapsto e^{-int}$ et ses parties réelle et imaginaire $t \mapsto \cos(nt)$ et $t \mapsto \sin(nt)$). Nous donnerons également une condition suffisante pour que cette approximation soit vraie, c'est-à-dire pour que f soit somme de sa série de Fourier.

On pourra librement utiliser le résultat suivant, démontré dans la troisième partie de votre DST n° 1 (et également présent à la fin de vos feuilles d'exercices du chapitre I sous une forme différente) :

Théorème de Weierstraß trigonométrique. Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue 2π-périodique est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions trigonométriques.
(On appelle *fonction trigonométrique* un élément de $\mathcal{F}_T = \mathrm{Vect}\left(\{t \mapsto \cos(nt) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{t \mapsto \sin(nt) \mid n \in \mathbb{N}\}\right)$.)

Origine géométrique des séries de Fourier. Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux, 2π-périodiques, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$. On admet que E est un sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On pose :

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} fg.$$

Considérons les fonctions suivantes, qui sont évidemment des éléments de E :

$$C_0 = 1, \quad \text{et :} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad C_n(t) = \sqrt{2}\cos(nt), \quad S_n(t) = \sqrt{2}\sin(nt),$$

et : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_{T,N} = \mathrm{Vect}\left(\{C_n \mid n \in [\![0, N]\!]\} \cup \{S_n \mid n \in [\![1, N]\!]\}\right)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.
2. Montrer que si une suite $(f_n)_{n \geqslant 0} \in E^{\mathbb{N}}$ converge dans $(E, \| \cdot \|_\infty)$ vers une fonction g, alors elle converge dans $(E, \| \cdot \|)$ vers g.

On définit enfin, pour tout $f \in E$:

$$b_0(f) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \langle C_n, f \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ b_n(f) = \langle S_n, f \rangle,$$

et : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\mathscr{S}_N(f) = \sum\limits_{n=0}^{N} (a_n(f) C_n + b_n(f) S_n)$. Les suites $(a_n(f))_{n \geqslant 0}$ et $(b_n(f))_{n \geqslant 0}$ sont appelées les *coefficients de Fourier* de f, tandis que $(\mathscr{S}_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ est la *série de Fourier* de f.

3. Montrer que la famille $\{C_n \mid n \in [\![0, N]\!]\} \cup \{S_n \mid n \in [\![1, N]\!]\}$ est une base orthonormale de $\mathcal{F}_{T,N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. En déduire, pour tout $f \in E$ et tout $N \in \mathbb{N}$, l'inégalité :
$$\forall g \in \mathcal{F}_{T,N}, \quad \|f - \mathscr{S}_N(f)\| \leqslant \|f - g\|.$$
4. Soit $f \in E$. Utiliser le théorème de Weierstraß trigonométrique et la question précédente pour montrer que $(\mathscr{S}_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge dans $(E, \| \cdot \|)$ vers f.
5. En déduire que pour tout $f \in E$, la famille $\left((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et qu'on a :
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 \mathrm{d}t = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2 \right). \qquad \text{(formule de Parseval)}$$
Justifier que cette égalité reste valable si f n'est pas dans E mais seulement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique (les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont définis de même dans ce cas, même si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ n'est plus un produit scalaire).
6. Montrer que l'application $f \mapsto (a_n(f), b_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$, définie sur E, est injective.

On admet pour la suite que tout ce qui précède reste valable pour des fonctions à valeurs complexes, à condition de remplacer $(\bigstar)^2$ par $|\bigstar|^2$ partout.

Condition suffisante de convergence uniforme d'une série de Fourier vers la fonction associée. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On pose : $u_0(f) = a_0(f)$, et : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u_n(f) = a_n(f) C_n + b_n(f) S_n$.

7. Montrer que si les familles $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ sont sommables, alors la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est f.

Première application : calcul de sommes remarquables. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par : $\forall t \in [-\pi, \pi]$, $f(t) = |t|$, et étendue sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

8. Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire la valeur de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Deuxième application : formule sommatoire de Poisson et inversion de Fourier. Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ telles que : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^n f^{(p)}(x) = 0$.

9. Montrer : $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subseteq \mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Il est donc licite de définir la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x.$$

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour ne pas allonger le problème, on admet que dans ce cas on a aussi : $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. La *périodisée* $\tilde{f}$ de f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$.

10. Montrer que $\tilde{f}$ est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
11. Calculer les coefficients de Fourier de $\tilde{f}$. Les exprimer en fonction de $\hat{f}$.
12. Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n(\tilde{f})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f}$. En déduire :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n). \qquad \text{(formule de Poisson)}$$

13. En appliquant la formule sommatoire de Poisson à une fonction bien choisie, montrer plus généralement :

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^2, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) e^{-in\xi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(n + \frac{\xi}{2\pi}\right) e^{inx} e^{\frac{ix\xi}{2\pi}}.$$

14. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $F_x(\xi) = \hat{f}\left(\frac{\xi}{2\pi}\right) e^{ix\frac{\xi}{2\pi}}$. Montrer que l'égalité de la question précédente donne la somme de la série de Fourier de $\frac{1}{2\pi}\widetilde{F_x}$, et en déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi. \qquad \text{(inversion de Fourier)}$$

Troisième application : un peu de tératologie. Nous allons montrer le résultat suivant : soient $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(\lambda_n)_{n \geqslant 0}$ deux suites à valeurs réelles et $\rho \in]1, +\infty[$. On suppose que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n$ converge absolument et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\lambda_n > 0$, et : $\lambda_{n+1} \geqslant \rho \lambda_n$. Alors $F : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(i\lambda_n x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et elle est dérivable en au moins un point seulement si : $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n |a_n| = 0$.

15. Justifier la continuité sur $\mathbb{R}$ de F.
16. Montrer qu'il suffit de montrer le résultat annoncé seulement sous l'hypothèse que F est dérivable en 0.

On suppose à présent que F est dérivable en 0.

17. Montrer l'existence de $G \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bornée sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = F(0) + F'(0)x + xG(x)$.
18. Utiliser l'inversion de Fourier pour montrer l'existence de $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\hat{\varphi}$ soit de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $\left[-\rho, -\frac{1}{\rho}\right]$, et telle que : $\hat{\varphi}(-1) = 1$.
19. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} F\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \varphi(x) \mathrm{d}x = a_n$.
20. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n a_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} xG\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \varphi(x) \mathrm{d}x$, et en déduire le résultat voulu.
21. Déduire de ce qui précède que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que : $a < 1$, et : $ab \geqslant 1$, l'application $W_{a,b} : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n \exp(ib^n x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable nulle part.