Devoir maison n° 7

(à rendre le lundi 18 décembre 2023)

L'exercice peut être traité à partir de la séance du mardi 5 décembre, à une définition près que je donne ici : soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que A est *dense* dans E si : $\forall \vec{x} \in E$, $\forall r > 0$, $\mathrm{B}(\vec{x}, r) \cap A \neq \emptyset$.
La question 7 du problème nécessite d'attendre la fin du cours du vendredi 8 décembre et les questions 8 et 17 utilisent la notion de compacité. Tout le reste peut être traité dès maintenant.

Exercice

L'objectif de l'exercice est de démontrer le **lemme de Baire**. C'est le même énoncé que dans vos feuilles de travaux dirigés. Je le donne en devoir maison et consacrerai les séances en classe entière à des *applications* de ce lemme.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet. Nous allons montrer le résultat suivant : si $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés inclus dans E tels que $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} F_k$ soit d'intérieur NON vide, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que F_k soit d'intérieur non vide.

1. Montrer que cela revient à montrer qu'une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.
2. Montrer que cela revient à montrer que toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit U_k un ouvert dense de E. Soient $\vec{x} \in E$ et $r > 0$.

3. Montrer qu'il existe $\vec{x}_1 \in E$ et $r_1 > 0$ tels que : $\mathrm{B}_f(\vec{x}_1, r_1) \subseteq \mathrm{B}(\vec{x}, r) \cap U_0$, et : $r_1 \leqslant 1$.
4. Plus généralement, construire par récurrence deux suites $(\vec{x}_n)_{n\geqslant 0} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad r_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}, \quad \text{et :} \quad \mathrm{B}_f(\vec{x}_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \mathrm{B}(\vec{x}_n, r_n) \cap U_n.$$
5. Montrer que la suite $(\vec{x}_n)_{n\geqslant 0}$ converge et que sa limite $\vec{\ell}$ vérifie : $\vec{\ell} \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} U_k$. Conclure.

Problème

Si $M \in \mathrm{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathrm{M}_{\ell,1}(\mathbb{R})$, alors $(MX)_i$ désigne la i^{e} composante du vecteur $MX \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note :

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad |||M||| = \sup_{X\in\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}} \frac{\|MX\|_1}{\|X\|_1}.$$

C'est une norme d'algèbre sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit qu'une matrice $M = ((m_{i,j}))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant \ell}} \in \mathrm{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$ est *positive* (resp. *strictement positive*), ce que l'on note $M \geqslant 0$ (resp. $M > 0$), lorsque tous ses coefficients sont positifs (resp. *strictement positifs*) :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,\ell]\!], \quad m_{i,j} \geqslant 0, \quad (\text{resp. } m_{i,j} > 0).$$

On définit alors : $\forall (M,N) \in (\mathrm{M}_{n,\ell}(\mathbb{R}))^2$, $M \geqslant N \iff M - N \geqslant 0$.

Une matrice $M = ((m_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* lorsqu'elle est positive et que de plus : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1$. On définit les ensembles B, B^+et Σ par :

$$B = \left\{X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid X \geqslant 0 \text{ et } : X \neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right\}, \quad B^+ = \{X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid X > 0\},$$
$$\Sigma = \{X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \|X\|_1 = 1\}.$$

Nous souhaitons montrer le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique telle que : $(\mathrm{I}_n + T)^{n-1} > 0$. Il existe un vecteur strictement positif X_0 tel que : $TX_0 = X_0$. Toutes les valeurs propres de T sont de module inférieur à 1 et pour tout vecteur $Y \in \Sigma \cap B$, on a :* $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^j Y = \frac{X_0}{\|X_0\|_1}$.

Partie A. Un vecteur propre strictement positif. Soit T un élément positif de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $P = (\mathrm{I}_n + T)^{n-1}$ soit strictement positive.

1. Soit $X \in B$. Montrer que $\Gamma_X = \{\theta \in \mathbb{R}^+ \mid \theta X \leqslant TX\}$ est non vide, fermé et borné.

On note $\theta(X)$ son plus grand élément.

2. Montrer que pour tout $X \in B$, on peut calculer $\theta(X)$ de la manière suivante :

$$\theta(X) = \min\left\{\frac{(TX)_i}{X_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } X_i \neq 0\right\}.$$

On note θ l'application de B dans $\mathbb{R}^+$ qui à X associe $\theta(X)$.

3. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et tout $X \in B$, on a : $\theta(\alpha X) = \theta(X)$.
4. Montrer : $P(B) \subseteq B^+$.
5. Montrer que pour tout $X \in B$, on a : $\theta(PX) \geqslant \theta(X)$, et : $\theta(PX) > 0$.
6. Soit $X \in B$ tel que : $\theta(PX) = \theta(X)$. Montrer que X est un vecteur propre de T associé à $\theta(X)$.
7. Soit $C = B \cap \Sigma$. Montrer que l'application θ est continue de $P(C)$ dans $\mathbb{R}$.
8. Justifier l'existence de $X_0 \in P(C)$ tel que $\theta(X_0) = \displaystyle\sup_{X\in P(C)} \theta(X)$.
9. Montrer : $\displaystyle\sup_{X\in P(C)} \theta(X) \geqslant \sup_{X\in C} \theta(X)$.
10. Montrer : $\displaystyle\sup_{X\in B} \theta(X) = \sup_{X\in C} \theta(X)$.
11. Montrer : $\displaystyle\sup_{X\in C} \theta(X) = \sup_{X\in P(C)} \theta(X)$ et que $\theta(X_0) = \displaystyle\sup_{X\in C} \theta(X)$.

On pose : $\theta_0 = \theta(X_0)$.

12. Montrer que X_0 est un vecteur propre de T associé à θ_0, strictement positif, et que : $\theta_0 > 0$.

Partie B. Une méthode d'approximation. On suppose maintenant que T est *stochastique* et telle que $P = (\mathrm{I}_n + T)^{n-1}$ soit strictement positive. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose : $R_k = \displaystyle\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^j$.

13. Montrer : $\theta_0 = 1$.
14. Montrer que pour tout $j \geqslant 1$, les matrices T^j et R_j sont stochastiques.
15. Établir, pour tout $k \geqslant 1$, les inégalités suivantes : $|||T^k||| \leqslant 1$, et : $|||R_k||| \leqslant 1$.
16. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a : $|||TR_k - R_k||| \leqslant \frac{2}{k}$.
17. Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $(R_k X)_{k\geqslant 1}$ a au moins une valeur d'adhérence.
18. Soit Y une valeur d'adhérence de la suite $(R_k X)_{k\geqslant 1}$. Montrer : $TY = Y$ et que pour tout $k \geqslant 1$, on a : $R_k Y = Y$.
19. Montrer que la suite $(R_k X)_{k\geqslant 1}$ a exactement une valeur d'adhérence.
On introduira deux valeurs d'adhérence éventuelles Y et Z et on montrera d'abord l'identité suivante : $Y - Z = R_\ell(R_m X - Z) - R_m(R_\ell X - Y)$.
20. Montrer qu'il existe $R \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $RX = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} R_k X$, et :
$$\lim_{k\to+\infty} |||R_k - R||| = 0.$$
21. Montrer que $RT = R$ et $R^2 = R$.
22. Caractériser R en fonction de $\mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{I}_n)$ et $\mathrm{Im}\,(T - \mathrm{I}_n)$.
23. On admet que $\mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{I}_n)$ est de dimension 1. Pour tout $X \in B$, expliciter RX en fonction de $\|X\|_1$, $\|X_0\|_1$ et X_0. Conclure.