Devoir maison n° 6

(à rendre le lundi 4 décembre 2023)

L'exercice nécessite d'avoir achevé le chapitre de réduction des endomorphismes (ce qui devrait être fait le vendredi 24). En revanche le problème peut être traité dès la distribution du devoir.

Exercice

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On veut montrer que toute matrice inversible M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ admet une racine k^{e}, c'est-à-dire : $\forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ \exists A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),\ M = A^k$.

1. Montrer l'existence de $(U, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que : $1 + X = U^k + X^n Q$. *Utiliser le développement limité de* $(1+x)^\alpha$ *au voisinage de* 0.
2. Soient $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\lambda \mathrm{I}_n + N = A^k$. En déduire le résultat voulu.
3. On pose : $n = k = 3$. Donner un contre-exemple dans le cas où M n'est pas inversible.

Problème

Notations. Dans tout le problème, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n et p sont deux entiers naturels non nuls. On note $\mathrm{T}_n^{++}(K)$ le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(K)$ constitué des matrices triangulaires supérieures strictes. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ est celle ayant des coefficients tous nuls, sauf celui d'indice (i,j) qui est égal à 1.

Étant donné un entier naturel non nul n, un sous-espace vectoriel V de $\mathrm{M}_n(K)$, et un élément j de $[\![1,n]\!]$, on note $\mathrm{C}_j(V)$ l'ensemble des matrices de V dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception éventuelle de la j^{e}.

Pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(K)$ avec $n \geqslant 2$, on notera $K(M) \in \mathrm{M}_{n-1}(K)$, $R(M) \in \mathrm{M}_{n-1,1}(K)$, $L(M) \in \mathrm{M}_{1,n-1}(K)$ et $a(M) \in K$ la décomposition de M en blocs suivante :

$$M = \begin{pmatrix} K(M) & R(M) \\ L(M) & a(M) \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

On a en particulier défini des applications linéaires $K : \mathrm{M}_n(K) \to \mathrm{M}_{n-1}(K)$ et $L : \mathrm{M}_n(K) \to \mathrm{M}_{1,n-1}(K)$.

Objectifs. Soit $A \in \mathrm{M}_n(K)$. On dit que A est *quasi-nilpotente* lorsqu'elle ne possède aucune valeur propre non nulle dans K. Une partie V de $\mathrm{M}_n(K)$ est dite *quasi-nilpotente* lorsque tous ses éléments sont quasi-nilpotents.

On se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels quasi-nilpotents de $\mathrm{M}_n(K)$. En particulier, le résultat principal que nous souhaitons établir s'énonce comme suit :

Théorème 1. *Pour tout sous-espace vectoriel quasi-nilpotent N de $\mathrm{M}_n(K)$, on a :*

$$\dim(V) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}. \tag{$\dagger$}$$

La clé pour démontrer ce résultat réside dans le lemme suivant, démontré dans la partie B.

Lemme 1 (Lemme des colonnes). *Pour tout sous-espace vectoriel V de $\mathrm{M}_n(K)$ quasi-nilpotent, il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que : $\mathrm{C}_j(V) = \{0_{\mathrm{M}_n(K)}\}$.*

Partie A. Exemples. Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Étudier si la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, puis dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.
3. Montrer que $\mathrm{T}_n^{++}(K)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$, quasi-nilpotent dans $\mathrm{M}_n(K)$.
4. Soit $A \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer : $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX = 0$. En déduire que $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ est quasi-nilpotent dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Montrer qu'il n'existe pas $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\mathrm{A}_n(\mathbb{R}) = \{PMP^{-1} \mid M \in \mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{R})\}$. *On pourra commencer par étudier le cas $n = 2$, en utilisant la matrice D introduite à la question 1.*

Partie B. Lemme des colonnes. On se propose ici de démontrer le lemme des colonnes par récurrence sur l'entier n.

6. Justifier que le lemme des colonnes est vrai dans le cas $n = 1$.

Dans la suite, on fixe un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose le lemme des colonnes vrai pour l'entier $n-1$. On se donne un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $\mathrm{M}_n(K)$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\mathrm{C}_j(V) \neq \{0_{\mathrm{M}_n(K)}\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On introduit le sous-ensemble V' de V constitué de ses matrices de dernière colonne nulle. Toute matrice M de V' s'écrit donc par blocs comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} K(M) & 0_{\mathrm{M}_{n-1,1}(K)} \\ L(M) & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Montrer que $K(V') = \{K(M) \mid M \in V'\}$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathrm{M}_{n-1}(K)$.
8. En déduire qu'il existe un entier $j \in [\![1, n]\!]$ tel que : $E_{n,j} \in V$.

Soit $\sigma \in S_n$. On considère la matrice P_σ de $\mathrm{M}_n(K)$ définie par : $P_\sigma = \Big(\big(\delta_{i,\sigma(j)}\big)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

9. Montrer que P_σ est inversible. Pour tout $M \in \mathrm{M}_n(K)$, préciser les coefficients de $P_\sigma^{-1}MP_\sigma$ en fonction de ceux de M et de σ.
10. Montrer que l'ensemble $V^\sigma = \{P_\sigma^{-1}MP_\sigma \mid M \in V\}$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathrm{M}_n(K)$ et que $\mathrm{C}_j(V^\sigma) \neq \{0_{\mathrm{M}_n(K)}\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.
11. En déduire que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on peut choisir $f(j) \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$ tel que : $E_{j,f(j)} \in V$. On définit ainsi une fonction $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$.
12. En considérant les images successives de 1, montrer qu'il existe une suite finie $(j_1, \ldots, j_p)$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$ telle que : $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $f(j_k) = j_{k+1}$, et : $f(j_p) = j_1$.
13. Démontrer que 1 est valeur propre de la matrice $N = \sum\limits_{k=1}^{p} E_{j_k, f(j_k)}$ et conclure.

Partie C. Cas général. On va ici prouver l'inégalité (†) par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivialement vrai. On fixe donc un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose l'inégalité (†) établie au rang $n-1$. Soit V un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathrm{M}_n(K)$.

On rappelle qu'on peut écrire toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(K)$, et en particulier de V, sous la forme $(*)$ et qu'en particulier, les applications $K : V \to \mathrm{M}_{n-1}(K)$ et $L : V \to \mathrm{M}_{1,n-1}(K)$ sont linéaires. On introduit le sous-espace vectoriel :

$$W = \{M \in V \mid L(M) = 0_{\mathrm{M}_{1,n-1}(K)}\}.$$

Jusqu'à la question 15 incluse, on suppose : $\mathrm{C}_n(V) = \{0_{\mathrm{M}_n(K)}\}$.

14. Montrer que $\dim(V) \leqslant \dim(K(W)) + (n-1)$.
15. En déduire : $\dim(V) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.
16. On ne suppose plus désormais que $\mathrm{C}_n(V) = \{0_{\mathrm{M}_n(K)}\}$. Démontrer : $\dim(V) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.