Devoir maison n$^{\text{o}}$ 4

(à rendre le mercredi 15 novembre 2023)
(autres dates de remise possibles : le vendredi 20 octobre ou le lundi 6 novembre 2023)

Pour tout groupe fini $(G,\cdot)$, on appelle *caractère* de G un morphisme de groupes de $(G,\cdot)$ dans $(\mathbb{C}^*,\cdot)$. L'ensemble des caractères de G est noté $\widehat{G}$. Si G est un groupe et $(\chi,\chi')\in\widehat{G}^2$, on définit l'application $\chi\times\chi' : G\to\mathbb{C}^*$ par : $\forall g\in G$, $(\chi\times\chi')(g)=\chi(g)\chi'(g)$.

Pour tout groupe $(G,\cdot)$, on appelle *exposant* de G le plus grand élément de :

$$\{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\mid \text{il existe } x\in G \text{ d'ordre } k\},$$

si cet ensemble est majoré (et c'est en particulier le cas si G est fini).

Préliminaires

1. Montrer que si χ est un caractère d'un groupe fini de cardinal n, alors χ est à valeurs dans $\mathbb{U}_n$.
2. Montrer que si χ est un caractère d'un groupe fini *commutatif* d'exposant d, alors χ est à valeurs dans $\mathbb{U}_d$. *On commencera par démontrer que pour tout $g\in G$, on a : $g^d=1_G$, en raisonnant sur le ppcm des ordres de $g\in G$ quelconque et d'un élément d'ordre d.*
3. Pour tout groupe fini $(G,\cdot)$, montrer que $(\widehat{G},\times)$ est un groupe commutatif, dont l'élément neutre est le caractère $\chi_0 : G\to\mathbb{C}^*$ défini par $g\mapsto 1$.

L'objectif de ce problème est de déterminer dans quelle mesure la structure de $\widehat{G}$ découle de celle de G. Nous utiliserons alors les caractères de G pour démontrer que tout groupe fini commutatif est produit de groupes cycliques, de manière unique si l'on impose une contrainte sur leurs cardinaux.

Première partie

4. Soient G et H deux groupes finis isomorphes. Montrer que $\widehat{G}$ et $\widehat{H}$ sont isomorphes.
5. Soient G et H deux groupes finis. Montrer que $\widehat{G\times H}$ et $\widehat{G}\times\widehat{H}$ sont isomorphes.
6. Soit $(m,n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2$. Déterminer $\widehat{G}$ pour tout $G\in\{\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$. Dans chaque cas, donner un isomorphisme entre $\widehat{G}$ et un groupe usuel.
7. Montrer que s'il existe $r\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $(n_1,\dots,n_r)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^r$ tels que G soit isomorphe à $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$, alors $\widehat{G}$ est isomorphe à G.
8. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$. Expliciter les caractères de S_n et montrer que $\widehat{S_n}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   On commencera par montrer que tout 3-cycle $(a\ b\ c)$ de S_n peut s'écrire sous la forme : $(a\ b\ c)=\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$, avec $(\sigma,\tau)\in(S_n)^2$.

Deuxième partie

Soient G un groupe fini *commutatif* et H un sous-groupe de G. L'objectif de cette partie est de démontrer que tout caractère de H se prolonge en au moins un caractère de G. On raisonne par récurrence sur $r=\operatorname{card}(G/H)$, l'initialisation étant triviale. Soit $r\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. On suppose que le résultat voulu est vrai pour tout sous-groupe H de G vérifiant : $\operatorname{card}(G/H)<r$, et on considère un sous-groupe H de G tel que : $\operatorname{card}(G/H)=r$. Dans les questions 9 à 11, on fixe χ un caractère de H.

9. Justifier : $H\neq G$, et que pour tout $g\in G\setminus H$, il existe $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que : $g^k\in H$.
10. Soit $g\in G\setminus H$, et soit k le plus entier naturel non nul tel que : $g^k\in H$. Soit K le groupe engendré par $H\cup\{g\}$. Soit $\omega\in\mathbb{C}^*$ une racine k^{e} de $\chi(g^k)$ (il en existe). On pose :

$$\forall(h,\ell)\in H\times\mathbb{Z},\quad \chi'(hg^\ell)=\chi(h)\omega^\ell.$$

   Montrer que cela définit une application $\chi' : K\to\mathbb{C}^*$ et que c'est un caractère de K.

11. Conclure.

Une application remarquable de ce résultat de prolongement est le suivant :

12. Montrer : $\mathrm{card}(G) = \mathrm{card}(\widehat{G})$. *Raisonner par récurrence sur le cardinal de G.*

Nous en donnons une autre dans la dernière partie du problème.

Troisième partie

Soit G un groupe fini *commutatif* de cardinal supérieur ou égal à 2. Nous allons démontrer qu'il existe $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $(d_1, \ldots, d_r) \in (\mathbb{N} \setminus \{0{,}1\})^r$ tels que : $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $d_i \mid d_{i+1}$, et tels que G soit isomorphe au groupe $\displaystyle\prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$.

Pour cela, on commence par démontrer un résultat préliminaire :

13. Montrer que si H est un sous-groupe de G, et si $r : G \to H$ est un morphisme de groupes tel que : $r_{|H} = \mathrm{Id}_H$, alors l'application $g \mapsto (\bar{g}, r(g))$ est un isomorphisme de groupes de G dans $G/H \times H$.

À présent, supposons que G est un groupe commutatif de cardinal supérieur ou égal à 2. Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ l'ordre maximal d'un élément de G, et soit $x \in G$ un élément d'ordre d.

14. Justifier l'existence d'un isomorphisme η de $\mathbb{U}_d$ dans $\langle x \rangle$ dont l'image de $e^{\frac{2i\pi}{d}}$ est x.
15. Justifier l'existence d'un caractère χ de G tel que : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\chi\left(x^k\right) = e^{\frac{2i\pi k}{d}}$.
16. En déduire que G est isomorphe à $G/\langle x \rangle \times \langle x \rangle$.
17. Montrer le résultat voulu.
18. Montrer l'unicité de $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et de $(d_1, \ldots, d_r)$ vérifiant cet isomorphisme. *On raisonnera par récurrence, en considérant le groupe quotient de G par $\langle x \rangle$, où x est un élément bien choisi.*
19. Exemple. Soit $(a, b) \in (\mathbb{N} \setminus \{0{,}1\})^2$. Trouver $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $(d_1, \ldots, d_r) \in (\mathbb{N} \setminus \{0{,}1\})^r$ tels que : $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $d_i \mid d_{i+1}$, et tels que $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ soit isomorphe à $\displaystyle\prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$.
20. Application. Soit G un groupe fini. Montrer que si G est commutatif, alors G et $\widehat{G}$ sont isomorphes. Que dire de la réciproque ?