Devoir maison n° 3

(à rendre le lundi 9 octobre 2023)

Exercice

L'objectif de cet exercice est de fournir une démonstration du théorème de D'Alembert-Gauß. On identifie $\mathbb{C}[X]$ et l'ensemble des applications polynomiales de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Résultats préliminaires.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Montrer que l'application $g : t \mapsto \exp\left(\int_0^t \frac{f'}{f}\right)$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et en déduire : $\exists K \in \mathbb{C},\ g = K \cdot f$.
2. En déduire que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ de classe C^1 et 2π-périodique, on a : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f} \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
3. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_+$. On pose : $\mathrm{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$. Montrer qu'il existe $(a,b) \in (\mathrm{D}_R)^2$ tel que : $|P(a)| = \inf\limits_{z \in \mathrm{D}_R} |P(z)|$, et : $|P(b)| = \sup\limits_{z \in \mathrm{D}_R} |P(z)|$ (*théorème des bornes atteintes dans* $\mathbb{C}$).

Démonstration du théorème de D'Alembert-Gauß. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose que P n'admet pas de racine dans $\mathbb{C}$.

4. Justifier que $r \mapsto \dfrac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in [0,2\pi]$ et que $t \mapsto \dfrac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it}$ est continue sur $[0,2\pi]$ pour tout $r \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que $F : r \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it} \mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'elle est constante.
6. Soit $t \in [0,2\pi]$. Montrer : $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it} = n$.
7. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant R \Longrightarrow \left|\dfrac{zP'(z)}{P(z)}\right| \leqslant M$.
8. En déduire la valeur de : $\lim\limits_{r \to +\infty} F(r)$, et conclure à une absurdité.

Problème

Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On pose : $\forall x \in [2, +\infty[,\ \mathbb{P}_x = \mathbb{P} \cap [2, x]$, et : $\pi(x) = \mathrm{card}(\mathbb{P}_x)$. Ce problème démontre les développements asymptotiques suivants :

$$\sum_{p \in \mathbb{P}_x} \frac{1}{p} = \ln(\ln(x)) + \underset{x \to +\infty}{O}(1), \quad \sum_{p \in \mathbb{P}_x} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(x) + \underset{x \to +\infty}{O}(1).$$

On obtiendra en passant cet encadrement très précis de π, valable pour x au voisinage de l'infini :

$$\frac{\ln(2)}{2} \frac{x}{\ln(x)} \leqslant \pi(x) \leqslant 4\ln(2) \frac{x}{\ln(x)}.$$

Première partie

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on pose : $P_n = \prod\limits_{p \in \mathbb{P}_n} p$. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

1. Vérifier que si : $n+1 \notin \mathbb{P}$, alors : $P_n \leqslant 4^n \Longrightarrow P_{n+1} \leqslant 4^{n+1}$.
2. On suppose dans cette question : $n+1 \in \mathbb{P}$. Justifier l'existence de $m \in \mathbb{N}$ tel que : $2m+1 = n+1$, puis démontrer que tout nombre premier p compris entre $m+2$ et $n+1$ divise $\binom{2m+1}{m}$.

3. On reprend l'entier m ci-dessus. Montrer : $\binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$. En déduire : $P_{m+1} \leqslant 4^{m+1} \Longrightarrow P_{n+1} \leqslant 4^{n+1}$.
4. En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0{,}1\}$, la majoration : $P_n \leqslant 4^n$.

On définit : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0{,}1\}$, $d_n = \operatorname{ppcm}(1{,}2, \dots, n)$. Il s'agit du plus petit multiple commun (positif) de $1, 2, \dots, n$ au sens de la relation de divisibilité, c'est-à-dire : pour tout $m \in \mathbb{N}$, si m est multiple de k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, alors d_n divise m. On admet l'existence et l'unicité d'un tel entier naturel (ce sera fait au chapitre IV, mais en vérité la question suivante permettrait aussi de démontrer son existence).

5. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0{,}1\}$, $d_n = \displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor}$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0{,}1\}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n (1-x)^n \mathrm{d}x$.

6. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0{,}1\}$, $I_n \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
7. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'entier $n + k + 1$ divise d_{2n+1}, et en déduire : $d_{2n+1} I_n \in \mathbb{N}$, puis une minoration de d_{2n+1}. *On pourra développer* $(1-x)^n$ *dans l'intégrale* I_n.

Deuxième partie

On rappelle que la fonction π est définie dans l'introduction de ce problème, et on définit également : $\forall x \geqslant 2$, $\theta(x) = \displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_x} \ln(p)$. Le but de cette partie est d'étudier π et θ afin d'en déduire l'encadrement et les développements asymptotiques annoncés.

8. Soit $f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur $[2, +\infty[$. Soit $(a_k)_{k \geqslant 2} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})}$. On pose : $\forall x \in [2, +\infty[$, $A(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{\lfloor x \rfloor} a_k$. Il est facile de vérifier que A est continue par morceaux sur $[2, +\infty[$ (on ne demande pas de le démontrer). Soit $x \in [2, +\infty[$. Montrer :
$$\sum_{k \in \mathbb{N} \cap [2,x]} a_k f(k) = A(x) f(x) - \int_2^x A(t) f'(t) \mathrm{d}t. \qquad (\textit{formule sommatoire d'Abel})$$
9. Montrer : $\forall x \geqslant 2$, $\theta(x) \leqslant x \ln(4)$.
10. En déduire, en utilisant la formule sommatoire d'Abel : $\forall x \geqslant 2$, $\pi(x) \leqslant \ln(4) \left(\dfrac{x}{\ln(x)} + \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} \right)$.
11. Montrer : $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{x}{\ln(x)} \right)$, et qu'il existe $x_0 \geqslant 2$ tel que : $\forall x \geqslant x_0$, $\pi(x) \leqslant 4 \ln(2) \dfrac{x}{\ln(x)}$.
12. En utilisant la question 7, montrer l'existence de $x_1 \geqslant 2$ tel que : $\forall x \geqslant x_1$, $\pi(x) \geqslant \dfrac{\ln(2)}{2} \dfrac{x}{\ln(x)}$.
13. Montrer que la famille $\left(\dfrac{\ln(p)}{p^m} \right)_{(p,m) \in \mathbb{P} \times (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})}$ est sommable.
14. Montrer : $\forall (n, p) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}$, $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor$. En déduire : $\ln(\lfloor x \rfloor !) = x \displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_x} \frac{\ln(p)}{p} + \underset{x \to +\infty}{O}(x)$.
15. On pose : $\forall x \geqslant 2$, $F(x) = \displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_x} \frac{\ln(p)}{p}$. Déduire de ce qui précède : $F(x) = \ln(x) + \underset{x \to +\infty}{O}(1)$.
16. En déduire : $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_x} \frac{1}{p} = \ln(\ln(x)) + \underset{x \to +\infty}{O}(1)$.