Devoir maison n° 2

(à rendre le lundi 25 septembre 2023)

Objectifs et notations. Ce problème étudie quelques aspects de l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x).$$

Pour toute fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, pour tout réel $t_0 > 0$, on note $h(t_0,\cdot)$ la fonction partielle $x \mapsto h(t_0,x)$ définie sur $\mathbb{R}$; de même, pour tout réel x_0, on note $h(\cdot,x_0)$ la fonction partielle $t \mapsto h(t,x_0)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On désigne par E l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

— pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $f(t,\cdot)$ soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (on note alors $\frac{\partial f}{\partial x}(t,\cdot)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\cdot)$ ses dérivées successives, qui définissent des applications $\frac{\partial f}{\partial x} : (t,x) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : (t,x) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$) ;

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f(\cdot,x)$ soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (on note alors $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,x)$ sa dérivée, et cela définit une application $\frac{\partial f}{\partial t} : (t,x) \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$) ;

— les applications f, $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x^2}$ soient continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Pour tout réel $\sigma > 0$, on désigne par g_σ la fonction : $g_\sigma : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{cases}$.

Première partie

Dans cette partie, on fixe un réel strictement positif σ.

1. Montrer que g_σ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. En admettant que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\mathrm{d}x$.
3. Étudier les variations de g_σ. Montrer que la dérivée seconde de g_σ s'annule en changeant de signe en exactement deux points. Donner l'allure de la courbe représentative de g_σ et placer ces deux points.

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que, pour tout réel ξ, la fonction $x \mapsto \varphi(x)\exp(-2i\pi\xi x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On définit alors la fonction suivante, appelée *transformée de Fourier* de φ :

$$\mathcal{F}(\varphi) : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\exp(-2i\pi\xi x)\mathrm{d}x \end{cases}.$$

5. Montrer que $\mathcal{F}(\varphi)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^1. On suppose que φ et φ' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

6. Montrer que φ tend vers zéro en $+\infty$ et en $-\infty$.
7. Montrer : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\varphi')(\xi) = 2i\pi\xi\,\mathcal{F}(\varphi)(\xi)$.
8. Montrer que, pour tout entier naturel p, la fonction $x \mapsto x^{2p}\exp(-x^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On note : $\forall p \in \mathbb{N}$, $M_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\exp(-x^2)\mathrm{d}x$.

9. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, donner une relation entre M_{p+1} et M_p et en déduire : $\forall p \in \mathbb{N}$, $M_p = \dfrac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$.
10. Montrer que pour tout réel ξ, on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-2i\pi\xi x)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\exp\left(-\pi^2\xi^2\right)$. *On montrera que le membre de gauche définit une application de classe* C^1 *selon la variable* ξ, *vérifiant une équation différentielle linéaire du premier ordre.*

11. On pose : $\sigma' = \dfrac{1}{2\pi\sigma}$. Montrer qu'il existe un réel μ tel que : $\mathcal{F}(g_\sigma) = \mu g_{\sigma'}$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on fixe $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On cherche les éléments f de E vérifiant :

(i) l'équation de diffusion : $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$;

(ii) les trois conditions de domination : pour tout réel $T > 0$, il existe des fonctions ϕ_T, χ_T et ψ_T de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, intégrables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall t \in]0,T[,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad |f(t,x)| \leqslant \phi_T(x), \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant \chi_T(x), \qquad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right| \leqslant \psi_T(x)\,;$$

(iii) la condition aux limites : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t,x) = g_\sigma(x)$.

12. Montrer que la fonction $(t,x) \mapsto g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x)$ vérifie les conditions (i) et (iii).

On admet que cette fonction est dans E et vérifie également les trois conditions de domination (ii). L'objectif est de démontrer que c'est la seule fonction de E vérifiant (i), (ii) et (iii).

Pour cela, on note f une fonction de E qui vérifie (i), (ii) et (iii).

13. Montrer que pour tous $t > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(t,x)\exp(-2i\pi\xi x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On définit alors la fonction $\hat{f}$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (t,\xi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \hat{f}(t,\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\exp(-2i\pi\xi x)\mathrm{d}x.$$

Avec les notations de la partie I, on a ainsi : $\forall t > 0$, $\hat{f}(t,\cdot) = \mathcal{F}\Big(f(t,\cdot)\Big)$.

14. Montrer : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to 0^+} \hat{f}(t,\xi) = \mathcal{F}(g_\sigma)(\xi)$.

15. Montrer que, pour tout réel ξ et tout réel $t > 0$, on a : $\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t,\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-2i\pi\xi x)\mathrm{d}x$.

16. En remarquant que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-2i\pi\xi x)\mathrm{d}x = \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\right)(\xi),$$

et en utilisant la question 7, montrer : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\forall t > 0$, $\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t,\xi) = -4\pi^2\xi^2\hat{f}(t,\xi)$.

17. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, il existe $K(\xi) \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\hat{f}(t,\xi) = K(\xi)\exp(-4\pi^2\xi^2 t)$.

18. En utilisant la question 14, déterminer la valeur de $K(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

19. En déduire l'existence d'un réel ν_σ (que vous expliciterez) tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$:

$$\hat{f}(t,\xi) = \nu_\sigma \exp\Big(-2\pi^2(\sigma^2+2t)\xi^2\Big).$$

On admet le résultat suivant : *si u et v sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et intégrables sur $\mathbb{R}$, vérifiant : $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v)$, alors : $u = v$ (injectivité de la transformation de Fourier).*

20. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Déduire des questions 19 et 11 l'existence d'un réel $\lambda_{t,\sigma}$ tel que :

$$f(t,\cdot) = \lambda_{t,\sigma} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}.$$

21. Montrer que la fonction $I : t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. *On pourra utiliser le résultat de la question 16.*

22. En déduire : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t,\cdot) = g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}$.