Devoir maison nº 12

(à rendre le lundi 25 mars 2024)

Notations. Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et J_n la matrice :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

On dit qu'une matrice M de $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est *symplectique* si : $M^\top J_n M = J_n$. On désigne par $\mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques de $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On munit $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire et de la norme euclidienne usuels.

Première partie

1. Déterminer J_n^2 et montrer : $J_n \in \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{A}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que le déterminant d'une matrice symplectique vaut soit 1, soit -1.
3. Montrer que $\mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$. Est-ce que $\mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$?
4. Soit $X_1 \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ unitaire. Montrer : $\mathrm{M}_{(E_1,E_2)}((X_1, -J_1X_1)) \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{SP}_2(\mathbb{R})$.

Deuxième partie

Soit φ la forme bilinéaire associée à J_n, c'est-à-dire : $\forall (X,Y) \in (\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R}))^2$, $\varphi(X,Y) = X^\top J_n Y$.

5. Montrer que φ est alternée et antisymétrique.
6. Pour tous $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, montrer : $\varphi(X,Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k y_{k+n} - x_{k+n} y_k)$.
7. Montrer que pour tout $X \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, on a : $J_nX \in X^\perp$, et calculer $\varphi(J_nX, X)$.
8. Si $Y \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, on note : $Y^{\perp_\varphi} = \{Z \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) \mid \varphi(Y,Z) = 0\}$. Montrer : $X^{\perp_\varphi} = (J_nX)^\perp$.
9. Soit $P \in \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$. On note ses colonnes $X_1, \dots, X_{2n}$. Montrer qu'elles forment une base orthonormée de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ et que : $\forall (i,j) \in [\![1,2n]\!]^2$, $\varphi(X_i, X_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n}$.
10. Sous les mêmes hypothèses, montrer : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i^{\perp_\varphi} = X_{i+n}^\perp$.
11. Sous les mêmes hypothèses, montrer : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_{i+n} = -J_nX_i$.

Troisième partie

Le but de cette partie est de montrer que, si $M \in \mathrm{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $P^\top MP$ soit diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_{2n}$ tels que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $d_{k+n} = \dfrac{1}{d_k}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note : $E_\lambda = \ker(M - \lambda \mathrm{I}_{2n})$.

12. Montrer que si λ est valeur propre de M, alors $\dfrac{1}{\lambda}$ est également valeur propre de M. Donner un vecteur propre associé.
13. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ et $p = \dim E_\lambda$. Soit $(X_1, \dots, X_p)$ une base de E_λ. Montrer que $(J_nX_1, \dots, J_nX_p)$ est une base de $E_{1/\lambda}$ et que : $\dim(E_\lambda) = \dim(E_{1/\lambda})$.
14. Soient $Y_1, \dots, Y_p$ des vecteurs de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Soit $Y \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'implication :

$$Y \in (\mathrm{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, J_nY_1, \dots, J_nY_p))^\perp \implies J_nY \in (\mathrm{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, Y, J_nY_1, \dots, J_nY_p))^\perp.$$

15. Dans cette question : $\lambda = 1$. Montrer que E_1 est de dimension paire et qu'il existe une base de E_1 orthonormée de la forme $(X_1, \dots, X_p, J_n X_1, \dots, J_n X_p)$ où $2p$ est la dimension de E_1.
16. Qu'en est-il pour E_{-1} ?
17. Démontrer la propriété annoncée au début de la partie.

Quatrième partie

Soit $M \in \mathrm{A}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit m l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à M.

18. Montrer : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$.
19. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $P^\top M^2 P$ soit diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_{2n}$ tels que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $d_{k+n} = \dfrac{1}{d_k}$.

Dans toute la suite de cette sous-partie, X désigne un vecteur propre de M^2 de norme 1 associé à une certaine valeur propre λ.

20. Montrer que MX, $J_n X$ et $J_n M X$ sont des vecteurs propres de M^2 et donner les valeurs propres associées à chacun de ces vecteurs.
21. Dans cette question et dans la suite, on note $F = \mathrm{Vect}(X, MX, J_n X, J_n M X)$. Montrer que F est stable par m et J_n.
22. Montrer que toutes les valeurs propres de M^2 sont strictement négatives.
23. Justifier que si $\lambda \neq -1$, alors F est un sous-espace vectoriel de dimension 4 et que dans ce cas :

$$\left(X, \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}} MX, -J_n X, \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_n M X\right)$$

est une base orthonormée de F. Donner alors la matrice de l'application m_F induite par m sur F dans la base obtenue.

24. Montrer que $F^\perp$ est stable par m et par $X \mapsto J_n X$.
25. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul q et des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, notés $F_1, \dots, F_q$ tels que :
    (a) l'on ait la décomposition en somme directe : $F_1 \oplus \cdots \oplus F_q = \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$;
    (b) pour tout $i \in [\![1, q]\!]$ le sous-espace vectoriel F_i soit stable par m et par $X \mapsto J_n X$;
    (c) pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, le sous-espace vectoriel $F_i^\perp$ soit stable par m et par $X \mapsto J_n X$;
    (d) pour tous $i, j \in [\![1, q]\!]$ distincts, les sous-espaces vectoriels F_i et F_j soient à la fois orthogonaux et φ-orthogonaux ;
    (e) pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, on ait : $\dim F_i \in \{2,4\}$;
    (f) pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, la matrice de l'application m_{F_i} induite par m sur F_i dans une certaine base soit de la forme :

$$J_1, \quad \text{ou :} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{-\lambda} J_1 & 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} & \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_1 \end{pmatrix}.$$