Devoir maison nº 11

(à rendre le lundi 11 mars 2024)

Ce problème donne des propriétés générales des familles de polynômes orthogonaux dans la première partie. La partie II étudie le cas plus particulier des polynômes orthogonaux de Legendre, qui sont parmi les plus fréquemment rencontrés aux concours.

Première partie

On désigne par $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Soient $\omega \in \mathrm{C}^0([a,b])$ une fonction strictement positive sur $]a,b[$ et $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs.

1. Démontrer que l'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_a^b P(x)Q(x)\omega(x)\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ satisfaisant les conditions suivantes :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ et le coefficient de X^n dans P_n, qu'on notera k_n, est strictement positif ;
   — on a, pour tous entiers naturels m et n distincts : $\langle P_m, P_n\rangle = 0$;
   — on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle P_n, P_n\rangle = \alpha_n^2$.

   On pourra utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt.
3. Montrer qu'il existe, pour tout entier $n \geqslant 2$, des réels A_n, B_n, C_n, tels que l'on ait :
$$P_n = (A_n X + B_n)\, P_{n-1} + C_n P_{n-2}.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Exprimer A_n en fonction de k_n et k_{n-1}, puis C_n en fonction de k_n, k_{n-1}, k_{n-2}, α_{n-1} et α_{n-2}.
5. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, tous les zéros de P_n sont réels, simples et contenus dans l'intervalle ouvert $]a,b[$. Pour cela on examinera les deux possibilités suivantes :
   (a) Il n'existe aucun zéro de P_n de multiplicité impaire contenu dans $]a,b[$; dans ce cas, on calculera $\langle P_n,1\rangle$;
   (b) Il existe de tels zéros, que l'on note a_1, …, a_r (chacun étant compté une seule fois) ; dans ce cas, on calculera $\left\langle P_n, \prod\limits_{i=1}^{r}(X-a_i)\right\rangle$.

Dans les questions suivantes de cette partie on fixe un entier $n \geqslant 1$; on note $a_1, \ldots, a_n$ les zéros de P_n ; pour tout $G \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on écrit : $G = QP_n + R$ la division euclidienne de G par P_n.

6. Vérifier que Q et R appartiennent à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
7. Déterminer des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que l'on ait, pour tout $G \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$:
$$\int_a^b G(x)\omega(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G(a_i).$$

   On pourra songer à l'interpolation de Lagrange.
8. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Quel est le signe de λ_i ?

Deuxième partie

Dans cette partie on prend $[a,b] = [-1,1]$, $\alpha_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ω la fonction constante égale à 1. On considère la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $F_0 = 1$, et :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad F_n = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\left(\left(X^2-1\right)^n\right).$$

9. Préciser le degré de F_n et calculer $F_n(1)$, $F_n'(1)$, $F_n(-1)$, $F_n'(-1)$.
   On pourra utiliser la formule de dérivation de Leibniz.
10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme F_n est proportionnel au polynôme P_n introduit à la question 2.

On identifie polynômes et applications polynomiales sur $]-1,1[$ dans ce qui suit. On désigne par T l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad T(P) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left((X^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}X}\right).$$

11. Vérifier que $T(F_n)$ est proportionnel à F_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par T et déterminer les vecteurs propres et valeurs propres de l'endomorphisme induit par T sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On fixe $\gamma \in \mathbb{R}$ et on s'intéresse aux solutions y de l'équation différentielle :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (x^2-1)y''(x) + 2xy'(x) - \gamma y(x) = 0 = 0, \tag{$*$}$$

13. Soit $x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$ et solution de $(*)$. Écrire une relation de récurrence entre c_k et c_{k+2} pour tout $k \in \mathbb{N}$.
14. Étudier la convergence des deux séries entières, paire et impaire : $\sum_{p\geqslant 0} c_{2p}x^{2p}$ et $\sum_{p\geqslant 0} c_{2p+1}x^{2p+1}$.

    Dire dans quels cas ce sont des polynômes et reconnaître ces polynômes.
15. Décrire l'espace des solutions de $(*)$ dans $\mathrm{C}^2(]-1,1[)$.
16. Que se passe-t-il si l'on remplace l'intervalle ouvert $]-1,1[$ par l'intervalle fermé $[-1,1]$?

Ceux qui voudraient une connaissance exhaustive des polynômes orthogonaux pouvant être rencontrés aux concours pourront, en plus de ce devoir, regarder le sujet 1976 de l'ENSI Physique (filière PC), consacré aux polynômes de Tchebychev de première espèce. Il me semble intéressant parce qu'il aborde notamment la raison pour laquelle les racines de ces polynômes fournissent les meilleurs points pour une approximation par interpolation de Lagrange. Il doit exister des références plus récentes.

Les polynômes de Laguerre sont étudiés au Concours Commun INP de 2019, filière PC (ou à Centrale-Supélec, filière PSI, année 2021, dans la seconde épreuve ; mais l'étude est plus succincte et ne fait pas intervenir de géométrie), et ceux d'Hermite au Concours d'Entrée à l'École de l'Air de 2005.