# Devoir maison n° 10

(à rendre le lundi 12 février 2024)

Le premier exercice propose une démonstration alternative du théorème d'approximation de Weierstraß.

Le reste illustre deux stratégies fréquemment rencontrées aux écrits de concours : 1° démontrer des théorèmes d'existence par des méthodes probabilistes (deuxième exercice), 2° utiliser la fonction de répartition pour approcher des variables aléatoires discrètes par des variables aléatoires continues ou inversement. C'est une initiation à la loi normale et au très fameux théorème central limite (problème).

**Je refuse de corriger une composition qui traiterait le problème sans avoir traité les deux exercices (non superficiellement).**

## Premier exercice

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue. Pour tous $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x \in [0,1]$, on note $S_n(x)$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre $(n, x)$ et : $B_n(f)(x) = \mathrm{E}\left(f\left(\frac{S_n(x)}{n}\right)\right)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $x \mapsto B_n(f)(x)$ est une application polynomiale.

Soient $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ et $x \in [0,1]$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A_{n,\eta}(x) = \left(\left|\dfrac{S_n(x)}{n} - x\right| > \eta\right)$.

2. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad |B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \mathrm{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n(x)}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{A_{n,\eta}(x)}\right) + \mathrm{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n(x)}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\overline{A_{n,\eta}(x)}}\right).$$

3. Montrer que pour un choix de $\eta$ indépendant de $x$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\mathrm{E}\left(\left|f\left(\dfrac{S_n(x)}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\overline{A_{n,\eta}(x)}}\right) \leqslant \varepsilon$.

On fixe un tel choix de $\eta$ à présent.

4. Que vaut l'espérance de $\dfrac{S_n(x)}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ? En déduire que la suite de fonctions $(\mathrm{P}(A_{n,\eta}))_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers 0.
5. Conclure en démontrant le théorème d'approximation de Weierstraß.

## Deuxième exercice

Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. On désigne par $I$ un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ ayant au moins deux éléments et par $u = (\vec{u}_i)_{i\in I}$ une suite de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$. On pose : $C(u) = \sup\limits_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i\neq j}} |\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j\rangle|$. On appelle $C(u)$ le *paramètre de cohérence* de la suite $(\vec{u}_i)_{i\in I}$.

1. Montrer : $C(u) \in [0,1]$.

Soit $\varepsilon \in [0,1]$. On se propose de démontrer que, pour tout entier naturel $N \leqslant e^{\frac{\varepsilon^2 n}{4}}$, il existe une famille $u$ de $N$ vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $C(u) \leqslant \varepsilon$. On dit alors que $u$ est une famille « presque orthogonale ».

2. Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$.

On dit qu'une variable aléatoire réelle discrète $X$ suit la *loi de Rademacher* si elle vérifie : $X(\Omega) = \{-1,1\}$, et : $\mathrm{P}(X = -1) = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Soient $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Rademacher. On définit les vecteurs aléatoires :
$$X = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1, \ldots, X_n), \quad Y = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1, \ldots, Y_n).$$

3. Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}\left(e^{t\langle X,Y\rangle}\right) \leqslant e^{\frac{t^2}{2n}}$.
4. En déduire : $\mathrm{P}(|\langle X, Y\rangle| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2}}$.

Soient $N$ un entier naturel non nul et $\left(X_j^i\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant N \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une famille de $n \times N$ variables aléatoires réelles indépendantes de même loi de Rademacher. Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on pose : $X^i = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1^i, \cdots, X_n^i)$.

5. Montrer : $\mathrm{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N}\left(\left|\left\langle X^i, X^j\right\rangle\right| \geqslant \varepsilon\right)\right) \leqslant N(N-1)e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2}}$.

6. En déduire que, pour tout entier naturel $N$ inférieur ou égal à $e^{\frac{\varepsilon^2 n}{4}}$, il existe une famille de $N$ vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ dont le paramètre de cohérence est majoré par $\varepsilon$.

PROBLÈME

**Partie A. Étude asymptotique d'une suite.**

Soit $p \in ]0,1[$. On pose : $q = 1-p$, et : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $x_n = \lceil np - q\rceil = \min(\mathbb{Z}\cap[np-q, +\infty[)$.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires telle que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $p_n = \mathrm{P}(X_n = x_n)$.

1. Justifier que $p_n$ est le plus grand élément de l'ensemble $\{\mathrm{P}(X_n = k) \mid k \in [\![0,n]\!]\}$.

2. Vérifier : $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, et : $\lim_{n\to+\infty}(n - x_n) = +\infty$. Établir alors :

$$p_n\sqrt{npq} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi}x_n^{x_n}(n-x_n)^{n-x_n}}.$$

On pose : $\forall x > -1,\ \Psi(x) = (x+1)\ln(x+1)$.

3. Montrer que, pour tout entier $n > \max\left(\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right)$ :

$$\frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n}(n-x_n)^{n-x_n}} = e^{-np\Psi\left(\frac{x_n-np}{np}\right) - nq\Psi\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)}$$

4. Montrer que la suite $\left(\sqrt{npq}p_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

**Partie B. Convergence en loi.**

Dans toute la suite, on note : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $Y_n = \dfrac{1}{\sqrt{npq}}(X_n - np)$, et : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\tau_{n,k} = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a<b$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Déterminer la loi de $Y_n$ et vérifier que $Y_n$ est une variable aléatoire centrée réduite.

6. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, on ait : $[a,b] \subseteq [\tau_{n,0}, \tau_{n,n}]$, et : $\dfrac{1}{\sqrt{npq}} \leqslant b-a$.

On définit les suites de fonctions $(k_n)_{n\geqslant 1}$, $(e_n)_{n\geqslant 1}$ et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall t \in \mathbb{R},\quad k_n(t) = \lfloor\sqrt{npq}t + np\rfloor,\quad e_n(t) = \tau_{n,k_n(t)},\quad f_n(t) = \sqrt{npq}\,\mathrm{P}(Y_n = e_n(t)).$$

7. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, la fonction $e_n$ est en escalier, croissante, et vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad e_n(t) \leqslant t < e_n(t) + \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Démontrer que $(e_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $e$ que l'on précisera.

8. Montrer : $\lim_{n\to+\infty}\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$, puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \mathrm{P}(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)) = \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)}+1} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

9. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ :

$$f_n(\tau_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{pqn^2}{k(n-k)}}\frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k\left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}}\frac{1+\varepsilon_n}{(1+\varepsilon_k)(1+\varepsilon_{n-k})}$$

où : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\varepsilon_n = \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n - 1$.

10. Justifier :

$$\forall t \in [a,b], \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{pqn^2}{k_n(t)\,(n-k_n(t))}} = 1, \quad \text{et} \ : \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\varepsilon_n}{\left(1+\varepsilon_{k_n(t)}\right)\left(1+\varepsilon_{n-k_n(t)}\right)} = 1.$$

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ tels que : $\max\left(\sqrt{\frac{q}{np}}, \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \cdot |\tau_{n,k}| < 1$, on a :

$$\frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} = e^{-np\Psi\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k}\right) - nq\Psi\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k}\right)}$$

12. Soit $t \in [a,b]$. Montrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p^{k_n(t)} q^{n-k_n(t)}}{\left(\frac{k_n(t)}{n}\right)^{k_n(t)} \left(\frac{n-k_n(t)}{n}\right)^{n-k_n(t)}} = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

En déduire : $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, puis : $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}t$.

13. Montrer : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)\right) = \int_a^b \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}t$, puis :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(a \leqslant Y_n \leqslant b\right) = \int_a^b \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}t. \qquad \text{(Théorème de Moivre-Laplace)}$$

**Partie C. Applications.**

14. Montrer :

$$\forall T \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \geqslant 1 - \frac{1}{T^2},$$

puis en déduire la valeur de : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$.

15. Les suites $\left(\mathrm{P}\left(Y_n \leqslant b\right)\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\mathrm{P}\left(Y_n \geqslant a\right)\right)_{n\geqslant 1}$ sont-elles convergentes ? En préciser les limites éventuelles.

**Partie D. Généralisation.**

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et telle que $\varphi'$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on note : $Z_n = \varphi \circ Y_n$.

16. Montrer que si $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, alors il existe une unique fonction $\psi$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(\alpha,\beta) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, si $\alpha < \beta$, alors : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\alpha \leqslant Z_n \leqslant \beta\right) = \int_\alpha^\beta \psi(t)\mathrm{d}t$. Que dire si l'on ne suppose plus $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ?