Devoir maison n° 1

(à rendre le lundi 18 septembre 2023)

Les questions suivantes nécessitent d'avoir préalablement traité le chapitre I jusqu'à la section 1.2 : questions 3 à 6, 13, 14, 18. La section 2 de ce même chapitre n'est pas indispensable pour traiter ce devoir, mais elle simplifie la vie dans une question de la deuxième partie.

Dans tout le problème, E désigne l'ensemble des suites réelles décroissantes à termes positifs non tous nuls; autrement dit, tout élément $u \in E$ est une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que : $u_0 > 0$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0, \text{ et : } u_n \geqslant u_{n+1}.$$

À la suite $u \in E$ on associe la fonction U définie par :

$$x \mapsto U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n x)^n,$$

pour tout x réel tel que la série $\sum_{n\geqslant 0} (u_n x)^n$ converge (on convient que $(u_0 x)^0 = 1$ pour tout x réel).

Soit S la partie de E constituée des suites $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Soit T la partie de E constituée des suites $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que :

— la fonction U associée à u soit définie sur $\mathbb{R}$;

— l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln(U(x)) \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.

Première partie

1. Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0} \in E$. Montrer que la fonction U associée à u est définie sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. **Question pour les cinq-demis uniquement.** On suppose : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Justifier que U est continue sur $\mathbb{R}$.

L'objectif de la question 2', **pour les trois-demis uniquement**, est de démontrer la continuité de U sur $\mathbb{R}$, avec les outils à votre disposition à ce stade de l'année.

2' On suppose : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k x)^k$.

(a) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction U_n est continue sur $\mathbb{R}$, et que la suite de fonctions $(U_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[-a, a]$ vers U.

(b) Conclure.

3. Soient $u = (u_n)_{n\geqslant 0} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. En posant : $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\geqslant 0}$, montrer que $u \in T$ si et seulement si $\lambda u \in T$.
4. Soient $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ deux éléments de E tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant v_n$. Montrer que l'appartenance de u à T entraîne celle de v à T.
5. Soient $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ deux éléments de E tels que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Montrer : $u \in T \iff v \in T$.
6. Montrer que les suites $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$, $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ et $w = (w_n)_{n\geqslant 0}$ définies par :

$$u_0 = v_0 = w_0 = 1, \quad \text{et : } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \; u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, \; v_n = \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}}, \; w_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}},$$

appartiennent à E. Étudier les appartenances éventuelles de chacune de ces suites à S et à T.

Deuxième partie

7. Déterminer l'ensemble des réels $t \in \mathbb{R}_+^*$ tels que la série $\sum_{n \geqslant 0} nt^n$ converge et soit de somme inférieure ou égale à 1.

Soit $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite appartenant à S.

8. Montrer que la suite $(nu_n)_{n \geqslant 0}$ converge ; quelle est sa limite ?
9. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} n(u_n - u_{n+1})$ converge.
10. Soit $x \in \mathbb{R}$. Établir la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} n(u_n x)^n$. On note $F(x)$ sa somme, ce qui définit une application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

L'objectif des prochaines questions est de démontrer que les fonctions F et U sont liées. Seuls les cinq-demis traiteront la question 11, et seuls les trois-demis traiteront la question 11'.

11. Montrer que U est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donner une relation entre U' et F.

11' On reprend les notations de la question 2'.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application U_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que la suite de fonctions $(x \mapsto xU_n'(x))_{n \geqslant 0}$ converge uniformément, sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$, vers une fonction à préciser.

   (b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty} n(u_n t)^n \mathrm{d}t = 0$ (on justifiera l'existence de l'intégrale).

   (c) Conclure que U est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une relation entre U' et F.

On suppose dans les questions 12 à 14 que $u \in S$ et que, de plus, u_n est non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$.

12. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{3u_{n+1}}\right]$, on a :

$$F(x) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} k(u_k x)^k, \quad \text{et :} \quad \frac{F(x)}{U(x)} \leqslant n.$$

13. En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} \displaystyle\int_{\frac{1}{3u_n}}^{\frac{1}{3u_{n+1}}} \frac{F(x)}{U(x)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ et celle de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(x)}{U(x)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.
14. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(U(x)) \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.
15. Établir l'inclusion : $S \subseteq T$.

Troisième partie

On suppose dans les questions 16 à 18 que la suite $u = (u_n)_{n \geqslant 0} \in E$ a une limite nulle et que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ diverge.

16. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} n(u_n - u_{n+1})$ diverge. *On pourra raisonner par l'absurde.*
17. Pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $x \in \left[\dfrac{e}{u_n}, +\infty\right[$, montrer : $\ln(U(x)) \geqslant n$.
18. En déduire la divergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} \displaystyle\int_{\frac{e}{u_n}}^{\frac{e}{u_{n+1}}} \ln(U(x)) \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ et celle de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(U(x)) \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.
19. Comparer les ensembles S et T.