Devoir des vacances d'été (facultatif)

Ce devoir est constitué d'un problème d'algèbre linéaire et d'un autre d'analyse. Il a pour objectif de vous faire réviser plusieurs notions de 1re année, tout en vous faisant effleurer deux pôles centraux du programme de 2e année : 1° la réduction des endomorphismes et des matrices, 2° l'étude des séries de fonctions.

Le devoir est très long : ne pas chercher à tout traiter ! Privilégier la qualité à la quantité. Ce devoir sera d'ailleurs toujours pertinent à travailler avant les écrits de concours. Vous pourrez alors apprécier votre progression.

Les questions « ★ » sont des incontournables de l'année en MP*. Autant les travailler maintenant... Le label « ☢ » désigne une question plus difficile.

Problème d'algèbre linéaire

Dans tout ce problème, n est un entier naturel non nul. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 = A$ est appelée une *racine carrée* de A. L'ensemble des racines carrées de A est noté $\mathcal{R}(A)$. L'objectif du problème est d'étudier l'ensemble des racines carrées d'une matrice donnée : combien y en a-t-il (s'il y en a), peut-on les expliciter, etc. On ne traitera pas le cas général.

La **première partie** donne des propriétés basiques. La **deuxième partie** donne un premier résultat théorique : l'idée est d'abord de traiter des cas où A est une matrice diagonale particulière, en espérant que M soit diagonale aussi (de sorte que la résolution soit triviale), puis de s'y ramener dans la mesure du possible. Nous étudierons ensuite, dans **la troisième partie**, le cas des matrices nilpotentes, et c'est là que nous illustrerons très concrètement un raisonnement de « réduction » : toute matrice nilpotente peut se ramener à une matrice constituée presque entièrement de zéros. La **quatrième partie** en déduira une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice nilpotente admette une racine carrée.

Première partie : propriétés de base

1. Montrer que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, alors les ensembles $\mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{R}(B)$ sont en bijection.
2. Montrer que si M appartient à $\mathcal{R}\left(0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}\right)$, alors toute matrice semblable à M appartient à $\mathcal{R}\left(0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}\right)$.
3. Montrer que la relation définie sur $\mathcal{R}\left(0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}\right)$ par : $M \sim M' \iff \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ M = PM'P^{-1}$, est une relation d'équivalence.

Deuxième partie : un premier résultat théorique, avec un peu de réduction

Révisions recommandées. Définition de matrices semblables. Revoir dans vos exercices de 1re année comment vous aviez obtenu des relations de similitude simples *via* la formule du changement de base et l'introduction d'un endomorphisme adéquat. Savoir calculer efficacement l'inverse d'une matrice.

★ 4. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale, dont tous les coefficients diagonaux sont distincts. Montrer que si $M \in \mathcal{R}(A)$, alors M est aussi une matrice diagonale. En déduire le cardinal de $\mathcal{R}(A)$.
   Indication : calculer AM et MA, et comparer les résultats obtenus.

5. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont distincts. Donner le cardinal de $\mathcal{R}(A)$.

Illustration. Nous prenons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans les deux questions suivantes. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A.

6. Déterminer des solutions $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ non nulles, respectivement, des équations $f(\vec{x}) = 3\vec{x}$ et $f(\vec{x}) = \vec{x}$, d'inconnue $\vec{x} \in \mathbb{C}^2$.
7. Vérifier que la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ est une base de $\mathbb{C}^2$, et écrire la matrice de f relativement à cette base. En déduire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et expliciter les éléments de $\mathcal{R}(A)$.

Troisième partie : réduction des matrices nilpotentes

Révisions recommandées. Lien entre propriétés d'un endomorphisme et celles de sa matrice dans une base donnée. Cas plus particulier de l'endomorphisme canoniquement associé (définition ?). Démontrer qu'une famille est libre, génératrice, une base. Définition de f^k quand f est un endomorphisme. Refaire des exercices sur les endomorphismes et matrices nilpotents, sur leurs images et noyaux, sur leurs indices de nilpotence. Définition de sous-espaces supplémentaires : comment démontrer que deux sous-espaces le sont, surtout dans une situation abstraite. Récurrences sur la dimension d'un espace vectoriel à revoir éventuellement (pourquoi faire une chose pareille ? dans quel contexte ?).

On rappelle qu'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est *nilpotente* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $A^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$. Le plus petit entier naturel à convenir est alors appelé *indice de nilpotence* de A. Posons :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad J_k = ((\delta_{i+1,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_k(\mathbb{C}).$$

L'objectif de cette partie est de montrer que pour toute matrice nilpotente A, il existe un entier naturel non nul ℓ et un ℓ-uplet $(k_1, \dots, k_\ell)$ d'entiers naturels non nuls, uniques si l'on impose la contrainte $k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_\ell$, tels que A soit semblable à la matrice diagonale par blocs :

$$J_{k_1,\dots,k_\ell} = \operatorname{diag}(J_{k_1}, \dots, J_{k_\ell}) = \begin{pmatrix} J_{k_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & J_{k_\ell} \end{pmatrix}.$$

L'intérêt est évident : les propriétés de $J_{k_1,\dots,k_\ell}$ (rang, trace, exponentiation...) sont faciles à obtenir, certaines se lisant même à l'œil nu. Ainsi se ramener à de telles matrices simplifie considérablement l'étude.

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente dont on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé. Il est clair que f est aussi nilpotent. Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$, on note $\mathcal{F}_{\vec{x}} = \operatorname{Vect}\left(\left(f^k(\vec{x})\right)_{k\in\mathbb{N}}\right)$, et on définit la *hauteur* de $\vec{x}$ ainsi :

$$h_{\vec{x}} = \min\left\{i \in \mathbb{N} \mid f^i(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

On remarque en particulier que $h_{\vec{x}} \geqslant 1$, et que $f^i(\vec{x}) \neq \vec{0}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $i < h_{\vec{x}}$.

★ 8. Soit $\vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Justifier que l'entier $h_{\vec{x}}$ existe bien et que la famille :

$$\mathcal{B}_{\vec{x}} = \left(f^{h_{\vec{x}}-1-k}(\vec{x})\right)_{0\leqslant k\leqslant h_{\vec{x}}-1} = (f^{h_{\vec{x}}-1}(\vec{x}), \dots, f(\vec{x}), \vec{x})$$

est une base de $\mathcal{F}_{\vec{x}}$.

★ 9. On suppose *uniquement dans cette question* qu'il existe $\vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ tel que : $h_{\vec{x}} = n$. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_{\vec{x}}$, et donner une relation entre A et la matrice ainsi obtenue.

L'objectif des questions suivantes est de montrer qu'il est possible de former une base de $\mathbb{C}^n$ à l'aide de familles de la forme $\mathcal{B}_{\vec{x}}$. C'est la partie la plus épineuse du problème. En écrivant la matrice de f dans cette base, nous aurons le résultat voulu.

10. Soit $\vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Montrer que $\mathcal{F}_{\vec{x}} \cap \ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ de dimension 1 et en donner une base.

On suppose dans les questions 11 à 13 qu'il existe $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_m) \in (\operatorname{im}(f))^m$ tels que $\mathcal{B}_{\vec{z}_1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{\vec{z}_m}$ soit une base de $\operatorname{im}(f)$. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, soit $\vec{y}_i \in \mathbb{C}^n$ un antécédent par f de $\vec{z}_i$. On pose :

$$F = \operatorname{Vect}\left(\mathcal{B}_{\vec{y}_1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{\vec{y}_m}\right),$$

et soit G un supplémentaire de $F \cap \ker(f)$ dans $\ker(f)$. Posons enfin : $\ell = m + \dim(G)$.

11. Démontrer que la famille $\mathcal{B}_{\vec{y}_1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{\vec{y}_m}$ est une base de F.
12. Montrer : $\mathbb{C}^n = F \oplus G$. *Vous aurez probablement besoin de démontrer :* $f(F) = \operatorname{im}(f)$.
13. Déduire de ce qui précède qu'il existe $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell) \in (\mathbb{C}^n)^\ell$ tel que $\mathcal{B}_{\vec{x}_1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{\vec{x}_\ell}$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.
14. Conclure en montrant, par une récurrence soignée, qu'il existe $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell) \in (\mathbb{C}^n)^\ell$ tels que $\mathcal{B}_{\vec{x}_1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{\vec{x}_\ell}$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.
15. En déduire que A est semblable à une matrice de la forme $J_{k_1,\dots,k_\ell}$, avec $(k_1, \dots, k_\ell) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^\ell$.
16. ☢ Soient $(\ell, m) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ et $(k_1, \dots, k_\ell, k'_1, \dots, k'_m) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^{\ell+m}$ tels que : $k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_\ell$, $k'_1 \leqslant \cdots \leqslant k'_m$. On suppose que A est semblable à $J_{k_1,\dots,k_\ell}$ et $J_{k'_1,\dots,k'_m}$. Montrer : $\ell = m$, et : $\forall i \in [\![1, \ell]\!]$, $k_i = k'_i$. *On commencera par exprimer* $\dim(\ker(A^{i+1})) - \dim(\ker(A^i))$, *pour tout* $i \in \mathbb{N}$, *en fonction des* $k_1, \dots, k_\ell, k'_1, \dots, k'_m$.

Quatrième partie : racines carrées des matrices nilpotentes

Révisions recommandées. Mêmes révisions que pour la partie précédente, où j'insiste plus particulièrement sur la formule du changement de base, et comment l'utiliser pour montrer que des matrices sont semblables. Aisance dans le calcul de puissances d'une matrice. Se demander dans quel contexte il est plus simple de calculer M^k par le produit matriciel brut, ou par l'étude de $f^k(\vec{e}_i)$ avec f un endomorphisme dont la matrice dans une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est M.

17. Montrer que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice nilpotente, alors toute matrice de $\mathcal{R}(A)$ est également nilpotente.
18. Décrire l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente A en fonction des entiers naturels non nuls $k_1, \dots, k_\ell$ tels que A soit semblable à la matrice $J_{k_1,\dots,k_\ell}$. En déduire, en particulier : $A^n = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$.
19. D'après la question 3, l'ensemble $\mathcal{R}\left(0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}\right)$ est une réunion disjointe de classes d'équivalence. Déduire des deux questions précédentes qu'il y a un nombre fini de telles classes.
20. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence p. Démontrer que si : $2p - 2 \geqslant n$, alors : $\mathcal{R}(A) = \emptyset$.
21. Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que J_{2k}^2 est semblable à $\begin{pmatrix} J_k & 0_{\mathrm{M}_k(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_k(\mathbb{C})} & J_k \end{pmatrix}$, et J_{2k+1}^2 semblable à $\begin{pmatrix} J_k & 0_{\mathrm{M}_{k,k+1}(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_{k+1,k}(\mathbb{C})} & J_{k+1} \end{pmatrix}$. *On introduira l'endomorphisme canoniquement associé à* J_{2k} *ou* J_{2k+1}.
22. On suppose que $A \in \mathrm{M}_{15}(\mathbb{C})$ est semblable à $J_{3,4,4,4}$: déterminer si $\mathcal{R}(A)$ est vide ou non.
Même question, en supposant que $A \in \mathrm{M}_{17}(\mathbb{C})$ est semblable à $J_{3,4,4,6}$, puis que $A \in \mathrm{M}_9(\mathbb{C})$ est semblable à $J_{1,1,1,3,3}$.
23. Soit $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. S'inspirer de la question 22 pour déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur $(k_1, \dots, k_\ell) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^\ell$, pour qu'une matrice A semblable à $J_{k_1,\dots,k_\ell}$ admette des racines carrées.

Problème d'analyse

Dans tout ce problème, la lettre p désigne *systématiquement* un nombre premier. La somme $\sum_p$, sans plus de précision, désigne toujours une somme indexée par *tous* les nombres premiers p. Souvenez-vous que le chapitre sur les familles sommables se charge de donner un sens à une somme même quand elle n'est pas indexée par $\mathbb{N}$ ou ses variantes.

Les seules connaissances arithmétiques préalables nécessaires sont : 1° le fait que l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers soit non vide (par exemple $2 \in \mathbb{P}$), 2° l'existence et l'unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en facteurs premiers.

Première partie : produit eulérien et infinité de nombres premiers

Révisions recommandées. Familles sommables : savoir calculer *en pratique*, comprendre ce qui est licite ou non, comment on obtient la sommabilité par un calcul ou une majoration *a priori* de la somme, etc. Revoir le théorème de sommation par paquets et le produit de sommes de familles sommables. Sommes géométriques. Nature des séries de Riemann, étude du reste d'une série convergente. Revoir des exercices où vous obtîntes des limites de suites d'intégrales grâce au théorème des gendarmes.

L'objectif est de démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers en passant par l'étude de la fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, dont on rappelle qu'elle est définie sur $]1, +\infty[$ (cf. la nature des séries de Riemann).

★ 1. Montrer que $\zeta(s)$ tend vers l'infini quand $s \to 1$.

On fixe $s > 1$. Pour tout réel $T \geqslant 2$, soit $\mathcal{N}(T)$ l'ensemble des entiers naturels n dont la factorisation en nombres premiers ne fait intervenir que des nombres premiers inférieurs ou égaux à T.

2. Montrer que pour tout $T \geqslant 2$, on a :

$$\prod_{p \leqslant T} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{ks}} \right) = \sum_{n \in \mathcal{N}(T)} \frac{1}{n^s}.$$

★ 3. Montrer : $\lim\limits_{T \to +\infty} \sum\limits_{n \notin \mathcal{N}(T)} \frac{1}{n^s} = 0$ (*majorer par le reste d'une série de Riemann convergente et utiliser le théorème des gendarmes*), et en déduire :

$$\zeta(s) = \lim_{T \to +\infty} \prod_{p \leqslant T} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

C'est ce qu'on appelle un *produit eulérien*, et c'est probablement le résultat le plus important de l'arithmétique moderne : il fait en effet la jonction entre le monde de l'arithmétique et celui de l'analyse.

4. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a : $-\ln(1-x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$, et en déduire :

$$\ln(\zeta(s)) = \sum_{p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{kp^{ks}}.$$

Indication. Intégrer la relation : $\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

5. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{kp^k} \right)_{(k,p) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) \times \mathbb{P}}$ est sommable.

6. Déduire de ce qui précède : $\lim\limits_{s \to 1} \sum\limits_{p} \frac{1}{p^s} = +\infty$, puis que la famille $\left(\frac{1}{p} \right)_{p \in \mathbb{P}}$ n'est pas sommable. Conclure.

Deuxième partie : infinité de nombres premiers congrus à ± 1 modulo 4

Révisions recommandées. Théorème des suites adjacentes. Raisonnements epsilonesques utilisant la définition d'une limite en un point, d'une fonction continue en un point.

Nous allons imiter le raisonnement de la première partie, et démontrer par des moyens analytiques (proches en esprit de la démonstration due à Dirichlet) qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à ± 1 modulo 4. On note $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $\chi(0) = \chi(2) = 0$, $\chi(1) = 1$ et $\chi(-1) = -1$, et étendue ensuite à tout entier relatif par 4-périodicité.

7. Montrer que pour tous m et n entiers, on a : $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$.

8. On pose, quand c'est défini : $\mathrm{L}_\chi(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$ converge absolument pour tout $s > 1$.

9. Soit $s > 0$. On pose : $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N(s) = \sum\limits_{n=1}^{2N+1} \frac{\chi(n)}{n^s}$. Montrer : $S_N(s) = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$, et que les suites $(S_{2N}(s))_{N \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2N+1}(s))_{N \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

10. En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$ converge pour tout $s > 0$, et qu'on a : $\forall s > 0$, $\mathrm{L}_\chi(s) > 0$.

11. Montrer que pour tout $s > 1$, on a : $\mathrm{L}_\chi(s) = \lim\limits_{T\to+\infty} \prod\limits_{p\leqslant T} \dfrac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}$.

12. Montrer que pour tout $s > 1$, on a :

$$\ln(\zeta(s)) + \ln(\mathrm{L}_\chi(s)) = 2\sum_{p\equiv 1[4]} \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2^s} + \sum_p \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1+(\chi(p))^k}{kp^{ks}}. \qquad (*)$$

À ce stade nous voulons conclure comme dans la première partie, en prenant la limite dans cette égalité quand $s \to 1$. La subtilité est le calcul de : $\lim\limits_{s\to1} \ln(\mathrm{L}_\chi(s))$. Naïvement, nous aimerions affirmer que la limite est $\ln(\mathrm{L}_\chi(1))$, mais cela ne va pas de soi à cause du nombre infini de termes de la somme (et du signe alterné du terme général). L'objectif des questions 13 à 15 est de le démontrer.

13. Montrer : $\forall N \in \mathbb{N}, \forall s \geqslant 1, |\mathrm{L}_\chi(s) - S_N(s)| \leqslant \dfrac{1}{2N+3}$. *Utiliser la question 9.*

14. En déduire : $\forall N \in \mathbb{N}, \forall s \geqslant 1, |\mathrm{L}_\chi(s) - \mathrm{L}_\chi(1)| \leqslant \dfrac{2}{2N+3} + \left|\sum\limits_{n=1}^{2N+1} \chi(n)\left(\dfrac{1}{n^s} - \dfrac{1}{n}\right)\right|$.

15. Conclure : $\lim\limits_{s\to1^+} \ln(\mathrm{L}_\chi(s)) = \ln(\mathrm{L}_\chi(1)) \neq \pm\infty$.

16. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 1 \bmod 4$.

17. Trouver une identité analogue à $(*)$ pour en déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 3 \bmod 4$.

18. S'inspirer de ce qui précède pour montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv \pm 1 \bmod 3$, ou $p \equiv \pm 1 \bmod 6$. Vous aurez à changer la définition de χ.

Remarque culturelle. Si l'on voulait généraliser la méthode pour montrer que, si a et b sont premiers entre eux, alors il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv a \bmod b$, alors on aurait besoin d'introduire les fonctions L_χ associées aux morphismes χ de $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^\times$ de $\mathbb{C}^*$ (posés comme nuls en les non inversibles et prolongés sur $\mathbb{Z}$ par b-périodicité), définies par $\mathrm{L}_\chi : s \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\chi(n)}{n^s}$. C'est la formule d'orthogonalité des caractères :

$$\forall a \in (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^\times, \quad \frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\chi \in \widehat{(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^\times}} \chi(\overline{a}^{-1}\overline{n}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv a \bmod b \\ 0 & \text{si } n \not\equiv a \bmod b \end{cases},$$

où φ est l'indicatrice d'Euler et $\widehat{(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^\times}$ l'ensemble des morphismes de $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^\times$ de $\mathbb{C}^*$, qui permet de démontrer que la somme $\sum\limits_\chi \chi(\overline{a}^{-1}) \dfrac{\mathrm{L}'_\chi}{\mathrm{L}_\chi}(s)$ ne fait intervenir que des nombres premiers congrus à a modulo b *. La difficulté est cependant, si l'on veut imiter le raisonnement de ce problème dans le cas général, de montrer que $\lim\limits_{s\to1} \dfrac{\mathrm{L}'_\chi}{\mathrm{L}_\chi}(s) \neq \pm\infty$ si χ est différent du caractère trivial χ_0 (qui est égal à 1 en tout entier premier avec b), ce qui se ramène à démontrer que $\mathrm{L}_\chi(1) \neq 0$ pour tout $\chi \neq \chi_0$. C'est considérablement plus difficile que dans l'étude ci-dessus.

*. La raison pour laquelle on écrit $\frac{\mathrm{L}'_\chi}{\mathrm{L}_\chi}(s)$ ici, alors qu'on manipulait $\ln(\mathrm{L}_\chi(s))$ dans ce problème, est qu'en général χ est à valeurs dans $\mathbb{C}$, et donc L_χ aussi : on veut éviter de manipuler le logarithme de quantités complexes.