ENS Lyon et Cachan – filière MP – année 2000

Les parties II, III et IV sont des applications indépendantes de la partie I. Dans la partie préliminaire ainsi que dans la première partie, K désigne un corps qui peut être quelconque. Dans les trois parties d'applications, K sera égal respectivement à $\mathbb{R}$, à $\mathbb{Q}(X)$, et enfin à $\mathbb{C}(X)$.

L'anneau des polynômes à coefficients dans K sera le plus souvent noté $K[X]$ – cependant, il sera noté $K[Y]$ lorsque K sera lui-même un corps de fractions rationnelles.

D'autre part, soient m, n deux entiers naturels non nuls. Si $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q(X) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j X^j$ sont deux éléments de $K[X]$ de degrés respectifs n et m, on appelle *résultant* de P et Q (noté $\mathrm{Res}_K(P,Q)$, ou bien $\mathrm{Res}(P,Q)$ si aucune confusion n'est possible) le déterminant de la matrice de $\mathrm{M}_{m+n}(K)$ suivante, dite *matrice résultante* :

$$\begin{array}{c@{}l}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \overbrace{\hspace{16em}}^{n} & \overbrace{\hspace{9em}}^{m} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m
\end{pmatrix}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\\
\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\
\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n
\end{array}
\end{array}$$

où chaque a_i apparaît exactement m fois, et chaque b_j apparaît n fois. Noter que les m premiers coefficients diagonaux sont égaux à a_0, et que les n derniers sont égaux à b_m.

Enfin, si A est un sous-anneau de K, on notera $A[X]$ le sous-anneau de l'anneau des polynômes $K[X]$, constitué des polynômes dont tous les coefficients sont dans A.

Préliminaires

Soit A un sous-anneau de K.

1. Vérifier que $A[X]$ est bien un sous-anneau de $K[X]$.
2. Montrer que si P et Q sont deux éléments de $A[X]$, alors $\mathrm{Res}_K(P,Q)$ est un élément de A.
3. Soit $\mathbb{C}[X][Y]$ le sous-anneau de l'anneau des polynômes $\mathbb{C}(X)[Y]$ sur le corps $\mathbb{C}(X)$. Montrer que tout élément P de $\mathbb{C}[X][Y]$ s'écrit de façon unique sous la forme $P(X,Y) = \sum\limits_{i,j \geqslant 0} a_{i,j} X^i Y^j$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ nul sauf pour un nombre fini de couples (i,j).
   En déduire que si $P \neq 0$ est un élément de $\mathbb{C}[X][Y]$ s'écrivant comme ci-dessus, alors le nombre $d(P) = \max\{i+j \mid a_{i,j} \neq 0\}$ est un entier naturel bien défini, appelé *degré total* de P.

Partie I – la propriété fondamentale du résultant

Soient $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q(X) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j X^j$ deux polynômes de $K[X]$ de degrés n et m.

4. Montrer que P et Q ne sont pas premiers entre eux dans $K[X]$ si, et seulement si, il existe deux polynômes A et B non nuls de $K[X]$, de degrés $\deg(A) < m$ et $\deg(B) < n$, tels que : $AP = BQ$.

On note $K[X]_d$ le sous-espace vectoriel de $K[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à d.

5. Quelle est la dimension sur K de $K[X]_d$?
6. Soit f l'application :
$$f : \begin{cases} K[X]_{m-1} \times K[X]_{n-1} & \to & K[X]_{m+n-1} \\ (A,B) & \mapsto & AP+BQ \end{cases}.$$
Montrer que f est une application linéaire, et que sa matrice dans des bases *ad hoc* que l'on précisera est la transposée de la matrice résultante de l'énoncé.
7. Montrer que P et Q sont premiers entre eux dans $K[X]$ si et seulement si : $\mathrm{Res}_K(P,Q) \neq 0$.
8. Montrer que pour tout $\lambda \in K$ non nul, on a :
$$\mathrm{Res}_K\left(\lambda^n P\left(\frac{X}{\lambda}\right), \lambda^m Q\left(\frac{X}{\lambda}\right)\right) = \lambda^{mn}\mathrm{Res}_K(P(X),Q(X)).$$

Partie II – une courbe unicursale

On considère la courbe plane de $\mathbb{R}^2$ paramétrée sur $\mathbb{R}$ par :
$$t \mapsto \begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = t^3 + 2t^2 \end{cases}$$

9. Quelle est l'équation cartésienne de la courbe dans le plan ?

Partie III – entiers algébriques

On note $\mathcal{O}$ l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels il existe un polynôme non nul $P(X)$ de $\mathbb{Z}[X]$ *unitaire* et vérifiant $P(z) = 0$.

10. Soient z_1 et z_2 des éléments de $\mathcal{O}$, annulant les polynômes P_1 et P_2 de degrés respectifs n_1 et n_2. Montrer que le polynôme $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}(X)}(P_1(X-Y), P_2(Y))$ est un élément de $\mathbb{Z}[X]$, unitaire de degré $n_1 n_2$ annulant la somme $z_1 + z_2$.
11. Montrer que $\mathcal{O}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Partie IV – le théorème de Bézout faible

On se donne deux polynômes P et Q non nuls de $\mathbb{C}[X][Y]$, et on se propose d'étudier le nombre de solutions (z_1, z_2) dans $\mathbb{C}^2$ du système d'équations :
$$\begin{cases} P(z_1,z_2) = 0, \\ Q(z_1,z_2) = 0. \end{cases}$$

On considère les deux conditions suivantes sur P et Q :

(C_1) les polynômes P et Q sont premiers entre eux dans l'anneau de polynômes $\mathbb{C}(X)[Y]$ à coefficients dans le corps $\mathbb{C}(X)$.

(C_2) En notant les décompositions de P et Q sous la forme :
$$P(X,Y) = \sum_{i=0}^{n} P_i(X)Y^i, \quad Q(X,Y) = \sum_{j=0}^{m} Q_j(X)Y^j,$$
avec $P_n(X)Q_m(X) \neq 0$ dans $\mathbb{C}[X]$, il n'y a aucun facteur non constant commun aux $n+m+2$ polynômes $P_0(X), P_1(X), \ldots, P_n(X), Q_0(X), \ldots, Q_m(X)$ dans l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[X]$.

Enfin, on note $d(P)$ et $d(Q)$ les degrés totaux de P et de Q définis à la question 3.

12. Parmi les trois couples de polynômes suivants, lesquels vérifient (C_1) ? Lesquels vérifient (C_2) ? Quels sont leurs degrés totaux ?

$$(P_1(X,Y) = XY^2 + X, \quad Q_1(X,Y) = X^2Y^3 + XY^2)\ ;$$

$$(P_2(X,Y) = XY^2 + X + 1, \quad Q_2(X,Y) = Q_1(X,Y))\ ;$$

$$(P_3(X,Y) = Y + X, \quad Q_3(X,Y) = X^2 - Y^2).$$

13. On suppose que P et Q vérifient (C_1). Montrer qu'il existe trois polynômes non nuls A, B dans $\mathbb{C}[X][Y]$, et $C \in \mathbb{C}[X]$, tels que : $AP + BQ = C$.
14. En déduire que le système étudié n'a qu'un nombre fini de solutions si et seulement si P et Q vérifient (C_1) et (C_2).
15. Montrer que, par un changement de variables linéaire en (x, y), on peut se ramener au cas où $n = d(P)$ et $m = d(Q)$.
16. On pose : $R(X) = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}(X)}(P(X,Y), Q(X,Y))$. La fonction polynômiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée à R sera notée $z \mapsto R(z)$. On suppose que $n = d(P)$ et $m = d(Q)$. Montrer que $\dfrac{R(z)}{z^{d(P)d(Q)}}$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque $|z| \to +\infty$.
17. On suppose que P et Q vérifient (C_1) et (C_2). Montrer que le nombre de solutions du système est inférieur ou égal au produit $d(P)d(Q)$.
18. Le système d'équations proposé a-t-il toujours $d(P)d(Q)$ solutions lorsque P et Q satisfont (C_1) et (C_2) ?