Centrale-Supélec – filière PSI – année 2003 – Mathématiques I

Notations. Pour tout P dans $\mathbb{C}[X]$, soit $T(P)$ le polynôme $P(X+1)$. L'application T ainsi définie est clairement un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ le sous-espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par T et on note T_n l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ induit par T.

Soit $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Hilbert, définie par :

$$H_0 = 1, \quad \text{et} \;:\; \forall i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad H_i = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k).$$

Si $R \in \mathbb{R}_+^*$, soit :

$$D_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}, \quad \overline{D_R} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant R\}, \quad \text{et} \;:\; C_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}.$$

On convient d'autre part que : $D_\infty = \mathbb{C}$. Pour tout $R \in]0,+\infty]$, soit E_R l'espace vectoriel des fonctions de D_R dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à R. L'espace E_∞ est appelé espace des *fonctions entières*.

Objectif du problème, dépendance des parties. La partie I étudie les *polynômes de Hilbert*, ce qui permet notamment de déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que : $P(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Z}$. La partie II est complètement indépendante de I. Elle a pour but d'établir quelques propriétés des séries entières utilisées dans la partie III, laquelle montre que toute fonction entière vérifiant une certaine condition asymptotique est un polynôme. Le résultat obtenu est dû à Georg Pólya (1915). La partie III utilise la partie II et la dernière question de la partie I.

Première partie – Polynômes de Hilbert

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Inversion d'une matrice.

1. Écrire la matrice M_n de T_n dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Vérifier que M_n est inversible ; expliciter M_n^{-1}.

Propriétés de la suite $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer que $(H_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
4. Si $j \in \mathbb{Z}$ et $i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, donner une expression simple de $H_i(j)$ montrant que $H_i(j)$ est dans $\mathbb{Z}$. On distinguera les trois cas : $j < 0$, puis $0 \leqslant j \leqslant i-1$ et $j \geqslant i$.

Polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Z}$.

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. On décompose P sur $(H_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ ainsi : $P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i$.

5. Vérifier l'égalité suivante : $\begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = M_n^\top \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
6. Établir : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $a_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}\binom{i}{j} P(j)$. Si $i \geqslant n+1$, que vaut $\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}\binom{i}{j} P(j)$?
7. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$$\text{(a) } \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(i) \in \mathbb{Z}, \quad \text{(b) } \forall i \in [\![0,n]\!],\ a_i \in \mathbb{Z}, \quad \text{(c) } P(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}.$$

En particulier les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Z}$ sont les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des polynômes de Hilbert.

Description des suites de la forme $(P(j))_{j\in\mathbb{N}}$ où P est un polynôme.

8. Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) il existe $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \mathbb{N}$, $u_j = P(j)$;
   (b) pour tout entier $i \geqslant n+1$, on a : $\displaystyle\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}u_j = 0$.

Deuxième partie – Quelques propriétés des séries entières

Dans toute cette partie, on fixe $R \in]0,+\infty]$, une fonction f dans E_R, un nombre complexe ω dans D_R et enfin un réel r dans $]|\omega|, R[$. Pour tout z dans D_R, on écrit donc :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

où la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à R. Pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on note $f^{(k)}$ la fonction définie pour $z \in D_R$ par :

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k}.$$

Représentation intégrale de $f(\omega)$ à partir des valeurs de f sur C_r.

9. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(re^{it}\right)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t = 2\pi a_p r^p$.
10. Montrer : $\displaystyle f(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}-\omega} f\left(re^{it}\right)\frac{dt}{2\pi}$.

Principe du maximum.

11. Justifier la définition de : $M_f(r) = \max\limits_{z\in C_r}|f(z)|$.
12. Montrer : $|f(\omega)| \leqslant \dfrac{r}{r-|\omega|}M_f(r)$.
13. Montrer : $|f(\omega)| \leqslant M_f(r)$.
    Indication : si $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on pourra appliquer, en le justifiant, le résultat de la question 12 à f^p puis faire tendre p vers $+\infty$.

Division de $f(z) - f(\omega)$ par $z-\omega$ pour f dans E_R.

14. Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant j+1} a_n\omega^{n-1-j}$. On pose : $\displaystyle b_j = \sum_{n=j+1}^{+\infty} a_n\omega^{n-1-j}$.
15. Montrer : $b_j = \underset{j\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{r^j}\right)$.
16. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} b_j z^j$ est supérieur ou égal à R.

    Pour tout $z \in D_R$, on pose alors : $\displaystyle g(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j$. Vérifier : $\forall z \in D_R, (z-\omega)g(z) = f(z) - f(\omega)$.

Minoration de $M_f(r)$ à l'aide des zéros de f.

On suppose que $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et que f s'annule en p points distincts $z_1,\dots,z_p$ de $\overline{D_r}\setminus\{0\}$.

17. Montrer qu'il existe F dans E_R telle que :

$$\forall z \in D_R, \quad F(z)\prod_{j=1}^{p}(z-z_j) = f(z)\prod_{j=1}^{p}\left(r^2-\overline{z_j}z\right).$$

18. Si $j \in [\![1,p]\!]$ et $z \in C_r \setminus \{z_j\}$, que vaut $\left|\dfrac{r^2-\overline{z_j}z}{z-z_j}\right|$?

19. En appliquant la question 13 à F au point $\omega = 0$, montrer :

$$M_f(r)\cdot\left|\prod_{j=1}^{p} z_j\right| \geqslant |f(0)|r^p.$$

20. On suppose l'existence de $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que : $f(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$. Montrer :

$$M_f(r)\cdot\left|\prod_{j=1}^{p} z_j\right| \geqslant \frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!}r^{p+k}.$$

Étude asymptotique d'une fonction entière nulle sur $\mathbb{N}$.

21. On suppose que $R = +\infty$, que $c \in \,]0,e[$, que la fonction f est nulle sur $\mathbb{N}$ et enfin que : $M_f(r) = \underset{r\to+\infty}{O}(c^r)$. Montrer : $f = 0$.

Indication : supposer que $f \neq 0$, appliquer la question 20 avec $k = \min\left\{i \in \mathbb{N} \mid f^{(i)}(0) \neq 0\right\}$, le réel $r = p$ et $z_1 = 1, \ldots, z_p = p$, puis faire tendre p vers $+\infty$.

Troisième partie – Théorème de Pólya

Soit f dans E_∞. Soient $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et r un réel tel que $r > n$.

Majoration de $\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{(k)}\right|$.

22. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F_n = \frac{n!}{X(X-1)\cdots(X-n)}.$$

23. À l'aide de la question 10, montrer :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{n!f\left(re^{it}\right)}{\left(re^{it}-1\right)\cdots\left(re^{it}-n\right)}\frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k).$$

24. Montrer :

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k)\right| \leqslant \frac{n!M_f(r)}{(r-1)\cdots(r-n)}.$$

Preuve du théorème.

On suppose ici :

(a) l'inclusion : $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Z}$;

(b) la comparaison locale : $M_f(r) = \underset{r\to+\infty}{o}\left(\dfrac{2^r}{\sqrt{r}}\right)$.

On va démontrer que f est polynomiale (théorème de Pólya).

25. En appliquant la question 24 à $r = 2n+1$, prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N, \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k) = 0.$$

26. À l'aide des questions 8 et 21, montrer le résultat désiré.

N.B. L'exemple de $f : z \mapsto 2^z$ montre que la condition asymptotique (b) n'est pas loin d'être optimale.