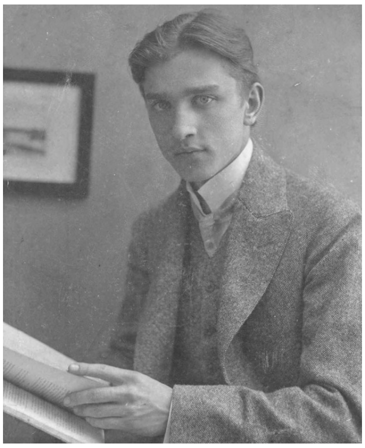
Chapitre VI — Topologie des espaces vectoriels normés

Bernard Bolzano
(1781–1848)

Rudolph Lipschitz
(1832–1903)



Stefan Banach
(1892–1945)

Un analyste, las des mondes uniformes,
Sait qu'il ne peut voguer sur un globe inédit
Qu'en sondant les tréfonds d'un ouvrage érudit :
Il y trouve avec joie un million de normes.

Alors il s'enhardit et tonne des réformes :
« La boule est un carré ! » Mais quel étrange édit !
Au fur de ses humeurs l'univers s'agrandit,
Les soleils sont petits et les grains sont énormes.

Mais vain est son espoir de trouver du nouveau,
Dans nos dimensions toute norme se vaut :
Qui converge pour l'une est convergent pour l'autre.

Ainsi, lorsqu'il comprend que chaque effort savant
Ne produit qu'un espace en tout semblable au nôtre,
Il se dit : « Que c'est beau ! Mais que c'est décevant ! »
(Jean de La Ceppède)

Comment lire ce livret

À la signalétique habituelle, je rajoute ce symbole :

✎ : propositions que je n'écrirai pas au tableau en classe : se reporter à l'annexe de ce livret pour leurs énoncés.

Révisions attendues

1. Cours d'analyse de 1re année : propriétés de base des suites réelles ou complexes. Théorème de Bolzano-Weierstraß et ses applications (théorème des bornes atteintes et théorème de Heine en particulier).
2. Chapitre préliminaire : convergence uniforme des suites de fonctions. Pratiquer l'étude de la convergence uniforme. Théorème d'interversion limite-intégrale dans le cas d'un segment.
3. Résultats de densité dans $\mathbb{R}$ (rationnels), dans les espaces de fonctions (fonctions en escalier, théorème d'approximation de Weierstraß) et dans $\mathrm{M}_n(K)$ (matrices inversibles). Applications : revoir les exercices et devoirs de début d'année.

Motivation

L'objectif du chapitre est d'étendre à la dimension supérieure toutes les notions classiques d'analyse (à commencer par la notion de limite et de continuité). Comme, en analyse réelle, les propriétés d'une fonction dépendent grandement de son ensemble de départ (est-ce un intervalle ? un segment ?), il en sera de même en dimension supérieure. Mais encore faut-il trouver des analogues en toute dimension des intervalles, des segments, etc.

Notations. Dans l'intégralité de ce cours, la lettre K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Néanmoins la définition de norme vaudrait pour n'importe quel sous-corps de $\mathbb{C}$.

Hormis dans la définition d'un espace métrique, l'ensemble E désignera un K-espace vectoriel.

1 Analyse en dimension supérieure : premiers pas

1.1 Norme sur un espace vectoriel

Définition 1 (Espace métrique)**.**

Définition 2 (Norme, espace vectoriel normé)**.**

Remarque. Définition d'une pseudo-norme.
Remarque. Vecteurs unitaires.
Remarque. Sens réciproque de la deuxième propriété.
Remarque. Égalité $\mathrm{N}(-\vec{x}) = \mathrm{N}(\vec{x})$.

Proposition 3 (Distance associée à une norme)**.**

Proposition 4 (Inégalité triangulaire renversée)**.**

Proposition 5 (Norme euclidienne associée à un produit scalaire)**.**

Proposition 6 (Normes usuelles sur un espace vectoriel de dimension finie)**.**

Remarque. Cas de la dimension 1.

Proposition 7 (Normes usuelles sur des espaces vectoriels de fonctions)**.**

Exemple 1. Normes sur des espaces de suites. ♡

Exemple 2. Exemples de normes sur $K[X]$.

Définition 8 (Produit fini d'espaces vectoriels normés)**.**

Exemple 3. Norme sur $\mathrm{L}(E)$ avec E de dimension finie.

Définition 9 (Norme d'algèbre)**.**

Exemple 4. Normes d'algèbre sur $\mathrm{M}_n(K)$.

1.2 Premières définitions issues de la notion de distance

Définition 10 (Boule ouverte, boule fermée, sphère)**.**

Remarque. Relation entre $\mathrm{B}(\vec{a}, r)$, $\mathrm{B}_f(\vec{a}, r)$ et $\mathrm{S}(\vec{a}, r)$.

Exemple 5. Boules dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6. Sphères unités dans $\mathbb{R}^2$ pour $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exemple 7. Boule ouverte dans $(\mathrm{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Définition 11 (Partie bornée).

Proposition 12 (Les boules ouvertes, fermées et les sphères sont bornées).

Remarque. Montrer qu'un ensemble n'est pas borné.

Exemple 8. Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension non nulle n'est pas borné. ♡

Définition 13 (Suite bornée, fonction bornée).

Exemple 9. Exemple dans $K[X]$: le fait d'être borné dépend de la norme.

Proposition 14 (Équivalence des normes usuelles).

Remarque. Tous ces encadrements sont optimaux.

Définition 15 (Normes équivalentes).

1.3 Convergence d'une suite

Définition 16 (Convergence d'une suite et limite).

Remarque. Convergence au sens des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Proposition 17 (Unicité de la limite).

Notations. *La* limite est donc correctement définie.

Exemple 10. Convergence de la suite $\left(f_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{cases}\right)_{n\geqslant 0}$ pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Remarque. Anticipation sur le théorème de Riesz.

Proposition 18 (Les isométries vectorielles préservent la notion de convergence).

Proposition 19 (Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini).

Exemple 11. En dimension finie : limite composante par composante.

Proposition 20 (Opérations élémentaires sur les limites).

Proposition 21 (Une suite convergente est bornée).

Définition 22 (Valeur d'adhérence d'une suite).

Proposition 23 (Toute suite extraite d'une suite convergente a même limite).

Proposition 24 (Continuité séquentielle de la norme).

1.4 Séries vectorielles

Définition 25 (Série, convergence (absolue ou non) d'une série, somme et restes).

Proposition 26 (Extension des propriétés de base des séries numériques).

1.5 Espaces complets

Définition 27 (Suite de Cauchy, espace complet, espace de Banach).

Exemple 12. Exemples d'espaces complets et d'un espace qui ne l'est pas.

Proposition 28 (Propriétés de base d'une suite de Cauchy).

Proposition 29 (Dans un espace de Banach, la convergence absolue implique la convergence).

2 Notion de voisinage et de limite d'une fonction

2.1 Adhérence et intérieur d'une partie, parties ouvertes ou fermées

Définition 30 (Voisinage)**.**

Définition 31 (Partie ouverte, partie fermée)**.**

Remarque. Un ouvert est le complémentaire d'un fermé.

Proposition 32 (Caractérisation des fermés)**.**

Exemple 13. Ouverts et fermés triviaux.

Corollaire 33 (Les boules fermées sont des fermés, les boules ouvertes sont des ouverts)**.**

Corollaire 34 (Les intervalles fermés sont fermés, les intervalles ouverts sont ouverts)**.**

Proposition 35 (Stabilité par produit, réunion et intersection des ouverts et fermés)**.**

Remarque. Contredire le fait qu'un ensemble soit fermé, soit ouvert.
Remarque. Contre-exemple : intersections infinies de fermés, réunions infinies d'ouverts.
Remarque. Dans un fermé de $\mathbb{R}$, la borne supérieure est atteinte.

Mise en garde 1. On peut être ni ouvert ni fermé.

Définition 36 (Intérieur, adhérence, frontière)**.**

Proposition 37 (Propriétés de base de l'adhérence et de l'intérieur)**.**

Remarque. Les dernières inclusions ne sont pas des égalités.

Proposition 38 (Caractérisation des points intérieurs, des points adhérents)**.**

Proposition 39 (Adhérence d'une boule ouverte et intérieur d'une boule fermée)**.**

Exemple 14. Intérieur d'un sous-espace vectoriel strict. ♡

2.2 La topologie trace

Définition 40 (Topologie trace : ouverts et fermés relatifs, voisinages relatifs)**.**

Proposition 41 (Caractérisation en termes d'intersection)**.**

Exemple 15. Un fermé relatif de $\mathbb{R}_+^*$.

2.3 Limite, continuité d'une fonction

Définition 42 (Limite d'une fonction)**.**

Théorème 43 (Caractérisation séquentielle de la limite)**.**

Exemple 16. Étude de $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ quand $(x,y) \to (0{,}0)$.

Mise en garde 2. Et pourtant ! Quand on fait $x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, *puis* $y \xrightarrow[y\to 0]{} 0$, on a $f(x,y) \to 0$: on est tenté de penser que la limite en (0,0) est 0.

ON N'A PAS EN GÉNÉRAL $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$ **!**

Proposition 44 (Une fonction ayant une limite en un point est bornée à son voisinage).

Proposition 45 (Composition des limites).

Proposition 46 (Opérations sur les limites).

Exemple 17. Limite en (0,0) de l'application $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. → ex. 21

Définition 47 (Continuité en un point, sur une partie).

Théorème 48 (Caractérisation séquentielle de la continuité).

Proposition 49 (Opérations sur les fonctions continues).

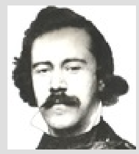
Proposition 50 (Composition des fonctions continues).

Proposition 51 (Limite d'une fonction à valeurs dans un produit fini).

Définition 52 (Uniforme continuité).

Proposition 53 (L'uniforme continuité implique la continuité).

Définition 54 (Fonction lipschitzienne).


1832 – 1903

Proposition 55 (Une application lipschitzienne est uniformément continue).

Exemple 18. L'application $\vec{x} \mapsto \mathrm{d}(A, \vec{x})$ avec A une partie non vide de E.

Remarque. Composer par une isométrie préserve la continuité.

Corollaire 56 (Continuité de la norme).

Proposition 57 (Caractérisation des applications linéaires continues).

Définition-Proposition 58 (Norme subordonnée d'une application linéaire continue).

Exemple 19. L'opérateur intégral $(\mathrm{C}^0([a,b],K), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathrm{C}^0([a,b],K), \|\cdot\|_\infty)$.

Exemple 20. La dérivation n'est pas continue sur $(\mathrm{C}^\infty([0,1],K), \|\cdot\|_\infty)$.

Proposition 59 (Continuité des applications linéaires sur $(E, \|\cdot\|_1)$).

Corollaire 60 (Continuité sur $(K^n, \|\cdot\|_1)$ des applications polynomiales).

Exemple 21. Continuité de l'application $(x,y) \mapsto \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. ← ex. 17

Remarque. On peut se ramener à K^n *via* isométrie pour reconnaître des applications polynomiales.

Exemple 22. Continuité du déterminant et de $A \mapsto A^{-1}$.

Exemple 23. Continuité de la multiplication matricielle. Convergence de la suite $(A^n)_{n\geqslant 0}$.

Proposition 61 (Condition nécessaire et suffisante pour qu'une application multilinéaire soit continue)**.**

Exemple 24. Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur un espace préhilbertien $(E, \| \cdot \|_2)$. ♡

Proposition 62 (Toute application multilinéaire en dimension finie est continue)**.**

Proposition 63 (Caractérisation de la continuité par les images réciproques)**.**

Exemple 25. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$. ♡

Exemple 26. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(K)$ est ouvert dans $\mathrm{M}_n(K)$. ♡

Exemple 27. L'ensemble $A = \{f \in \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [0,1], f(x) \geqslant 0\}$ est fermé.

3 La topologie : ou comment l'ensemble de départ conditionne les propriétés d'une fonction continue

3.1 Parties denses

Définition 64 (Partie dense).

Exemple 28. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$. Sous-groupes de $\mathbb{R}$.

Exemple 29. Densité des fonctions en escalier et polynomiales pour la norme infinie.

Exemple 30. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(K)$ est dense dans $\mathrm{M}_n(K)$. ♡

Proposition 65 (Fonctions continues coïncidant sur une partie dense).

3.2 Généraliser les intervalles : convexité, connexité par arcs

Définition 66 (Chemins, parties connexes par arcs, composantes connexes par arcs).

Lors de l'étude de la connexité par arcs, un dessin pertinent peut valoir preuve.

Exemple 31. Le plan complexe privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs. ♡

Exercice 1. L'objectif de l'exercice est de formaliser l'argument de l'exemple 31. Soient X une partie finie de $\mathbb{C}$ et $(\omega_1, \omega_2) \in (\mathbb{C} \setminus X)^2$.

1. Justifier l'existence d'un nombre complexe non nul z_1 tel que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\omega_1 + tz_1 \notin X$.
2. Justifier l'existence d'un nombre complexe $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}z_1$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\omega_2 + tz_2 \notin X$.
3. Montrer : $(\omega_1 + \mathbb{R}z_1) \cap (\omega_2 + \mathbb{R}z_2) \neq \emptyset$. En considérant ω_3 dans cette intersection, construire un chemin $\gamma : [0,1] \to C \setminus X$ tel que : $\gamma(0) = \omega_1$, et : $\gamma(1) = \omega_2$.

Définition 67 (Segment, convexité).

Exemple 32. Un espace vectoriel est convexe. ♡

Proposition 68 (Convexité des boules).

Remarque. La sphère $\mathrm{S}(\vec{a}, r)$ n'est certainement pas convexe pour $r > 0$!

Proposition 69 (Les parties étoilées sont connexes par arcs).

Exemple 33. Exemple de partie étoilée (donc connexe) non convexe.

Proposition 70 (Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles).

Proposition 71 (Image directe d'un connexe par arcs par une fonction continue).

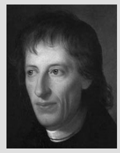
Remarque. On retrouve le théorème des valeurs intermédiaires.

Exemple 34. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs mais $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ l'est.

Définition 72 (Partie connexe).

Proposition 73 (Les parties connexes par arcs sont connexes).

3.3 Généraliser les segments : compacité



1781 – 1848

Définition 74 (Partie compacte)**.**

Exemple 35. Les segments de $\mathbb{R}$ sont des compacts.

Proposition 75 (Théorème de Heine)**.**

Proposition 76 (Suites à valeurs dans un compact ayant une seule valeur d'adhérence)**.**

Proposition 77 (Image directe d'un compact par une fonction continue)**.**

Corollaire 78 (Théorème des bornes atteintes)**.**

Exemple 36. La distance à un fermé est toujours atteinte. ♡

Proposition 79 (Les compacts sont fermés et bornés)**.**

Exemple 37. La réciproque est fausse. Contre-exemple dans $(\mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Proposition 80 (Fermé relatif d'un compact)**.**

Théorème 81 (Produit fini de compacts)**.**

Théorème 82 (En dimension FINIE, les fermés et bornés sont compacts)**.**

4 Équivalence des normes

4.1 Propriétés topologiques invariantes par changement de norme

Proposition 83 (Des normes équivalentes donnent la même topologie)**.**

Remarque. Le majorant d'une partie bornée dépend de la norme.
Remarque. Une inégalité, c'est mieux que rien.
Remarque. Montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.

Exemple 38. Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathrm{C}^0([a,b],K)$.

4.2 Théorème de Riesz et conséquences

Théorème 84 (Équivalence des normes en dimension finie)**.**

Corollaire 85 (Très nombreuses conséquences sur le caractère borné, la continuité, le calcul de limites, etc.)**.**

Corollaire 86 (Un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé)**.**

Exemple 39. Contre-exemple en dimension infinie.

Corollaire 87 (Suite bornée ayant une seule valeur d'adhérence)**.**

Théorème 88 (Tout espace vectoriel de dimension finie est complet)**.**

Corollaire 89 (En dimension finie, la convergence absolue implique la convergence)**.**

Exemple 40. Convergence et somme des séries $\sum_{n\geqslant 0} A^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}A^n$ dans $\mathrm{M}_p(K)$.

Exercice 2.

1. Utiliser cet exemple pour redémontrer que $\mathrm{GL}_p(K)$ est ouvert dans $\mathrm{M}_p(K)$.
2. Justifier que les sommes de ces deux séries (lorsqu'elles convergent) sont des polynômes en A.

— Fin du chapitre VI —

Annexe

Définition 25. *Soit* $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite à valeurs dans* E*. Alors :*

(a) *On appelle* série de terme général $\vec{u}_n$ *la suite* $\left(\sum_{n=0}^{N} \vec{u}_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$*. On la note* $\sum_{n\geqslant 0} \vec{u}_n$ *ou* $\sum \vec{u}_n$*.*

(b) *La somme* $\sum_{n=0}^{N} \vec{u}_n$ *est appelée* somme partielle d'indice N *de cette série.*

(c) *On dit que la série* $\sum_{n\geqslant 0} \vec{u}_n$ converge *dans* $(E, \|\cdot\|)$ *si la suite des sommes partielles converge dans* $(E, \|\cdot\|)$*.*

(d) *Lorsque la série* $\sum_{n\geqslant 0} \vec{u}_n$ *converge, la* somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \vec{u}_n$ *de cette série est par définition sa limite, c'est-à-dire :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \vec{u}_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \vec{u}_n,$$

et le reste d'indice N *de cette série est par définition :*

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \vec{u}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \vec{u}_n - \sum_{n=0}^{N} \vec{u}_n.$$

(e) *On dit que la série* $\sum_{n\geqslant 0} \vec{u}_n$ *converge absolument si la série à termes positifs* $\sum_{n\geqslant 0} \|\vec{u}_n\|$ *converge.*

Proposition 26. *Soient* $\sum_{n\geqslant 0} \vec{u}_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} \vec{v}_n$ *deux séries convergentes dans* $(E, \|\cdot\|)$*. Soit* $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* E*. Alors :*

(a) *La suite* $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ *converge vers* $\vec{0}$ *dans* $(E, \|\cdot\|)$*, c'est-à-dire :* $\lim_{n\to+\infty} \vec{u}_n = \vec{0}$ *(ce qui justifie qu'on parle de* divergence grossière *lorsque le terme général d'une série ne converge pas vers* $\vec{0}$*).*

(b) *La suite des restes converge vers* $\vec{0}$ *dans* $(E, \|\cdot\|)$*, c'est-à-dire :* $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \vec{u}_n = \vec{0}$*.*

(c) *Pour tout* $(\alpha, \beta) \in K^2$*, la série* $\sum_{n\geqslant 0} (\alpha\vec{u}_n + \beta\vec{v}_n)$ *converge et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha\vec{u}_n + \beta\vec{v}_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \vec{u}_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} \vec{v}_n.$$

(d) *La série télescopique* $\sum_{n\geqslant 0} (\vec{a}_{n+1} - \vec{a}_n)$ *converge dans* $(E, \|\cdot\|)$ *si et seulement si la suite* $(\vec{a}_n)_{n\geqslant 0}$ *converge dans* $(E, \|\cdot\|)$*, et le cas échéant :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\vec{a}_{n+1} - \vec{a}_n) = \lim_{n\to+\infty} \vec{a}_n - \vec{a}_0. \qquad \text{(lien suite-série)}$$

Démonstration. Démonstration analogue au cas réel ou complexe. □

Proposition 44. *Soit* $f : X \to F$ *une application ayant une limite finie en* $\vec{a} \in X$*. Alors* f *est bornée au voisinage de* $\vec{a}$*.*

Démonstration. Même démonstration que dans le cas réel ou complexe. □

Proposition 45. *Soient Y une partie de F, $(G, \|\cdot\|_G)$ un espace vectoriel normé, et $f : X \to F$, $g : Y \to G$ deux applications. On suppose que $f(X) \subseteq Y$, de sorte que $g \circ f : X \to G$ soit bien définie. Soit $\vec{a} \in \bar{X}$. Si : $\lim\limits_{\vec{a}} f = \vec{b} \in \bar{Y}$, et : $\lim\limits_{\vec{b}} g = \vec{c}$, alors $\lim\limits_{\vec{a}} g \circ f = \vec{c}$.*

Démonstration. Même démonstration que dans le cas réel ou complexe. □

Proposition 46. *Soient $f, g : X \to F$ deux applications ; soit $\vec{a} \in E$ un vecteur adhérent à X. On suppose que $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L}$ et $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x}) = \vec{L}'$. Alors :*

- *on a : $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \vec{L} + \vec{L}'$;*
- *pour tout $\lambda \in K$, on a : $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \lambda f(\vec{x}) = \lambda \vec{L}$;*
- *on a : $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \|f(\vec{x})\| = \|\vec{L}\|$;*
- *si $F = K$, alors : $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) = L \cdot L'$;*
- *si $F = \mathbb{R}$ et si : $f \leqslant g$ dans un voisinage de $\vec{a}$, alors : $L \leqslant L'$;*
- *si $F = \mathbb{R}$, si $L = L'$, et si pour une fonction $h : A \to \mathbb{R}$ on a $f \leqslant h \leqslant g$ dans un voisinage de $\vec{a}$, alors : $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} h(\vec{x}) = L$ (théorème des gendarmes).*

Démonstration. Même démonstration que dans le cas réel ou complexe. □

Théorème 48. *Soit $f : X \to F$ une application. Si $\vec{a} \in X$, la fonction f est continue en $\vec{a}$ si et seulement si pour toute suite $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans X qui converge vers $\vec{a}$, la suite $(f(\vec{u}_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(\vec{a})$.*

Démonstration. Même démonstration que dans le cas réel ou complexe. □

Proposition 49. *Soient $f, g : X \to F$ deux applications continues en $\vec{a} \in X$. Alors,*

- *pour tous scalaires $\alpha, \beta \in K$, l'application $\alpha f + \beta g$ est continue en $\vec{a}$ (donc $\mathrm{C}^0(X, F)$ est un espace vectoriel) ;*
- *si $F = K$, alors $f \cdot g$ est continue en $\vec{a}$ (donc $\mathrm{C}^0(A, K)$ est une K-algèbre) ;*
- *si $F = K$, et si $g(\vec{a}) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en $\vec{a}$.*

Démonstration. Mêmes démonstrations que dans le cas réel ou complexe. □

Proposition 50. *Soient Y une partie de F, $(G, \|\cdot\|_G)$ un espace vectoriel normé, et $f : X \to F$, $g : Y \to G$ deux applications. On suppose que $f(X) \subseteq Y$, de sorte que $g \circ f : X \to G$ soit bien définie.*

Si f est continue en $\vec{a} \in X$ et g continue en $f(\vec{a})$, alors $g \circ f : X \to G$ est continue en $\vec{a}$.

Démonstration. Même démonstration que dans le cas réel ou complexe. □

Définition 52. *Soit $f : X \to F$ une application. On dit qu'elle est* uniformément continue *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in X^2,\ \|\vec{x} - \vec{y}\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 53. *Une application uniformément continue est continue.*

Démonstration. Même démonstration que dans le cas réel ou complexe. □

Table des matières