Du cours aux exercices (Savoir-faire à vérifier)

Chapitre VII — Suites et séries de fonctions

Les principaux acquis à vérifier sont :

Convergence des séries de fonctions.

✓ 1. Étudier la convergence simple, uniforme ou normale d'une série de fonctions explicite. (🗎) ☐

On veillera à revoir également ces acquis du chapitre préliminaire (je vous y renvoie pour les exemples) :

Convergence des suites de fonctions.

✓ 1. Étudier la convergence simple ou uniforme d'une suite de fonctions explicite. (🗎) ☐

★ 2. Montrer une implication du type : « $(\spadesuit)_n$ CVU $\Longrightarrow (\clubsuit)_n$ CVU ». ☐

☢ 3. Montrer une implication du type : « $(\clubsuit)_n$ CVS + Hypothèse $\Longrightarrow (\clubsuit)_n$ CVU ». (🗎) ☐

Interversions de symboles.

✓ 1. Montrer la continuité ou la dérivabilité d'une somme de série de fonctions. Calculer une limite. ☐

✓ 2. Calculer une intégrale en développant en série l'intégrande. Intervertir $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_I$. (🗎 **C**) ☐

★ 3. Obtenir un équivalent d'une somme de série de fonctions en une extrémité de son intervalle de définition. (🗎) ☐

On veillera à revoir également ces acquis du chapitre I (je vous y renvoie pour les exemples) :

✓ 4. Utiliser la continuité d'une intégrale à paramètre pour étendre son expression. ☐

★ 5. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_J f_n(t)\mathrm{d}t$ ou $\lim_{x\to a} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ avec un théorème d'interversion. (🗎 **C**) ☐

★ 6. Démontrer la continuité ou dérivabilité d'une intégrale à paramètre, et donner sa dérivée le cas échéant. (🗎) ☐

L'icône « (🗎) » signifie que les documents *Méthodes* donnent des compléments sur ces savoir-faire.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices exerçant à ce savoir-faire.

Séries de fonctions.

✓ Étudier la convergence simple, uniforme ou normale d'une série de fonctions explicite.

Exemples. Pour chacune des séries de fonctions ci-dessous, étudier chacun des trois modes de convergence possibles ; d'abord sur tout l'intervalle de définition, puis sur des segments si la convergence n'est pas vérifiée sur tout l'intervalle :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(f_n : \begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \dfrac{x}{n(1+n^2x^2)}\end{cases}\right)$, (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(g_n : \begin{cases}\mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \dfrac{n^2}{e^{nx}}\end{cases}\right)$,

(c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(h_n : \begin{cases}\mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \dfrac{(-1)^n}{1+nx}\end{cases}\right)$, (d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left(j_n : \begin{cases}[1,+\infty[& \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^n\ln(n)}\end{cases}\right)$,

(e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(k_n : \begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right)\end{cases}\right)$, (f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\ell_n : \begin{cases}[0,1] & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}-\dfrac{x^{n+1}}{2n+2}\end{cases}\right)$.

Les deux dernières séries sont plus subtiles à étudier.

Interversions de symboles.

✓ Montrer la continuité ou la dérivabilité d'une somme de série de fonctions. Calculer une limite.

Exemples.

1. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)$ est définie et de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$.
2. Calculer :

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{e^{nx}+1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(n+x)}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ (☢).

✓ Calculer une intégrale en développant en série l'intégrande. Intervertir $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\displaystyle\int_I$.

Exemples. Montrer les identités suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-\pi x}}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(\pi n+1)^2}$, (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)2^{3n+1}}$, (c) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$,

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$, (e) $\displaystyle\int_0^1\exp(t)\ln(t)\mathrm{d}t=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!n}$.

★ Obtenir un équivalent d'une somme de série de fonctions.

Exemples.

1. Donner un équivalent asymptotique simple des sommes suivantes (on admet : $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$) :

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(n+x)}$ quand $x\to+\infty$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n^2}$ quand $x\to 1^-$,

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n(n+x)}$ quand $x\to 0$, (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n(n+x)}$ quand $x\to+\infty$.

2. Montrer l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}=a+\frac{b}{\sqrt{x}}+\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Convergence des séries de fonctions.

✓ Étudier la convergence simple, uniforme ou normale d'une série de fonctions explicite. ☐

Réponse.

(a) La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$|f_n(x)| = \frac{n|x|}{n^2(1+n^2x^2)} \leqslant \frac{\frac{1}{2}\left(1+n^2|x|^2\right)}{n^2(1+n^2x^2)} = \frac{1}{2n^2},$$

donc $0 \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty$ également. La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge donc aussi uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$.

(b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|g_n\|_\infty = \lim_{x\to 0} n^2 e^{-nx} = n^2$ (par décroissance de $x \mapsto e^{-nx}$), donc $(g_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle et la série $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ ne converge pas uniformément ni normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ (« grossièrement »). En revanche elle converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, par exemple *via* la règle de D'Alembert.

On peut montrer qu'il y a convergence normale (et donc uniforme et simple) sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, en utilisant l'égalité $\|g_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = n^2 e^{-na}$ et le théorème des croissances comparées (ou la règle de D'Alembert) pour en déduire la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \|g_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$.

(c) Pour tout $x > 0$ la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{1+nx}$ vérifie le théorème spécial des séries alternées (vérification facile), donc converge. Ceci montre la convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} h_n$.

En revanche la convergence n'est pas uniforme (ni normale, donc) sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, dans le cas contraire, par le théorème de la double limite la série $\sum_{n\geqslant 0} \lim_0 h_n = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$ convergerait, ce qui est bien sûr faux. Toutefois, pour tout $a > 0$ il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, puisque par le théorème spécial des séries alternées on a aussi :

$$\forall N \geqslant 1,\ \forall x \geqslant a, \quad |R_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx} \right| \leqslant \frac{1}{1+(N+1)x} \leqslant \frac{1}{1+(N+1)a}.$$

On en déduit : $\|R_N\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{1+(N+1)a} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

La convergence n'est pas normale, même sur $[a, +\infty[$, puisque :

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = |f_n(a)| = \frac{1}{1+(n+1)a} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{na}$$

et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

(d) Soit $x \in [1, +\infty[$. Si $x = 1$ la série $\sum_{n\geqslant 2} j_n(1) = \sum_{n\geqslant 2} 0$ converge trivialement. Supposons donc $x > 1$. On a, pour tout n au voisinage de l'infini :

$$\frac{j_{n+1}(x)}{j_n(x)} = \frac{1}{x} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x} < 1,$$

donc par la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 2} j_n(x)$ converge pour tout $x > 1$. Ceci prouve la convergence simple de la série $\sum_{n\geqslant 2} j_n$ sur $[1, +\infty[$. En revanche la convergence n'est pas normale sur $[1, +\infty[$, puisque :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \|j_n\|_\infty \geqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \left| j_n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ln(n)},$$

et on a : $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{en\ln(n)} > 0$: terme général d'une série divergente (on le démontre *via* une comparaison série-intégrale : une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(\ln(x))$, qui tend vers l'infini en l'infini). Il y a cependant convergence normale sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 1$ (montrer, *via* une étude de variation, que pour tout n suffisamment grand le maximum de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^n}$ est en a, et montrer alors la convergence de la série $\sum_{n\geqslant n_0} \dfrac{\ln(a)}{a^n\ln(n)}$ avec la règle de D'Alembert comme ci-dessus), et il y a convergence uniforme sur $[1, +\infty[$. En effet, pour tout N au voisinage de l'infini et tout $x \geqslant 1$ on a :

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} j_n(x)\right| \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(N+1)} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{\ln(x)}{\ln(N+1)} \frac{1}{x^{N+1}\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln(x)}{x^N(x-1)\ln(N+1)} \leqslant \frac{1}{\ln(N+1)},$$

en utilisant les majorations $\ln(x) \leqslant x-1$ et $\frac{1}{x^N} \leqslant 1$. Donc :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left\|\sum_{n=N+1}^{+\infty} j_n\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{\ln(N+1)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $[1, +\infty[$.

(e) Il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$, puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} |k_n(x)|$ ne converge pas absolument hormis pour $x = 0$. On a en effet : $|k_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\dfrac{x}{1+x^2} > 0$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge. Ce même argument démontre qu'il n'y a pas convergence normale sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$.

Il y a en revanche convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, mais il faut un peu travailler pour le démontrer. Le théorème spécial des séries alternées s'applique peut-être, mais il faut du courage pour montrer la décroissance de $\left(\left|\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right)\right|\right)_{n\geqslant 1}$! Inspirons-nous plutôt de ce qu'on fait pour des séries numériques en pareille circonstance, pour étudier la convergence : un développement asymptotique du terme général afin de l'écrire comme somme de séries plus simples à étudier. Seulement les développements asymptotiques donnent des comparaisons locales, alors que la convergence uniforme nécessite des majorations globales ; c'est la formule de Taylor avec reste intégral qui permet d'expliciter les termes d'erreur et d'avoir surtout des égalités valables globalement. On y recourt donc ici. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, notons : $R_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right) - \dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad k_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} + R_n(x).$$

Par les arguments classiques, la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(x \mapsto \dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ (théorème spécial des séries alternées ; noter que $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est majoré sur $\mathbb{R}$ par $\dfrac{1}{2}$ en valeur absolue). Étudions la convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} R_n$. Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout $u \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$|\ln(1+u) - u| = \left| u^2 \int_0^1 (1-t)\ln''(1+tu)\mathrm{d}t \right| \leqslant u^2 \int_0^1 \frac{1-t}{(1+tu)^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{u^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = 2u^2,$$

donc, en posant $u = \dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{2x^2}{n^2(1+x^2)^2} \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$. On en déduit : $\sum_{n=1}^{+\infty} \|R_n\|_\infty \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2n^2} < +\infty$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} R_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$.

En tant que somme de deux séries uniformément convergentes, la série $\sum_{n\geqslant 1} k_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$: d'où le résultat.

(f) Il y a convergence normale sur tout segment de la forme $[0, a]$ avec $a \in [0{,}1[$; soit par les théorèmes généraux sur les séries entières (chapitre VIII), soit tout simplement en remarquant que l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \|\ell_n\|_{\infty,[0,a]} \leqslant 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n+1} = \dfrac{2a}{1-a} < +\infty$. Cela prouve par ailleurs la convergence uniforme et simple sur ces mêmes segments, et donc la convergence simple sur $[0{,}1[$. Il y a aussi convergence simple sur $[0{,}1]$, puisque pour $x = 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \ell_n(1) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} &= \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=N+1}^{2N+1} \frac{1}{n} - \frac{1}{2(N+1)}.\end{aligned}$$

Une comparaison entre série et intégrale (ou l'utilisation de la constante d'Euler pour effectuer un développement asymptotique de la série harmonique) permet de démontrer que :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{2N+1} \frac{1}{n} = \lim_{N\to+\infty} \int_N^{2N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lim_{N\to+\infty} \ln\left(\frac{2N+1}{N}\right) = \ln(2).$$

On en déduit la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \ell_n(1)$, et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n(1) = \ln(2)$.

Justifions à présent qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[0{,}1]$. Si tel était le cas, on aurait continuité en 1 de $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ en tant que limite uniforme d'une série de fonctions continues. En particulier, on aurait : $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n(x) = \ln(2)$, d'après ce qui précède. Or pour tout $x \in [0{,}1[$ on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{\ln(1-x)}{2}.$$

La première somme peut soit se calculer avec une intégration terme à terme dûment justifiée de la somme géométrique $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}\right)$, soit en utilisant le théorème de sommation par paquets avec la famille sommable $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et la partition : $\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \sqcup (2\mathbb{N}+1)$. En tous les cas, on trouve :

$$\forall x \in [0,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{\ln(1-x)}{2} = \frac{\ln(1+x)}{2},$$

donc : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n(x) = \frac{\ln(2)}{2} \neq \ln(2)$, ce qui contredit la continuité en 1 et donc la convergence uniforme sur $[0,1]$ d'après l'argument ci-dessus.

Interversions de symboles.

✓ Montrer la continuité ou la dérivabilité d'une somme de série de fonctions. Calculer une limite. ☐

Réponse.

1. Posons $f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$ pour tous $x > -1$ et $n \geqslant 1$. Montrons la régularité de f sur $]-1,+\infty[$; la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]-1,+\infty[$, car pour tout $x \in]-1,+\infty[$ on a :

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right| = \frac{|x|}{n(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|}{n^2}$$

et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge ; de plus f_n est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur tout segment $[a,b] \subseteq]-1,+\infty[$: en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $x \in [a,b]$:

$$|f_n'(x)| = \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \frac{1}{(n+a)^2},$$

donc $\|f_n'\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{(n+a)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \|f_n'\|_\infty$ converge par comparaison. D'après le théorème de dérivation terme à terme, $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur tout segment de $]-1,+\infty[$, donc sur $]-1,+\infty[$.

2. (a) Montrons la convergence uniforme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(x \mapsto \frac{1}{e^{nx}+1}\right)$ sur $[1,+\infty[$. Pour tout entier n et tout $x \in [1,+\infty[$, posons : $f_n(x) = \dfrac{1}{e^{nx}+1}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant 1, |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{e^n+1} \leqslant \dfrac{1}{e^n} = e^{-n}$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant e^{-n}$. Or la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-n}$ converge car sa raison est $e^{-1} \in]-1,1[$, donc par comparaison la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge : d'où la convergence normale, puis uniforme, de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[1,+\infty[$. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1, \end{cases}$$

donc, d'après le théorème de la double limite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = \frac{1}{2}.$

   (b) Soit $x \in [1,+\infty[$. Comme $\dfrac{1}{\sqrt{1+nx}} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ est manifestement alternée. Or la suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+nx}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (car $n \mapsto 1+nx$ et la fonction racine carrée sont croissantes), et elle converge vers 0. Donc, d'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ converge, et son reste d'indice N (noté $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$) est majoré en valeur absolue par son premier terme :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [1,+\infty[, \quad |R_N(x)| \leqslant |f_{N+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+(N+1)x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2+N}}.$$

Par propriété de la borne supérieure : $\forall N \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \|R_N\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{2+N}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{N\to+\infty} \|R_N\|_\infty = 0$. Ainsi le reste de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$ vers la fonction nulle, ce qui équivaut au fait que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1, \end{cases}$$

donc, d'après le théorème de la double limite : $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 1.$

(c) Il est certain que le théorème de la double limite ne peut pas s'appliquer ici, puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{n(n+x)} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. Nous allons nous en sortir autrement, en utilisant la positivité et la monotonie du terme général. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a, par positivité :

$$\forall N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{x}{n(n+x)}.$$

Quand $x \to +\infty$, chaque membre de cette inégalité a une limite (éventuellement infinie). Pour le membre de gauche, c'est vrai parce que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme de fonctions croissantes (la croissance se voit mieux si l'on écrit : $\frac{x}{n+x} = 1 - \frac{n}{n+x}$, et qu'on note que $x \mapsto -\frac{1}{n+x}$ s'obtient par composition de deux fonctions décroissantes). Quand $x \to +\infty$, l'inégalité ci-dessus donne :

$$\forall N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Quand $N \to +\infty$, on obtient : $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} = +\infty.$$

(d) Là encore, le théorème de la double limite ne peut pas s'appliquer à cause de la divergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$. Cependant la monotonie n'est d'aucune aide ici. On peut néanmoins conjecturer que cette limite vaut $\frac{1}{2}$, à cause de la valeur litigieuse de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ qu'on peut obtenir *via* divers arguments (moyenne de Cesàro, calcul de $\lim_{x\to-1^+} \frac{1}{1-x}$...). Ce n'est pas susceptible de marcher dès qu'on a affaire à la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$ lorsqu'on passe à la limite, mais ici cela va s'avérer fructueux.

Pour y parvenir, nous allons écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{2}$ comme somme d'une série dont le terme général décroît plus vite (accélération de convergence), de sorte à avoir la convergence uniforme. Il suffit pour cela d'écrire $\frac{1}{2}$ sous forme de somme de série, préférablement une série qui ressemble à celle ci-dessus pour que des simplifications opèrent. C'est possible en écrivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{1+(n+1)x}} \right),$$

de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \right).$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que la série ci-dessus vérifie le critère spécial des séries alternées. Le terme général converge clairement vers 0. Seule la monotonie n'est pas triviale. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} - \frac{1}{\sqrt{1+(n+2)x}} \\
\iff & \frac{\sqrt{1+(n+1)x} - \sqrt{1+nx}}{\cancel{\sqrt{1+(n+1)x}}\sqrt{1+nx}} \geqslant \frac{\sqrt{1+(n+2)x} - \sqrt{1+(n+1)x}}{\sqrt{1+(n+2)x}\cancel{\sqrt{1+(n+1)x}}} \\
\iff & \frac{x}{\sqrt{1+nx}\left(\sqrt{1+(n+1)x} + \sqrt{1+nx}\right)} \geqslant \frac{x}{\sqrt{1+(n+2)x}\left(\sqrt{1+(n+1)x} + \sqrt{1+(n+2)x}\right)} \\
\iff & \sqrt{1+nx}\left(\sqrt{1+(n+1)x} + \sqrt{1+nx}\right) \leqslant \sqrt{1+(n+2)x}\left(\sqrt{1+(n+1)x} + \sqrt{1+(n+2)x}\right).
\end{aligned}$$

Par croissance de la fonction racine carrée, cette inégalité est vraie, ce qui achève de montrer que la série ci-dessus vérifie le théorème spécial des séries alternées. Son reste est donc majoré par son premier terme en valeur absolue. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{1+(n+1)x}} \right) \right| \\
& \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+(N+1)x}} - \frac{1}{\sqrt{1+(N+2)x}} \\
& = \frac{x}{\sqrt{1+(N+1)x}\sqrt{1+(N+2)x}\left(\sqrt{1+(N+1)x} + \sqrt{1+(N+2)x}\right)} \\
& \leqslant \frac{x}{2(1+(N+1)x)} \\
& = \frac{(N+1)x}{(N+1)\cdot 2(1+(N+1)x)} \\
& \leqslant \frac{1}{2(N+1)}.
\end{aligned}$$

Cette majoration est indépendante de x et converge vers 0. On en déduit que la suite des restes converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle, et donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \left(x \mapsto (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \right) \right)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le théorème de la double limite :

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0.$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{2}.$

Remarque. Une fois qu'on a montré que le théorème spécial des séries alternées s'applique, on peut conclure plus rapidement en majorant la somme par son premier terme :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}-\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{1+(n+1)x}}\right)\right|\leqslant 1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\xrightarrow[x\to 0]{}0.$$

✓ Calculer une intégrale en développant en série l'intégrande. Intervertir $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\displaystyle\int_I$. ☐

Réponse.

(a) Pour tout $x>0$ on a $|e^{-\pi x}|<1$, et on peut écrire :

$$\forall x>0,\quad \frac{xe^{-x}}{1-e^{-\pi x}}=\sum_{n=0}^{+\infty}xe^{-(1+n\pi)x}.$$

Comme le terme général $f_n : x\mapsto xe^{-(1+n\pi)x}$ de cette somme est positif et intégrable sur $]0,+\infty[$ (en effet f_n est continue sur $[0,+\infty[$, et on a : $f_n(x)=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées), le théorème d'intégration terme à terme positif s'applique. Alors :

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-\pi x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}xe^{-(1+n\pi)x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}xe^{-(1+n\pi)x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(\pi n+1)^2},$$

après une intégration par parties. D'où le résultat.

(b) On a $\dfrac{1}{1+x^3}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x^3)^n$, et on vérifie que pour tout la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(x\mapsto(-x^3)^n\right)$ converge normalement donc uniformément sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ (conséquence immédiate de la majoration : $\forall x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, $\left|(-x^3)^n\right|\leqslant\dfrac{1}{8^n}$, et de la convergence de la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{8^n}$). Alors :

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\int_0^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^3)^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}(-x^3)^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)2^{3n+1}}.$$

(c) On ne peut pas imiter le raisonnement ci-dessus, puisqu'il y a pas convergence normale sur $[0,1]$ (ni même simple). Nous allons montrer le résultat grâce au théorème de convergence dominée. Posons : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[0,1[$, $f_n(x)=(-1)^nx^{3n}$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est bien sûr continue par morceaux sur $[0,1[$, et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}f_n$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x\mapsto\dfrac{1}{1+x^3}$ (il s'agit d'une série géométrique de raison $-x^3\in]-1,0]$), qui est également continue par morceaux sur $[0,1[$.
Ensuite, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{N}f_n(x)\right|=\frac{1-(-x^3)^{N+1}}{1+x^3}\leqslant\frac{2}{1+x^3}.\qquad\text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

L'application $\varphi : x\mapsto\dfrac{2}{1+x^3}$ et continue par morceaux sur le SEGMENT $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$, et en particulier sur $[0,1[$. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée.
Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, f et f_n sont intégrables sur $[0,1[$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et on a : $\displaystyle\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{3n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^nx^{3n}\mathrm{d}x$. C'est-à-dire : $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$, ce qu'il fallait démontrer.

(d) Justifions brièvement la convergence de l'intégrale : la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^x}$ vérifie clairement le théorème spécial des séries alternées si $x > 0$, ce qui permet à la fois de démontrer sa convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ (et donc la continuité de sa somme sur $\mathbb{R}_+^*$), et d'autre part de majorer sa somme par son premier terme en valeur absolue :

$$\forall x > 0, \quad \left|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}\right| \leqslant \frac{1}{2^x} = e^{-x\ln(2)}.$$

Or $-\ln(2) < 0$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x\ln(2)}\mathrm{d}x$ converge. Par comparaison, il en est de même de l'intégrale de l'énoncé. Passons à la justification de l'identité demandée.

C'est évidemment un problème d'interversion. Notons que la série $\sum_{n\geqslant 2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{n^x} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln(n)}$ diverge (utiliser : $\frac{1}{\ln(n)} \geqslant \frac{1}{n}$), donc le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas. Le théorème de convergence dominée non plus, en tout cas pas trivialement (comment majorer les sommes partielles, puisqu'on ne sait pas les simplifier ? une comparaison série-intégrale n'est pas possible car le terme général ne définit pas une fonction monotone). Nous allons donc justifier l'intégration terme à terme à la main. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On a :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{n^x}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty}\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{N}\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} R_N(x)\mathrm{d}x,$$

où : $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ vérifie, par le théorème spécial des séries alternées : $\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\forall x > 0$, $|R_N(x)| \leqslant \frac{1}{(N+1)^x}$. Donc :

$$\forall N \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad 0 \leqslant \left|\int_0^{+\infty} R_N(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |R_N(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x\ln(N+1)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(N+1)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, passer à la limite quand $N \to +\infty$ ci-dessus donne :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}.$$

(e) Pour tout $t \in]0,1]$, on a : $\exp(t)\ln(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \ln(t)}{n!}$. Le terme général de cette somme est toujours négatif sur $]0,1]$, ce qui permet d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme positif (quitte à raisonner sur la série opposée). On obtient alors :

$$\int_0^1 \exp(t)\ln(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n \ln(t)\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+1)^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!(n+1)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!n}.$$

L'intégrale $\int_0^1 t^n \ln(t)\mathrm{d}t$ se calcule classiquement avec une intégration par parties. D'où le résultat.

★ Obtenir un équivalent d'une somme de série de fonctions. ☐

Réponse.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. L'application $t \mapsto \frac{x}{t(t+x)}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$. Par conséquent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} = \frac{x}{1+x} + \sum_{n=2}^{+\infty}\int_{n-1}^{n} \frac{x}{n(n+x)}\mathrm{d}t \leqslant \frac{x}{1+x} + \sum_{n=2}^{+\infty}\int_{n-1}^{n} \frac{x}{t(t+x)}\mathrm{d}t = \frac{x}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{x}{t(t+x)}\mathrm{d}t$$

et de même :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{x}{t(t+x)} \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{x}{t(t+x)} \mathrm{d}t.$$
Notons qu'on somme et intègre des quantités positives : c'est ce qui assure que ces sommes et intégrales sont bien définies (quitte à valoir $+\infty$ dans le cas divergent). En résumé :
$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{t(t+x)} \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} \leqslant \frac{x}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{x}{t(t+x)} \mathrm{d}t.$$
On calcule ces intégrales à l'aide d'une décomposition en éléments simples, et on en déduit :
$$\ln(x+1) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} \leqslant \frac{x}{1+x} + \ln(x+1),$$
et ceci vaut pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On en déduit alors :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x).$$

(b) Soit $x \in]0,1[$. On fait une comparaison série-intégrale comme ci-dessous, avec l'application décroissante $t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln(x)}$ (notez bien que $\ln(x) < 0$). On obtient :
$$\int_1^{+\infty} x^{t^2} \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \leqslant \int_0^{+\infty} x^{t^2} \mathrm{d}t.$$
Or : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t^2} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln(x)} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u$ (on fait le changement de variable : $u = t\sqrt{-\ln(x)}$), donc d'après le résultat admis par l'énoncé : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-\ln(x)}}$. De même :
$$\int_1^{+\infty} x^{t^2} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} x^{t^2} \mathrm{d}t - \int_0^1 x^{t^2} \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-\ln(x)}} - \int_0^1 x^{0^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-\ln(x)}} - 1.$$
Comme : $\displaystyle\sqrt{\frac{\pi}{-\ln(x)}} \underset{x\to1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$, l'encadrement ci-dessus permet de montrer :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \underset{x\to1^-}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

(c) Là, la comparaison série-intégrale ne donne rien de probant (on ne sait pas calculer de primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{2^t(t+x)}$). Pas grave : l'affaire est plus simple qu'il n'y paraît. En effet, on note que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n(n+x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n(n+x)},$$
et cette seconde somme est continue sur $\mathbb{R}_+$, puisqu'elle est une limite uniforme d'une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ (la convergence uniforme se montre *via* la convergence normale, puisque : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\left\| x \mapsto \dfrac{1}{2^n(n+x)} \right\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1} \frac{1}{2^n}$ converge). Par conséquent, quand $x \to 0$ la somme du membre de droite a une limite finie et est négligeable devant $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui tend vers l'infini. Ainsi :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n(n+x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Remarque. On peut aussi s'en sortir en remarquant une relation entre $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n(n+x)}$ et $f(x+1)$. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n(n+x+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}(n+x)} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n(n+x)} = 2\left(f(x) - \frac{1}{x}\right).$$

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{f(x+1)}{2} + \frac{1}{x}$. Or $f(x+1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(1) < +\infty$ par continuité en 1 (même argument de convergence uniforme), d'où : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$.

(d) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \left(x \mapsto \frac{x}{2^n(n+x)}\right)$ converge normalement sur $[0, +\infty[$, puisque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\| x \mapsto \frac{x}{2^n(n+x)} \right\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}$ (on majore x par $n+x$), et la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ converge. Par le théorème de la double limite :

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{2^n(n+x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2^n(n+x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2,$$

donc : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n(n+x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$.

2. Quand x est très grand, il est tentant de conjecturer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}} \approx \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, ce qui fournirait le développement : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} \approx 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Posons : $b = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R}$. Passons de la conjecture à la démonstration en étudiant soigneusement la différence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - 1 - \frac{b}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{nx} - \sqrt{1+nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}}$$

En multipliant au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - \left(1 + \frac{b}{\sqrt{x}}\right) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}\left(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx}\right)} \right| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}\left(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx}\right)} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{nx}\left(\sqrt{nx} + \sqrt{nx}\right)} \\
&= \frac{1}{2x\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

sachant que ces majorations ne posent pas de problème parce que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (son exposant est $\frac{3}{2} > 1$). En posant $M = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, nous avons l'existence d'une constante réelle $M > 0$ telle que pour tout x au voisinage de l'infini, on ait :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - \left(1 + \frac{b}{\sqrt{x}}\right) \right| \leqslant \frac{M}{x\sqrt{x}}.$$

Ceci montre bien que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - \left(1 + \frac{b}{\sqrt{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} = 1 + \frac{b}{\sqrt{x}} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$$