Chapitre VII — Suites et séries de fonctions

Révisions attendues

1. L'intégralité des cours des chapitres I et II, plus particulièrement les théorèmes d'interversion limite-intégrale.
2. Inégalités dans $\mathbb{R}$, étude des variations d'une fonction.
3. Théorèmes de Taylor, inégalité des accroissements finis, convexité.

Motivation

Notations et extension des définitions. Dans tout ce chapitre, $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces vectoriels de dimension finie et A est une partie non vide de E. Dans les faits, on a souvent : $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Les notations I et J désignent systématiquement des intervalles non vides de $\mathbb{R}$.

Principe général. Hypothèses locales.

1 Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Proposition 1 (Continuité d'une limite uniforme de fonctions continues)**.**

Remarque. Interprétation topologique.

Théorème 2 (Théorème de la double limite)**.**

Proposition 3 (Classe C^1 d'une limite de suite de fonctions)**.**

Remarque. La convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vers f n'est pas sur I *a priori*.

Proposition 4 (Classe C^k d'une limite de suite de fonctions)**.**

Exercice 1. Le démontrer par récurrence sur k.

Remarque. Hypothèse de convergence uniforme.

2 Séries de fonctions

2.1 Définitions, convergence normale

Définition 5 (Convergence simple, convergence uniforme d'une série de fonctions)**.**

Proposition 6 (Conséquences de la convergence uniforme)**.**

Mise en garde 1.

MONTRER QUE $(f_n)_{n\geqslant 0}$ CVS OU CVU NE PROUVE JAMAIS QUE $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVS OU CVU !

Proposition 7 (Caractérisation de la convergence uniforme avec le reste)**.**

Exemple 1. Convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(f_n : \begin{cases}]-1{,}1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{cases}\right)$.

Exemple 2. Convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(f_n : \begin{cases} [0{,}1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \end{cases}\right)$.

Définition 8 (Convergence normale)**.**

Proposition 9 (La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point)**.**

Exemple 3. Convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(f_n : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & \dfrac{1}{n^s} \end{cases}\right)$.

Exemple 4. Convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{n\left(1+(nx)^2\right)} \end{cases}\right)$.

2.2 Régularité d'une somme de série de fonctions

Proposition 10 (Continuité d'une limite uniforme)**.**

Corollaire 11 (Continuité de l'exponentielle matricielle)**.**

Théorème 12 (Théorème de la double limite)**.**

Exemple 5. Limite en $+\infty$ et continuité de la fonction dzêta de Riemann.

Méthode 1. Cas d'une limite infinie. 4

Exemple 6. Calcul de : $\lim\limits_{s\to 1^+} \zeta(s)$.

Théorème 13 (Théorème d'intégration terme à terme sur un segment)**.**

Exemple 7. Identité : $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Théorème 14 (Théorème d'intégration terme à terme, cas positif)**.**

Théorème 15 (Théorème d'intégration terme à terme, cas général)**.**

Remarque. Analogie avec le théorème de Fubini.

Exemple 8. Calcul de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\mathrm{d}t$.

Méthode 2. Cas où les théorèmes ci-dessus ne s'appliquent pas (ou difficilement) : théorème de convergence dominée. 5.5.1

Exemple 9. Identité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Théorème 16 (Théorème de dérivation terme à terme)**.**

Exercice 2. Démontrer les théorèmes 13 et 16, en appliquant les théorèmes d'interversion de la section 1 à des suites de sommes partielles.

Théorème 17 (Classe C^k d'une somme de série de fonctions)**.**

Exercice 3. Le démontrer par récurrence sur k.

Exemple 10. Classe C^∞ de la fonction dzêta de Riemann.

Exemple 11. Classe C^1 de $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

Exercice 4. Avec une comparaison série-intégrale, donner une minoration du reste d'indice N de la série des dérivées, qui démontre qu'il ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

3 Intégrales à paramètres : compléments

Corollaire 18 (Théorème de continuité sous le signe intégrale)**.** *Soient A une partie non vide de E et J un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Soit f une application définie sur $A \times J$. On suppose que :*

- *pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;*
- *pour tout $t \in J$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est* continue *sur A ;*
- ***il existe φ continue par morceaux et intégrable sur J telle que pour tout $(x,t) \in A \times J$, on ait : $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$** (HYPOTHÈSE DE DOMINATION).*

Alors $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J pour tout $x \in A$, et $g : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Remarque. Hypothèse de domination gratuite lorsque l'intervalle d'intégration est un segment.

Exemple 12. L'intégrale à paramètre $x \mapsto \int_0^1 \ln(1+x+t)\mathrm{d}t$ est continue sur $]-1,+\infty[$.

— Fin du chapitre VII —

Table des matières