Du cours aux exercices (Savoir-faire à vérifier)

Chapitre II — Séries numériques et familles sommables

Les principaux acquis à vérifier sont :

Séries numériques.

✓ 1. Étudier la nature d'une série. **(C)** ☐

✓ 2. Calculer des sommes simples (grâce aux sommes télescopiques, géométriques, exponentielles, etc.). **(C)** ☐

★ 3. Obtenir un équivalent asymptotique de reste ou de somme partielle, ou de suite *via* le lien suite-série. **(C)** ☐

☢ 4. Démontrer et utiliser la transformation d'Abel. **()** ☐

Familles sommables

✓ 1. Utiliser les théorèmes de Fubini et de sommation par paquets. ☐

L'icône « () » signifie que les documents *Méthodes* donnent des compléments sur ces savoir-faire.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices exerçant à ce savoir-faire.

Séries numériques

✓ Déterminer la nature d'une série.

Exemples. Déterminer la nature des séries de termes généraux :

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, (b) $\dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}$, (c) $\dfrac{n!(n+1)!(n+2)!}{(3n)!}$, (d) $\dfrac{1}{e^{n^2}}$,

(e) $\dfrac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$, (f) $\dfrac{\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\ln(n)}}$, (g) $\dfrac{(-1)^n\sin(\ln(n))}{n^2}$, (h) $e^{-(\ln(n))^2}$,

(i) $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$, (j) $(-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n}$, (k) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$ (où $a>0$), (l) $e^{-\sqrt{\ln(n)}}$,

(m) $\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}$, (n) $(-1)^n\dfrac{x^n}{n+1}$, (o) $\dfrac{1}{n(\ln(n))^3}$.

✓ Calculer des sommes simples (grâce aux sommes télescopiques, géométriques, exponentielles, etc.).

Exemples. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{2^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{2^n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n(n^2+3n+1)}{n!}$, (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}\right)$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

★ Obtenir un équivalent asymptotique de reste ou de somme partielle, ou de suite *via* le lien suite-série.

Exemples.

1. Donner un équivalent asymptotique quand $N \to +\infty$ de :

   (a) $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(n)}{n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+e^{-n^2}}$, (e) $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} e^{-n^2}$.

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par : $u_0 \in]0,e]$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. Donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

☢ Utiliser la transformation d'Abel.

Exemples. Dans les trois questions suivantes, nous utiliserons la transformation d'Abel.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Montrer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$ (on peut admettre la convergence).
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ converge.

Familles sommables.

✓ Utiliser les théorèmes de Fubini et de sommation par paquets.

Exemples.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$. Montrer que la famille $\left(\dfrac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.
2. Soit $x \in [0,1[$. Montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{1-x^{2n+1}}$.
3. On admet : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
4. Calculer les sommes suivantes :

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n}, \quad \text{(b)}\ \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{p^q}{e^{2p} q!}, \quad \text{(c)}\ \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2} \frac{pq}{(p+q)^5}.$$

On admet : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Vous aurez besoin d'une autre somme calculée ci-dessus.

Séries numériques

✓ Déterminer la nature d'une série. ☐

Réponse.

(a) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right)=\frac{1}{n}\left(\cancel{1}+\frac{1}{2n^2}-\cancel{1}+\frac{1}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^3}>0$$

et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ converge, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ converge d'après le théorème de comparaison de séries à termes positifs.

(b) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\ln(n))^2}{n^2}$. On utilise la méthode de comparaison aux séries de Riemann. On a $n^\alpha\frac{(\ln(n))^2}{n^2}=n^{\alpha-2}(\ln(n))^2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ pour tout $\alpha<2$. Prenons α tel que $\alpha<2$ et $\alpha>1$, par exemple : $\alpha=\frac{3}{2}$. Alors ce qui précède montre que :

$$\frac{(\ln(n))^2}{n^2}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right);$$

or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge parce que son exposant est $\frac{3}{2}>1$, donc par comparaison de séries à termes positifs la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\ln(n))^2}{n^2}$ converge.

(c) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n!(n+1)!(n+2)!}{(3n)!}$. Posons $u_n=\dfrac{n!(n+1)!(n+2)!}{(3n)!}$ (notons que $u_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$). Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\cancel{(n+1)!}\cancel{(n+2)!}(n+3)!(3n)!}{n!\cancel{(n+1)!}\cancel{(n+2)!}(3n+3)!}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^3}{27n^3}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{27}<1,$$

donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge d'après la règle de D'Alembert.

(d) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{e^{n^2}}$. D'après le théorème des croissances comparées, on a : $\dfrac{1}{e^{n^2}}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge (l'exposant est $2>1$) donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{e^{n^2}}$ converge d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs. La règle de D'Alembert s'applique aussi avec pertinence ici.

(e) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$. Il serait naturel ici d'utiliser la règle de D'Alembert, mais nous tombons sur le cas d'incertitude (une limite égale à 1). Nous allons donc procéder classiquement en cherchant un équivalent asymptotique du terme général, et ce grâce à la formule de Stirling. On a :

$$\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\underset{n\to+\infty}{\sim}3^{3n}\frac{(2\pi n)^{3/2}\left(\frac{n}{e}\right)^{3n}}{(6\pi n)^{1/2}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2\pi}{\sqrt{3}}n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

Puisque le terme général ne converge pas vers 0, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$ diverge grossièrement.

(f) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\ln(n)}}$. On a : $\dfrac{\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\ln(n)}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{n\ln(n)}}>0$. On compare aux séries de Riemann : on a $n^\alpha\dfrac{1}{\sqrt{n\ln(n)}}=\dfrac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\ln(n)}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ pour tout $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$, tandis que $n^\alpha\dfrac{1}{\sqrt{n\ln(n)}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ pour tout

$\alpha > \frac{1}{2}$. Prenons α tel que $\alpha > \frac{1}{2}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Pour tout n assez grand, on a donc $n\dfrac{1}{\sqrt{n\ln(n)}} \geqslant 1$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\sqrt{n\ln(n)}} \geqslant \frac{1}{n} > 0,$$

or la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge, donc par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{\sqrt{n\ln(n)}}$ diverge, et également par comparaison la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\ln(n)}}$ diverge aussi.

(g) Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n\sin(\ln(n))}{n^2}$. Elle converge absolument par comparaison (le terme général est dominé par $\dfrac{1}{n^2}$), donc elle converge.

(h) Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-(\ln(n))^2}$. On utilise la « méthode $n^\alpha u_n$ » pour comparer ce terme au terme général d'une série de Riemann. On a : $n^\alpha e^{-(\ln(n))^2} = e^{-(\ln(n))^2+\alpha\ln(n)}$. L'argument de l'exponentielle tend vers $-\infty$ indépendamment de la valeur de α ; si l'on prend $\alpha = 2$, on a donc $n^2e^{-(\ln(n))^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc : $e^{-(\ln(n))^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On conclut comme plus haut, par comparaison à une série de Riemann convergente.

(i) Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$. Semblablement :

$$\begin{aligned}
\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1}) &= \cos\left(\pi n\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right) && \text{(on fait apparaître } \sqrt{1+u} \text{ avec } u\to 0) \\
&= \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) && \text{(on utilise les formules } \cos(x+n\pi) = (-1)^n\cos(x) \text{ et } \cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)) \\
&= \frac{3\pi}{8}\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) && \text{(car } \sin(u) = u + \underset{u\to 0}{o}(u^2))
\end{aligned}$$

donc sa série converge par un raisonnement analogue.

(j) Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 3} (-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 3} (-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n}$ est alternée et vérifie le théorème spécial des séries alternées (la décroissance n'est pas évidente : pour la démontrer, on montre que l'application $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ décroît sur $[e, +\infty[$, étant de dérivée $x \mapsto \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$), donc elle converge.

(k) Nature de $\sum\limits_{n>-a} \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$. On a, après calculs :

$$\ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\sum\limits_{n\geqslant 1}\text{ converge}} - \frac{a+1}{2n} + \underbrace{\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{\sum\limits_{n\geqslant 1}\text{ converge (abs.)}},$$

et la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge ; donc $\sum\limits_{n>-a} \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$ converge uniquement pour $a = -1$.

(l) Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-\sqrt{\ln(n)}}$. Pour tout $n \geqslant 3$, on a $\ln(n) \geqslant 1$, donc $\ln(n) \geqslant \sqrt{\ln(n)}$. On en déduit : $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(n)}} \geqslant \sum\limits_{n=3}^{+\infty} e^{-\ln(n)} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-\sqrt{\ln(n)}}$ diverge.

(m) Nature de $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}\right)$. On a, pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}-1\right)=\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}+\underbrace{\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{=v_n}$$

et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge d'après le théorème spécial des séries alternées, donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}\right)$ est de même nature que $\sum_{n\geqslant 1}v_n$; or cette série converge absolument parce que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}>1$), donc la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}\right)$ converge.

(n) Nature de $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}$. Posons $u_n=\frac{x^n}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Comme $x\geqslant 0$, on a $u_n\geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et donc cette série est bien alternée. Vérifions les hypothèses du théorème spécial des séries alternées. On a : $0\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. Il reste à vérifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante : pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{n+2}\cdot x\leqslant 1\cdot 1\leqslant 1$, donc $u_{n+1}\leqslant u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$: d'où la décroissance.

Puisque $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ est alternée, et que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante convergeant vers 0, d'après le théorème spécial des séries alternées la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge.

(o) Nature de $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln(n))^3}$. On effectue une comparaison série-intégrale. L'application $t\mapsto\frac{1}{t(\ln(t))^3}$ est décroissante et positive sur $]1,+\infty[$ (la positivité sert à pouvoir manipuler *a priori* la somme et l'intégrale ci-dessous), donc :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^3}=\sum_{n=3}^{+\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n(\ln(n))^3}\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=3}^{+\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^3}=\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^3}=\left[-\frac{1}{2(\ln(t))^2}\right]_2^{+\infty}=\frac{1}{2(\ln(2))^2}<+\infty,$$

donc la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln(n))^3}$ converge.

✓ Calculer des sommes simples (grâce aux sommes télescopiques, géométriques, exponentielles, etc.). ☐

Réponse.

(a) Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{2^n}$. C'est une somme géométrique de raison $\frac{e^{i\theta}}{2}$, de module $\frac{1}{2}<1$. Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{2^n}=\frac{1}{1-\frac{e^{i\theta}}{2}}.$$

(b) Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{2^n}$. C'est la partie réelle de la somme ci-dessus. Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{2^n}=2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2-e^{i\theta}}\right)=2\mathrm{Re}\left(\frac{2-e^{-i\theta}}{|2-e^{i\theta}|^2}\right)=\frac{4-2\cos(\theta)}{5-4\cos(\theta)}.$$

Pour le calcul de $\left|2-e^{i\theta}\right|^2$, il est plus commode d'utiliser l'identité suivante (que je vous laisserai vérifier) : $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2$, $|z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2$ (remarquez bien qu'il y a $\bar{z}$ et non z dans la partie réelle). Cette formule est à préférer à la définition du module lorsque, par exemple, z et z' sont des réels ou des exponentielles de la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ (parce que dans ces cas-là, le calcul des différents modules est immédiat). Ici, on obtient : $\left|2-e^{i\theta}\right|^2 = |2|^2 - 2\mathrm{Re}\left(2e^{i\theta}\right) + \left|e^{i\theta}\right|^2 = 4 - 4\cos(\theta) + 1 = 5 - 4\cos(\theta)$.

(c) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$. Après une décomposition en éléments simples, on trouve :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{1}{3n} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{6(n+3)},$$

et donc, pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+3} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n'=2}^{N+1}\frac{1}{n'} + \frac{1}{6}\sum_{n'=4}^{N+3}\frac{1}{n'}$$

Comme $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$, on obtient, pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{6}\sum_{n=4}^{N+3}\frac{1}{n} \\
&= \cancel{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n}} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{N+1}\right) \\
&+ \frac{1}{6}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3}\right) \\
&= \frac{7}{36} + \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N}\right),
\end{aligned}$$

ce dont on déduit, quand $N \to +\infty$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{7}{36}$.

(d) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n(n^2+3n+1)}{n!}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n(n^2+3n+1)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n\left(n(n-1)+4n+1\right)}{n!} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{(n-2)!} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \\
&= 9\sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{3^{n'}}{(n')!} + 12\sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{3^{n'}}{(n')!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \\
&= 22e^3.
\end{aligned}$$

(e) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}\right)$. C'est plus subtil, mais si on essaie de calculer quelques sommes partielles on comprend les simplifications qui opèrent, et qui dépendent de la parité des indices (nous vous recommandons de le faire, avant de lire la suite de cette solution). Soit $N \geqslant 1$. Alors, en séparant les termes pairs et impairs :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{2N} \ln\left(\frac{n+(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}\right) &= \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right) + \sum_{k=1}^{N-1} \ln\left(\frac{(2k+1)-1}{(2k+1)+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\ln(2k+1) - \ln(2k-1)\right) + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\ln(2k) - \ln(2k+2)\right).
\end{aligned}$$

Les deux sommes sont télescopiques. On a donc : $\displaystyle\sum_{n=2}^{2N} \ln\left(\frac{n+(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}\right) = \ln(2N+1) + \ln(2) - \ln(2N) = \ln\left(1 + \frac{1}{2N}\right) + \ln(2) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$. De même si l'on somme jusqu'à $2N+1$ au lieu de $2N$. On en déduit : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}\right) = \ln(2)$.

(f) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$. On rappelle l'existence de $\gamma\in\mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$. (constante d'Euler). On doit savoir la démontrer (et comprendre pourquoi je vais en avoir besoin ici).

Soit $N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. On effectue une décomposition en éléments simples, et on trouve :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-2\sum_{\substack{\ell=3\\ \ell\text{ impair}}}^{2N+1}\frac{1}{\ell}.$$

Or : $\displaystyle\sum_{\substack{\ell=3\\ \ell\text{ impair}}}^{2N+1}\frac{1}{\ell}+\sum_{\substack{\ell=3\\ \ell\text{ pair}}}^{2N+1}\frac{1}{\ell}=\sum_{\ell=3}^{2N+1}\frac{1}{\ell}$, donc : $\displaystyle\sum_{\substack{\ell=3\\ \ell\text{ impair}}}^{2N+1}\frac{1}{\ell}=\sum_{\ell=3}^{2N+1}\frac{1}{\ell}-\sum_{\substack{\ell=3\\ \ell\text{ pair}}}^{2N+1}\frac{1}{\ell}=\sum_{\ell=3}^{2N+1}\frac{1}{\ell}-\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{2k}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n+1)}&=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-2\left(\sum_{\ell=3}^{2N+1}\frac{1}{\ell}-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k}\right)\\&=u_N+\ln(N)-2\left(u_{2N+1}+\ln(2N+1)-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(u_N+\ln(N)-1\right)\right)\\&=2u_N-2u_{2N+1}+2\ln\left(\frac{N}{2N+1}\right)+2\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}2\gamma-2\gamma+2\ln\left(\frac{1}{2}\right)+2.\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n(2n+1)}$ converge, et que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=2\left(1-\ln(2)\right)$.

★ Obtenir un équivalent asymptotique de reste ou de somme partielle, ou de suite *via* le lien suite-série. ☐

Réponse.

1. *(a) Équivalent de* $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$. Soit N au voisinage de $+\infty$. Il est facile de démontrer que l'application $t\mapsto\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$ est décroissante sur $[2,+\infty[$, en tant que produit de deux fonctions décroissantes et POSITIVES (je veux me passer d'un calcul de dérivée). On a donc : $\forall n\geqslant3$, $\forall t\in[n-1,n]$, $\dfrac{1}{n(\ln(n))^2}\leqslant\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$, et en intégrant cette inégalité et en sommant :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^2}\leqslant\sum_{n=N+1}^{+\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^2}=\int_{N}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^2}=\left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_N^{+\infty}=\frac{1}{\ln(N)}.$$

De même : $\dfrac{1}{\ln(N+1)}\leqslant\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$. Or il est facile de démontrer : $\ln(N+1)\underset{N\to+\infty}{\sim}\ln(N)$. Par le théorème des gendarmes :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^2}\underset{N\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\ln(N)}.$$

(b) Équivalent de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(n)}{n}$. La fonction $x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur $[e,+\infty[$. Une comparaison entre séries et intégrales donne :

$$\forall N\geqslant3,\quad\int_4^{N+1}\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=4}^{N}\frac{\ln(n)}{n}\leqslant\int_3^{N}\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x,$$

or une primitive de $x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{x}$ est $x\mapsto\dfrac{(\ln(x))^2}{2}$. Partant de là, on arrive facilement à :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(n)}{n}\underset{N\to+\infty}{\sim}\frac{(\ln(N))^2}{2}$$

(comme $\dfrac{(\ln(N))^2}{2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, les premiers termes de la somme sont négligeables).

(c) Équivalent de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est croissante sur $[1, +\infty[$. Pour tout $N \geqslant 1$:

$$\int_1^N \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \leqslant \int_2^{N+1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x, \quad \text{donc : } \; 2e^{\sqrt{N}} - 2e \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \leqslant 2e^{\sqrt{N+1}} - 2e^{\sqrt{2}},$$

Or :

$$\sqrt{N+1} - \sqrt{N} = \frac{(N+1)-N}{\sqrt{N+1}+\sqrt{N}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{N}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc : $e^{\sqrt{N+1}-\sqrt{N}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Par conséquent les deux extrémités de cet encadrement sont équivalents à $e^{\sqrt{N}}$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \underset{N\to+\infty}{\sim} 2e^{\sqrt{N}}$.

(d) Équivalent de $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+e^{-n^2}}$. On a : $\dfrac{1}{n^2+e^{-n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} > 0$ (vérifier le dernier équivalent, qui n'est pas visible à l'œil nu). Or la série télescopique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ converge par le lien suite-série, donc :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+e^{-n^2}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{N}.$$

Autre méthode : comparaison série-intégrale. On ne peut pas déterminer de primitive de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+e^{-x^2}}$ à l'aide de fonctions usuelles (et la décroissance n'est pas évidente, bien que vraie), mais on peut utiliser l'encadrement $\dfrac{1}{n^2+1} \leqslant \dfrac{1}{n^2+e^{-n^2}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, valable pour tout $n > 0$, pour estimer $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+e^{-n^2}}$ malgré tout. On a, pour tout $N \geqslant 1$:

$$\int_{N+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+e^{-n^2}} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \int_{N}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Or : $\displaystyle\int_{N+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = [\arctan(x)]_{N+1}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan(N+1) = \arctan\left(\frac{1}{N+1}\right)$ (pourquoi cette dernière égalité est-elle vraie ?), et : $\displaystyle\int_{N}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{N}$. Donc :

$$\arctan\left(\frac{1}{N+1}\right) \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+e^{-n^2}} \leqslant \frac{1}{N}.$$

On a $\arctan\left(\dfrac{1}{N+1}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{N}$. On en déduit : $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+e^{-n^2}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{N}$.

(e) Équivalent de $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} e^{-n^2}$. On a : $e^{-n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n^2} - e^{-(n+1)^2}$ (c'est la décroissance extrêmement rapide de cette exponentielle qui conduit à conjecturer cet équivalent, qui se démontre ensuite sans peine du fait que : $e^{-(n+1)^2+n^2} = e^{-2n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$), et la série télescopique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(e^{-n^2} - e^{-(n+1)^2}\right)$ converge par le lien suite-série, étant donné que $\left(e^{-n^2}\right)_{n\geqslant 0}$ converge (vers 0). Par le théorème de sommation des équivalents : $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} e^{-n^2} \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=N}^{+\infty}\left(e^{-n^2} - e^{-(n+1)^2}\right) = e^{-N^2}$.

On remarque que dans les savoir-faire du chapitre d'intégration, on vous fait démontrer : $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$: on n'obtient pas du tout le même équivalent dans le cas discret.

2. L'intervalle $]0,e]$ est stable par $x \mapsto \ln(1+x)$ (l'image par cette application de $]0,e]$ est $]0,1] \subseteq]0,e]$), donc $u_n \in]0,e]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, comme $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$ par concavité du logarithme, on a $u_{n+1} = \ln(1+u_n) \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Étant minorée et décroissante, elle converge vers un réel $L \in [0,e]$. Par continuité de $x \mapsto \ln(1+x)$ et par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$, on a $L = \ln(1+L)$ et donc $L = 0$ (il n'y a pas d'autre solution à l'équation $x = \ln(1+x)$, soit par stricte concavité, soit d'après une étude des variations de $x \mapsto x - \ln(1+x)$). Ceci montre déjà que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Cela nous permet de faire le développement asymptotique suivant de $u_{n+1}^\gamma - u_n^\gamma$, pour $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^\gamma - u_n^\gamma = (\ln(1+u_n))^\gamma - u_n^\gamma = \left(u_n - \frac{u_n^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(u_n^2\right)\right)^\gamma - u_n^\gamma &= u_n^\gamma \left(1 - \frac{u_n}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)\right)^\gamma - u_n^\gamma \\
&= u_n^\gamma \left(1 - \gamma\frac{u_n}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)\right) - u_n^\gamma \\
&= -\gamma\frac{u_n^{\gamma+1}}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(u_n^{\gamma+1}\right)
\end{aligned}$$

Si l'on prend $\gamma = -1$, alors $u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, donc par le théorème de Cesàro : $u_{n+1}^{-1} - u_0^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(u_{k+1}^{-1} - u_k^{-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$. On en déduit : $u_n^{-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$, et : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.

☢ Utiliser la transformation d'Abel. ☐

Réponse. On rappelle la formule de la transformation d'Abel (à savoir démontrer quand on l'utilise) :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n \sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n-1}\left((u_{k+1} - u_k)\sum_{\ell=0}^{k} v_\ell\right).$$

Pour savoir avec quelles suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ l'utiliser, il faut la comprendre comme l'analogue discret de l'intégration par parties : un choix pertinent pour l'intégration par parties l'est souvent pour la transformation d'Abel (dériver un terme polynomial pour abaisser le degré, par exemple). Voir *Méthodes*.

1. Prenons $u_n = n$ et $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n} k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la transformation d'Abel donne, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = n\sum_{k=0}^{n} 1 - \sum_{k=0}^{n-1}\left(((k+1)-k)\sum_{\ell=0}^{k} 1\right) = n(n+1) - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1) = n(n+1) - \sum_{k=1}^{n} k.$$

De cela on déduit : $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$, et donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$, et prenons $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{3^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la transformation d'Abel donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{3^n} = N\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{3^n} - \sum_{n=0}^{N-1}\left(((n+1)-n)\sum_{\ell=0}^{n}\frac{1}{3^\ell}\right) &= N\frac{1-\frac{1}{3^{N+1}}}{1-\frac{1}{3}} - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{3}{2}\left(N\left(1 - \frac{1}{3^{N+1}}\right) - N + \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{3^{n+1}}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(-\frac{N}{3^{N+1}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^N}}{1-\frac{1}{3}}\right).
\end{aligned}$$

D'après le théorème des croissances comparées, $\dfrac{N}{3^{N+1}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

3. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et prenons $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \cos(n)$ pour tout $n \geqslant 1$ (pour motiver ces choix, on peut penser à l'intégrale de Dirichlet étudiée dans le cours, exemple 8, où l'on montre la convergence en dérivant la puissance de t ; on fait ici de même avec la puissance de n, à savoir $\sqrt{n}$, où la dérivée est remplacée par la différence $u_{n+1} - u_n$). Alors :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \cos(n) - \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sum_{k=1}^{n} \cos(k). \qquad (*)$$

Pour étudier $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \cos(n)$, on utilise $\cos(n) = \mathrm{Re}(e^{in})$; on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} e^{in} = \sum_{n=1}^{N} \left(e^{i}\right)^n = e^{i} \frac{1-e^{iN}}{1-e^{i}}$, donc :

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \cos(n) \right| = \left| \mathrm{Re} \left(\sum_{n=1}^{N} e^{in} \right) \right| \leqslant \left| \sum_{n=1}^{N} e^{in} \right| = \left| e^{i} \frac{1-e^{iN}}{1-e^{i}} \right| = \frac{|1-e^{iN}|}{|1-e^{i}|} \leqslant \frac{2}{|1-e^{i}|}.$$

Ceci démontre que les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \cos(n)$ sont bornées par $M = \dfrac{2}{|1-e^{i}|}$. On en déduit facilement que le premier terme de $(*)$ tend vers 0 quand $N \to +\infty$ d'après le théorème des gendarmes, tandis que le second terme définit une série absolument convergente ; en effet :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \left| \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sum_{k=1}^{n} \cos(k) \right| \leqslant \left| \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right| \cdot \left| \sum_{k=1}^{n} \cos(k) \right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \cdot M,$$

et la série télescopique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ converge parce que la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n\geqslant 1}$ converge (vers 0) ; on utilise alors le théorème de comparaison des séries à termes positifs. On en déduit que le second terme de $(*)$ converge également, donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ existe, et est finie : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ converge.

Familles sommables.

✓ Utiliser les théorèmes de Fubini et de sommation par paquets. ☐

Réponse.

1. Montrons que la famille $\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable en calculant $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \left|\frac{z^p}{q!}\right|$:

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \left| \frac{z^p}{q!} \right| = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{|z|^p}{q!} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} \sum_{p=0}^{+\infty} |z|^p = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} \frac{1}{1-|z|} = \frac{1}{1-|z|} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} = \frac{e^1}{1-|z|} < +\infty.$$

Ceci montre que $\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. On peut donc calculer sa somme, et en reproduisant le raisonnement ci-dessus (la seule chose qui change est qu'on remplace $|z|$ par z) on obtient :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{z^p}{q!} = \frac{e}{1-z}.$$

2. Comme $x \in [0,1[$, on a : $\dfrac{1}{1-x^{2n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (x^{2n+1})^k$. Donc, sous réserve d'existence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{1-x^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^n x^n (x^{2n+1})^k = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2nk+k+n}.$$

Si la famille est bien sommable (ce que nous vérifierons ci-dessous), on a par le théorème de Fubini :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2nk+k+n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{(2n+1)k+n} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \sum_{n=1}^{+\infty}(-x^{2k+1})^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{1+x^{2k+1}},$$

ce qui est exactement l'identité demandée (quitte à renommer l'indice de sommation n). Montrons à présent que la famille $\left((-1)^n x^{(2n+1)k+n}\right)_{(n,k)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{N}}$ est effectivement sommable en montrant que $\left(\left|(-1)^n x^{(2n+1)k+n}\right|\right)_{(n,k)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{N}}$ l'est : comme c'est une famille de réels positifs, sa somme existe et on a, encore par le théorème de Fubini :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left|(-1)^n x^{2nk+k+n}\right| = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n x^{(2n+1)k+n}\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \sum_{n=1}^{+\infty}(x^{2k+1})^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^{2k+1}},$$

et cette somme a une valeur finie car : $\dfrac{x^k}{1-x^{2k+1}} \underset{k\to+\infty}{\sim} x^k$, et la série géométrique $\sum\limits_{k\geqslant 0} x^k$ converge car $x \in [0,1[$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, il en est de même pour la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}\dfrac{x^k}{1-x^{2k+1}}$, d'où la finitude de la somme ci-dessus. Ainsi la famille $\left((-1)^n x^{(2n+1)k+n}\right)_{(n,k)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{N}}$ est sommable et les calculs ci-dessus sont valides.

3. On somme des réels positifs. Par le théorème de sommation par paquets, avec les paquets $I_0 = 2\mathbb{N}\setminus\{0\}$ (entiers pairs non nuls) et $I_1 = 2\mathbb{N}+1$ (entiers impairs), on a : $I_0 \cup I_1 = \mathbb{N}\setminus\{0\}$, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n\in I_0}\frac{1}{n^2} + \sum_{n\in I_1}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. Or l'énoncé nous donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. On en déduit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Le théorème de sommation par paquets (avec les mêmes paquets), qu'on peut appliquer avec la somme d'une série absolument convergente, donne ensuite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n\in I_0}\frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{n\in I_1}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

4. *(a) Calcul de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{4^n}$. On a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{4^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4^n} = \sum_{(k,n)\in\Delta}\frac{1}{4^n}$ avec : $\Delta = \{(k,n)\in\mathbb{N}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\}) \mid 0\leqslant k\leqslant n-1\}$ (l'égalité est justifiée par le théorème de sommation par paquets appliqué à la famille $\left(\frac{1}{4^n}\right)_{(k,n)\in\Delta}$, avec : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $I_n = [\![0,n-1]\!]\times\{n\}$). En appliquant encore une fois le théorème de sommation par paquets, mais avec les paquets : $\forall k\in\mathbb{N}$, $J_k = \{k\}\times[\![k+1,+\infty[\![$, on trouve :

$$\sum_{(k,n)\in\Delta}\frac{1}{4^n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{(k,n)\in J_k}\frac{1}{4^n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{1}{4^n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{4^{k+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}.$$

Donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{4^n} = \frac{4}{9}$.

(b) Calcul de $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{p^q}{e^{2p}q!}$. Par le théorème de Fubini positif :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{p^q}{e^{2p}q!} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{p^q}{e^{2p}q!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{2p}} \cdot e^p = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(e^{-1}\right)^p = \frac{1}{1-e^{-1}}.$$

(c) Calcul de $\displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2} \frac{pq}{(p+q)^5}$. On utilise le théorème de sommation par paquets, avec pour paquets : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $I_n = \{(p,q)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2 \mid p+q=n\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2} \frac{pq}{(p+q)^5} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(p,q)\in I_n} \frac{pq}{n^5} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \sum_{p=1}^{n-1} p(n-p) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \left(n \cdot \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right) \\
&= \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} \right) \\
&= \frac{1}{6} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \right) \\
&= \frac{1}{6} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90} \right).
\end{aligned}$$