Du cours aux exercices
Chapitre II — Séries numériques et familles sommables

1 Aide à la révision du cours

1.1 Séries numériques : deuxième étude

1.1.1 Comparaison à des séries géométriques : règle de D'Alembert

Motivation de cette partie

Les séries de Riemann ne se comparent pas toujours facilement à une série, notamment quand le terme général dépend de factorielles (et pour cause, on ne connaît pas encore le comportement asymptotique de $n!$). Cette section remédie à ce problème en proposant une méthode dédiée plus spécifiquement à ce genre de série.

Proposition 1 (Règle de D'Alembert)**.**

✓

— Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L > 1$, quelle est la différence d'ordre de grandeur, « en gros », entre u_n et u_{n+1} ? Que dire de la croissance d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ qui vérifierait ceci ? En déduire que la règle de D'Alembert est, dans ce cas, intuitivement évidente.
— Trouver des moyens informels de se convaincre que le passage de $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - L\right| \leqslant \varepsilon$ à $(L-\varepsilon)^{n-n_0}u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant (L+\varepsilon)^{n-n_0}u_{n_0}$ est naturel : sortez votre brouillon et faites des manipulations élémentaires, éventuellement avec $n_0 = 0$ et n « petit ». Reconnaître les différentes étapes de l'heuristique du livret, dans la démonstration.
— Montrer que peu importe le réel L choisi, il existe des suites qui peuvent donner $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$.
— Appliquer la règle de D'Alembert à tous les exemples vus l'an dernier. Que remarque-t-on ? Utiliser une calculatrice pour aussi tracer les courbes des termes généraux correspondants, et juger de la vitesse de décroissance : la comparer avec celle des fonctions géométriques $x \mapsto \frac{1}{2^x}$, $x \mapsto \frac{1}{3^x}$, etc. Peut-on faire un lien entre les séries où la règle de D'Alembert est pertinente, et la vitesse de décroissance du terme général ? Analyser sa conformité avec l'encadrement de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ fourni par la démonstration, lorsque $L = 1$.

★

— Et si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1 *par valeurs supérieures*, peut-on conclure ? Et si c'est *par valeurs inférieures* ?
— Peut-on créer une règle de D'Alembert pour les fonctions ? Si $\frac{f(x+1)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$, est-ce que la position de L par rapport à 1 permet d'en déduire la nature de $\int_a^{+\infty} f$?

Exercice 1.

✓ Ce cas est même plus simple que celui de la démonstration effectuée dans la proposition 1. Intuitivement, que peut-on dire de la monotonie et croissance d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ où $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$? En déduire que la règle de D'Alembert est, dans ce cas, intuitivement évidente.

★ Trouver des hypothèses sur $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 0}$ dans le cas où la suite n'admet pas de limite, mais qui permettent malgré tout de conclure à la convergence (le cas de la divergence est plus facile).

Exercice 2.

✓

— Le faire. Bien constater les points communs dans la démonstration avec celle de la règle de D'Alembert. Montrer que le cas $\lambda = 1$ est incertain. Et si $\lambda = +\infty$?
— Trouver des séries pour lesquelles ce critère permet d'obtenir la nature, là où les méthodes usuelles échouent.

★ Trouver des séries où la règle de Cauchy permet de conclure, mais pas la règle de D'Alembert.

Remarque.

✓ Comprendre pourquoi $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ (ou > 1) ne permet pas de conclure : qu'est-ce que cette inégalité veut dire de $(u_n)_{n\geqslant 0}$? Pourquoi est-ce insuffisant pour avoir la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$?

Remarque.

★ Quoi qu'en dise cette remarque, celle faite plus haut montre que les séries de Riemann sont des cas où la règle de D'Alembert ne s'applique pas. Pourtant le terme général contient bien des puissances. Qu'est-ce qui pose problème ?

Exemple 1.

✓
- Bien noter une erreur d'étourderie très tentante si l'on va trop vite : vous devez obtenir $(2n+3)(2n+2)$ et non $(2n+2)$. Inspecter les parités permet de détecter une erreur sans effort intellectuel.
- Retrouver la nature *via* la formule de Stirling. Comparer les mérites des deux méthodes. Il y a mieux à faire que de directement appliquer cette formule avec $(2n+1)!$, si l'on veut que l'équivalent se simplifie : comment ?

Exemple 2.

✓
- Comprendre pourquoi il est *idiot* d'à la fois utiliser la règle de D'Alembert et la formule de Stirling : reprendre cet exemple ou le précédent en calculant $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec la formule de Stirling. Ne plus recommencer.
- En s'inspirant de cet exemple, bricoler d'autres séries définies à l'aide de factorielles, qui donnent le cas d'incertitude de la règle de D'Alembert (noter que si votre bricolage produit une suite vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \neq 0$, il est assez facile de modifier u_n pour obtenir un quotient tendant vers 1).
- Juger de la pertinence de la méthode « $n^\alpha u_n$ » dans ces exemples de cette section.

Remarque.

✓ Observer qu'il n'est pas intéressant (au-delà du contre-sens logique) d'utiliser la règle de D'Alembert pour étudier la nature d'une série géométrique. Constater une restriction dans les hypothèses, et la faiblesse d'une des conclusions.

Après votre révision de cette partie

1. Faire les *Savoir-faire à vérifier*, page 13. Traiter uniquement les séries avec des factorielles.
2. Avoir bien compris où la règle de D'Alembert s'applique, et où elle NE s'applique PAS : c'est presque d'égale importance ! Notamment, lorsqu'on étudie la nature d'une série dont le terme général dépend de factorielles, quand est-il préférable d'utiliser la règle de D'Alembert, et quand préfère-t-on utiliser la formule de Stirling ?
3. À ce stade, vous avez vu toutes les méthodes au programme pour étudier la nature d'une série à termes POSITIFS. Avec toutes ces méthodes différentes, vous devez au mieux clarifier le cadre d'application de chacune. Passez tout le début du cours en revue pour cela. S'aider au besoin de l'encart de la section 1 de *Méthodes*. Trouver quelques exemples types pour chacune d'entre elles (comparaison série-intégrale, comparaison à une série de Riemann, méthode « $n^\alpha u_n$ », règle de D'Alembert).

1.1.2 Quand les critères habituels ne s'appliquent pas

Motivation de cette partie

Cette dernière section donne la marche à suivre pour les dernières séries problématiques, lorsque toutes les autres approches ont échoué, en « cassant » un terme général en somme de termes généraux plus simples (grâce à un développement asymptotique), se traitant tous avec les méthodes précédentes.

Lemme 2 (Différence convergente de deux séries)**.**

✓
- Noter que la démonstration n'a rien de spécifique aux séries, et vaut pour les fonctions, intégrales, etc.
- Et si $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge, peut-on faire un lien entre les natures des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$? Peut-on dire quelque chose de la somme ou différence de deux séries divergentes ? Réfléchir avec des exemples SIMPLES.

Exemple 3.

✓

— Réviser le théorème des séries alternées. Peut-on démontrer que cette série ne vérifie pas ses hypothèses ?
— Être capable de comprendre où arrêter le développement asymptotique pour être certain de pouvoir conclure : ce n'est pas au hasard et il faut être méthodique.
— Reprendre l'étude en remplaçant $\sqrt{n}$ par n^α. Repérer à partir de quel α il y a convergence.

★

Noter que cette stratégie n'a rien de spécifique aux séries et vaut pour les intégrales. S'en convaincre en fabriquant immédiatement un exemple analogue à celui-ci ; il faut simplement se demander ce qui peut jouer le rôle du $(-1)^n$ dans le cas intégral, étant donné que $x \mapsto (-1)^x$ n'est certainement pas bien définie sur une demi-droite réelle.

Remarque.

★

Produire des contre-exemples plus élémentaires : prendre une série convenable dont les termes se simplifient deux à deux. Il n'est donc pas nécessaire de recourir à une telle artillerie.

Méthode 1.

8

✓

Lecture conseillée. *Méthodes*, section 8, au moins la partie sur la convergence des séries.

★

— Puisque cette transformation est présentée comme un analogue discret de l'intégration par parties : pousser plus loin cette analogie. Qu'est-ce que l'analogue discret de la dérivée ou des primitives ? Du théorème fondamental de l'analyse ? D'une équation différentielle linéaire ? De l'inégalité des accroissements finis ?
— On a coutume d'appeler *dérivation* sur un anneau A qui est un K-espace vectoriel (plus tard on appellera cela une K-algèbre) une application $d : A \to A$ qui est K-linéaire et vérifie : $\forall (u, v) \in A^2,\ d(uv) = d(u)v + ud(v)$. À cet égard, est-ce que $(u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}$ est une dérivation de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$?

☢

Dans le cas où il existe $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui interpole $(u_n)_{n\geqslant 0}$: arriveriez-vous à écrire $\sum_{n=0}^{N} u_n v_n$ en fonction de la suite $(V_n)_{n\geqslant 0}$, de f et f', et d'une intégrale ? À quels égards cette réécriture peut être plus agréable à manier ? Vous aurez peut-être une idée plus précise après avoir lu dans *Méthodes*, voire subi, les difficultés calculatoires que cause la transformation d'Abel par rapport à l'intégration par parties.

Exemple 4.

♡

✓

— Comparer avec les natures des intégrales analogues. Comment avait-on eu leur nature, déjà ? S'en souvenir à la lumière de l'heuristique de la transformation d'Abel.
— Et si $\theta \equiv 0 \bmod 2\pi$, que dire de la nature des séries ? Qu'est-ce qui change dans la démonstration ?
— Est-ce que la majoration triviale $\sum_{n=1}^{N} \left|e^{in\theta}\right| \leqslant N$ aurait suffi dans la démonstration ?
— Reprendre l'exemple 3 avec une transformation d'Abel, en vous inspirant de ce qu'on a fait ici.

★

— Les différentes étapes de la démonstration pourraient marcher avec des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ plus générales. Penser à un énoncé concluant à la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n v_n$ avec de bonnes hypothèses qui permettent de reproduire presque mot pour mot la démonstration de cet exemple.
— Parvient-on à retrouver la nature des séries usuelles avec une transformation d'Abel ?

☢

Pour $\alpha = 1$ et *certaines* valeurs de θ modulo 2π, vous pouvez obtenir la nature de ces deux séries sans passer par une transformation d'Abel. Lesquelles ?

Après votre révision de cette partie

1. **Lecture impérative.** *Méthodes*, sections 1 et 2. Refaire vous-même cette synthèse (voire une fiche). « Inventer » un exemple type pour chaque situation de l'encart rouge.
2. Essayer de faire tous les *Savoir-faire à vérifier*, sauf ceux sur les développements asymptotiques.

1.1.3 Étude asymptotique des restes et sommes partielles

Motivation de cette partie

On donne des méthodes pour obtenir des équivalents (voire davantage) de sommes partielles ou de restes. La meilleure méthode connue pour encadrer des sommes étant la comparaison série-intégrale, il est logique qu'on en reparle. Le théorème d'intégration des relations de comparaison a un analogue discret qui, appliqué aux sommes télescopiques, permet aussi l'étude de suites.

Méthode 2.

✓

— Vérifier, par des contre-exemples simples et explicites, que la monotonie est absolument essentielle.
— Réviser ce que vous avez vu en 1re année sur la comparaison série-intégrale, et être capable de retenir (et démontrer rapidement) l'encadrement de la somme par des intégrales, dans le cas croissant ou décroissant. Voir si on n'est capable de directement raisonner sur la somme ou l'intégrale pour avoir l'encadrement, ou si l'on préfère d'abord encadrer f, puis intégrer, puis sommer. Il est important de trouver une rédaction à votre convenance. Une interprétation graphique peut vous aider à y voir clair.

Exemple 5.

✓

— Noter que l'équivalent obtenu est intuitif et simple à retenir (pourquoi ?).
— Pour $s \in \{-1, -2, -3\}$, comparer l'équivalent avec les valeurs exactes connues de ces sommes.

★

— Pour $s < 0$, trouvez une autre méthode permettant de trouver ces équivalents beaucoup plus rapidement.
— Généraliser : sous quelle condition suffisante a-t-on : $\sum_{n=1}^{N} f(n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \int_1^N f(t)\mathrm{d}t$?

Exercice 3.

✓ Montrer que l'encadrement que vous avez produit dans la deuxième question donne un moyen de calculer des valeurs approchées des sommes de séries de Riemann. L'appliquer au calcul approché de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ à 10^{-2} près (je prends ces exemples car on sait en donner des valeurs exactes, ce qui permet de juger l'efficacité de votre approximation). Que pensez-vous de l'efficacité du calcul ?

★

— A-t-on toujours, en cas de convergence, l'équivalent : $\sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \int_N^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$? Se poser éventuellement la question plus tard, quand le théorème de sommation des équivalents permettra d'obtenir plein d'exemples.
— Varier les exemples : peut-on trouver des équivalents des sommes partielles ou des restes de $\sum_{n\geqslant 2} n^\alpha(\ln(n))^\beta$, $\sum_{n\geqslant 1} e^{an^\alpha} n^\beta$, etc., selon les valeurs des paramètres ?

Exemple 6.

✓

— Améliorer le terme d'erreur. Pour savoir comment : songez à une technique déjà utilisée dans un autre contexte d'intégration, pour augmenter la vitesse de décroissance de l'intégrande. Si vous voyez à quoi je pense : noter que vous pouvez répéter le procédé *ad vitam æternam* pour avoir un développement aussi précis qu'on veut.
— Généraliser à $\sum_{n=1}^{N} n^\alpha$ avec $\alpha \geqslant -1$, ou à $\sum_{n=N+1}^{+\infty} n^\alpha$ avec $\alpha < -1$.

★ Vérifier que dans le cas d'une fonction f décroissante et positive, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_n^{n+1} (f(n) - f(t))\mathrm{d}t$ converge. En déduire un théorème de comparaison série-intégrale comparant les natures de $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ et $\int_{n_0}^{+\infty} f$. À comparer avec le lemme 2.

Théorème 3 (Sommation des relations de comparaison).

↘ I th. 16

✓

- Faire la démonstration que j'ai sautée, en imitant le cas intégral.
- Est-ce que l'approche que je décris, juste après l'énoncé du théorème, pour retrouver les équivalents des sommes de Riemann, permettrait aussi de les CALCULER (dans le cas d'un exposant entier) ?
- Comme dans le cas intégral, mais avec l'usage du lien suite-série : vous forger une « base de données » de séries dont vous connaissez des équivalents des sommes partielles ou des restes. Pour cela, partez de suites $(v_n)_{n\geqslant 0}$ très simples ($\left(n^a e^{n^b}\right)_{n\geqslant 0}$ par exemple), et regardez à quelle suite basique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est équivalent $v_{n+1}-v_n$ quand $n\to+\infty$. Utiliser le théorème de sommation des équivalents pour en déduire un équivalent des sommes partielles ou des restes de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$. Si vous choisissez bien vos suites $(v_n)_{n\geqslant 0}$, vous aurez ainsi une grande famille d'équivalents « de référence ». Est-ce que vous obtenez toujours des équivalents analogues à ceux du cas intégral ? Comprenez-vous les cas où c'est différent ? Attention aux analogies hâtives.
- Les hypothèses sont sur la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$. Aurait-on pu avoir le même théorème en les faisant sur $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$?
- Chercher des contre-exemples à l'équivalence (ou autre relation) des sommes partielles de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ lorsque les séries *convergent*. Il n'y a pas besoin de chercher très loin.

★

- Vérifier que le cas intégral *contient* le cas discret : en appliquant le théorème d'intégration des relations de comparaison à des fonctions bien choisies, obtenir ce théorème de sommation. Pour cela, on notera que toute série est une intégrale déguisée. Est-ce que cette stratégie permet d'avoir d'autres théorèmes sur les séries ?
- Trouver des contre-exemples sans l'hypothèse de positivité. Si vous en avez trouvé dans le cas intégral, vous pourrez vous en inspirer (ce sera en vérité bien plus simple dans le cas discret).

☢

Dans tous les exemples que vous étudierez, éventuellement de votre cru, regarder si une transformation d'Abel ne vous permettrait pas également d'avoir un équivalent. Après tout, l'intégration par parties a parlé cette utilité dans le cas intégral, donc pourquoi pas son analogue discret ?

Corollaire 4 (Théorème de Cesàro)**.**

✓

- Le démontrer directement sans recours au théorème précédent.
- Pourquoi n'ai-je pas directement utilisé le théorème précédent avec la relation $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$, préférant une contorsion en apparence artificielle ? Deux raisons à cela.

★

Réciproquement, si $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, est-ce que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$? Pensez aussi au cas d'une suite positive, sinon c'est trop facile de répondre à cette question.

Exemple 7.

✓

Est-on toujours certain qu'à la fin du calcul de $u_{n+1}^{\gamma}-u_n^{\gamma}$, un bon choix de γ permet de conclure ?

★

- Comprendre pourquoi cette méthode permet éventuellement de démontrer qu'une application n'est pas contractante (le sinus en l'occurrence).
- Varier les exemples. Prendre notamment des cas de relations $u_{n+1}=f(u_n)$ où : 1° le premier terme non nul du développement limité de f n'est pas x, mais αx, ou plus généralement αx^{β} avec $\beta>1$, 2° le point fixe vers lequel $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge n'est pas 0. Tout cela afin de voir la souplesse ou la limite de la technique.

☢

J'affirme que cette méthode est un analogue discret de l'inégalité des accroissements finis. Pourquoi ?

Exemple 8. ♡

✓

- Revoir si besoin comment on a obtenu l'existence de γ.
- Comprendre pourquoi j'ai poussé le développement de $u_{n+1}-u_n$ de sorte à avoir deux termes, alors que l'équivalent n'en nécessite qu'un seul.
- Pour vous assurer que vous avez compris le principe : raffiner encore le développement.
- Reprendre l'exemple 6, et obtenir son développement asymptotique par le lien suite-série.

★ Se convaincre d'une limite de cette méthode : elle nécessite d'obtenir au moins un équivalent (c'est-à-dire le premier terme du développement asymptotique) par un autre moyen. Pourquoi ?

Après votre révision de cette partie

1. **Lecture conseillée.** *Méthodes*, *Étudier des suites en passant par des séries télescopiques.*
2. Récapitulez toutes les façons d'avoir des équivalents ou développements asymptotiques de sommes partielles et restes. Selon votre recul, vous en trouverez entre deux et quatre. Idéalement : exercer toutes ces méthodes sur des exemples simples (séries de Riemann...), pour discuter de leurs mérites comparés.
3. Faire les *Savoir-faire à vérifier* sur les développements asymptotiques.

1.2 Familles sommables

1.2.1 Ensembles dénombrables

Motivation de cette partie

Nous aurons besoin cette année de savoir calculer des sommes indexées par des ensembles infinis qui ne sont pas nécessairement $\mathbb{N}$ (par exemple lorsqu'on réalisera des expériences aléatoires avec éventuellement, pour résultats possibles, tous les entiers relatifs). Nous pouvons toutefois nous y ramener si l'on peut « numéroter » ces ensembles infinis par des entiers naturels : nous formalisons dans cette section ce qu'est un tel ensemble infini.

Définition 5 (Ensemble dénombrable, au plus dénombrable)**.**

✓ Relier cette définition au fait qu'un ensemble dénombrable soit un ensemble dont on peut numéroter les éléments.

Proposition 6 (Un ensemble au plus dénombrable est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$)**.**

✓

— Pourquoi l'existence d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et une de ses parties peut paraître contre-intuitive au commun des mortels ? Quels autres ensembles vérifient ceci ? Cela les caractérise-t-il ?

— Se convaincre que le minimum de $A \setminus \{u_0, \dots, u_n\}$ existe toujours. Cela serait faux avec une partie finie ou une partie de $\mathbb{Z}$: quelles propriétés de A et $\mathbb{N}$ interviennent ?

— La démonstration de l'item (b) semble suggérer que la relation « être en bijection avec » est transitive. Est-ce que cela définit une relation d'équivalence ? Il y a un piège subtil.

★ Achever de vérifier que l'application proposée est bijective, si je ne l'ai pas fait en cours.

Remarque.

✓

— Expliquer pourquoi, si $A \subseteq B$ et si B est dénombrable, alors A aussi. Que dire si A est indénombrable ? Se convaincre que tout cela est intuitif.

★

— À l'inverse, peut-on caractériser les ensembles E pour lesquels il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans E ?

— Et s'il existe une surjection de E dans $\mathbb{N}$, est-ce intéressant ? Et s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans E ?

Proposition 7 ($\mathbb{Z}$ est dénombrable)**.**

✓

— Pourquoi l'existence d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ peut paraître contre-intuitive au commun des mortels ?

— Vérifier HONNÊTEMENT que les applications proposées sont réciproques l'une de l'autre, et surtout se demander : comment pouvait-on « deviner » ces bijections ?

— Essayer de proposer au moins deux autres possibilités de bijections $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Il n'y a donc pas unicité de la bijection : et plus généralement ? Existe-t-il des ensembles dénombrables E pour lesquels la bijection $f : \mathbb{N} \to E$ est unique ?

Proposition 8 (Produit cartésien d'ensembles dénombrables, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable)**.**

✓

- Si vous voulez peaufiner votre culture scientifique générale, faites des recherches sur les « hôtels de Hilbert », qui sont une vulgarisation de la dénombrabilité de $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
- Pourquoi ce sens de parcours en diagonale ? Pourquoi pas ligne par ligne, ou colonne par colonne ? Donner néanmoins une situation où cette façon de faire fonctionne.
- Pour généraliser ce que j'ai fait avec $E_1\times E_2$ et $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$: vérifier que si E et F sont en bijection, alors l'un est dénombrable si et seulement si l'autre l'est.
- Qu'est-ce que $\mathbb{N}^p$ pour $p=0$, au juste ?

★

- Comprendre les définitions de f et g. Cela me semble impossible si l'on n'identifie pas les différentes quantités en jeu : 1° la numérotation des diagonales parcourues, 2° le nombre d'éléments parcourus sur les n premières diagonales, 3° le k^{e} élément de la n^{e} diagonale, 4° le k^{e} élément de $\mathbb{N}^2$. Beaucoup de choses à ne pas confondre !
- Peut-on *naturellement* expliquer qu'il y a $\binom{n+1}{2}$ éléments sur les n premières diagonales parcourues ?
- Achever la démonstration, si je ne l'ai pas fait en cours.
- Proposer d'autres parcours possibles de $\mathbb{N}^2$, et juger de la difficulté à expliciter les bijections réciproques.
- Se demander si l'on peut adapter la démonstration pour justifier que $\mathbb{Q}$ est dénombrable (puisque, après tout, tout élément de $\mathbb{Q}$ est représenté par deux entiers, et diffère donc peu de $\mathbb{Z}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})$.

☢

Est-ce qu'un produit cartésien dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable ? Raisonner sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Et un produit cartésien dénombrable d'ensembles finis ?

Remarque. Cas « au plus » dénombrable.

✓ Vérifier cette affirmation. Peut-on faire une démonstration qui englobe tous les cas ?

Proposition 9 (Réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables)**.**

✓ Pourquoi ce choix de bijection définie sur $I\times\mathbb{N}$? Ne pouvait-on pas, par exemple, considérer l'application de $\bigcup_{i\in I} E_i$ dans I, qui à x associe un indice i tel que $x\in E_i$? Cette construction semble plus simple, puisque I est ensuite immédiatement en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Pourquoi ne l'ai-je pas suivie ?

Corollaire 10 ($\mathbb{Q}$ est dénombrable)**.**

✓ Retenir l'idée derrière le choix des ensembles finis, pour savoir reconnaître d'autres situations où elle s'applique.

Proposition 11 ($\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable)**.**

✓

- Réviser si besoin comment on démontre l'existence et la presque unicité du développement décimal. Dans quel cas n'y a-t-il pas unicité, et pourquoi ?
- Pourquoi ce développement de x est bien son développement décimal *propre* ?
- Pouvait-on faire d'autres choix de x_k ? Qu'est-ce qui est réellement important ?
- Pourquoi la valeur de x_k doit-elle être choisie en fonction de $a_{k,k}$? Qu'est-ce qui ne marcherait pas si la valeur de x_k dépendait uniquement d'un certain $a_{i,k}$ avec $i\neq k$?
- Pourquoi appelle-t-on cet argument le principe *diagonal* de Cantor ? Où voyez-vous une diagonale ?
- Pourquoi cette prudence sur le choix du développement propre ? Si je ne fixe pas ce choix, qu'est-ce qui peut potentiellement poser problème dans ce raisonnement ?
- Se demander pourquoi le même raisonnement ne démontrerait pas que $\mathbb{Q}$ est indénombrable : après tout, les rationnels aussi admettent un développement décimal. Où apparaît une propriété essentielle des réels ?
- Proposer une autre justification de l'implication « $]0,1[$ indénombrable $\Longrightarrow \mathbb{R}$ indénombrable » que celle que j'ai proposée.
- Pourquoi suis-je passé de $[0,1[$ à $]0,1[$? Question duale : pourquoi n'ai-je pas raisonné avec $]0,1[$ dès le début ?
- Ma bijection entre $]0,1[$ et $\mathbb{R}$ peut paraître tordue. Se convaincre qu'elle s'obtient méthodiquement.

☢

Une fois que vous avez compris pourquoi on parle de principe « diagonal » : songer à d'autres ensembles dont on pourrait démontrer l'indénombrabilité ainsi.

1.2.2 Familles sommables à valeurs dans $[0, +\infty]$

Motivation de cette partie

Comment calculerait-on $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+1}$ ou $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap]1,+\infty[} \frac{1}{q^2}$, $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{m^2+n^2}$, etc. ? On donne plusieurs résultats pour y parvenir. Si les définitions et démonstrations utilisent des propriétés éventuellement très théoriques des bornes supérieures, on s'attardera sur les *techniques* de calcul pratique et remarquera que *tout se passe comme pour les sommes à support fini.*

Définition 12 (Somme d'une famille de $(\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})^I$, sommabilité)**.**

↘ I déf. 2

✓

— Se convaincre *heuristiquement* qu'au vu de cette définition, la valeur de la somme ne devrait pas dépendre de l'ordre dans lequel on somme les x_i. Ne pas chercher à produire une démonstration à ce stade.
— Remarquer qu'une borne supérieure analogue est déjà apparue dans le cours d'intégration. Regarder quelles en furent les conséquences au chapitre I : on peut s'attendre à ce qu'elle serve à la même chose ici.
— Réviser si besoin les opérations licites dans $[0, +\infty]$. Les démontrer si cela n'a pas encore été fait.
— Pourquoi inclut-on $+\infty$ aux valeurs possibles des x_i ? Se reposer la question plus tard éventuellement.

★ Pourquoi cette définition est-elle seulement donnée pour des réels positifs ?

Proposition 13 (Cas I fini, $I = \mathbb{N}$)**.**

✓

— Se convaincre que c'est vrai pour I fini. Ce n'est vraiment pas compliqué (mais cela permet déjà de comprendre pourquoi la positivité était essentielle dans la définition, si vous n'aviez pas encore de réponse à cette question).
— Où intervient la positivité des x_i ? (Au moins à deux reprises.)
— Comme d'habitude, lorsqu'on veut montrer une égalité avec une borne supérieure, on utilise deux inégalités issues de sa définition (comme majorant, et comme *plus petit* majorant). Regarder comment on les emploie.
— Ne voyez-vous pas une analogie entre l'égalité du cas $I = \mathbb{N}$, et une partie de la définition-proposition 2 du chapitre I ? Si oui, proposer une généralisation de cette égalité. Et la démontrer.

Théorème 14 (Théorème de sommation par paquets, cas positif)**.**

✓

— En appliquant à tort le théorème avec $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$, vérifier que la positivité est essentielle.
— Se convaincre que les deux hypothèses sur les I_k sont raisonnables : si on enlève l'hypothèse *disjoints*, quelle relation devrait-on avoir entre les deux sommes de l'énoncé, si l'on se base sur le cas des sommes classiques ? Et si les I_k sont disjoints mais de réunion plus petite que I ? Vous pourrez vérifier que la démonstration du théorème contient des éléments suffisants de preuve pour démontrer ce que vous conjecturez là.
— Pourquoi, intuitivement, faut-il que les I_k soient disjoints ? Et que leur réunion donne I ? Chercher ensuite où cela est utilisé dans la démonstration.
— Comprendre la minoration $\mathrm{card}(J) \geqslant \mathrm{card}\,\{k \in K \mid J \cap I_k \neq \emptyset\}$ (comment a-t-on simplifié la somme ?). Vérifier qu'on n'y fait rien d'illicite, bien que certains termes de la somme puissent éventuellement être infinis. Pourquoi la vérification de la finitude de ce cardinal est-elle essentielle ?
— Chercher où interviennent les deux hypothèses sur les I_k : le fait qu'ils soient *disjoints* et que la réunion soit I.

Corollaire 15 (Propriétés de base)**.**

✓

— Se convaincre que les propriétés de restriction et de croissance sont intuitives.
— Proposer une généralisation de la formule du changement d'indice quand φ est seulement injective.
— Prendre $I = \mathbb{N}$ et φ définie sur $\mathbb{N}$ par $n \mapsto n+1$ (ou plus généralement $n \mapsto n+a$ avec $a \in \mathbb{N}$). Vérifier qu'elle est injective. Que donne la formule du changement d'indice dans ce cas ? Que reconnaît-on de classique ? Conclure qu'on ne fait que généraliser un résultat que vous connaissiez déjà.
— Prendre $I = \mathbb{Z}$ et $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $n \mapsto -n$. Pourquoi est-ce bijectif ? Que donne la formule dans ce cas ? Pourquoi le résultat obtenu est-il logique ?
— Dans la démonstration de la formule du changement d'indice, où apparaît-il que φ soit injective ?
— Se convaincre que la formule du changement d'indice assure bien que l'écriture : $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$, quand I est dénombrable, ne dépend pas du choix de la bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I$.
— Démontrer ces propriétés sans utiliser le théorème de sommation par paquets, sauf la linéarité. C'est facile.

★

- Démontrer la propriété $\sup(aA) = a\sup(A)$ utilisée, si vous ne l'avez pas déjà fait au chapitre I.
- Démontrer la propriété de linéarité sans utiliser le théorème de sommation par paquets.
- Nous n'avons démontré que l'additivité avec le théorème de sommation par paquets. Pouvait-on démontrer la propriété de linéarité plus générale d'un seul coup avec ce théorème ?

Mise en garde 1.

☢

- Définir rigoureusement la permutation utilisée.
- Trouver d'autres identités absurdes en changeant la permutation. Vous pouvez en fait obtenir n'importe quel réel après permutation convenable.

Proposition 16 (Le support d'une famille sommable est au plus dénombrable)**.**

✓

- Vérifier rigoureusement que la réunion donne bien le support de la famille.
- Le choix du $\frac{1}{n}$ est-il important ?
- À votre avis, si l'on tient absolument à définir une notion de somme indexée par un ensemble non dénombrable, que fait-on ? (Cette question a une réponse bien établie et vous avez les clés pour répondre.)

☢ Peut-on aller plus loin en étendant aux familles sommables le fait que le terme général d'une série convergente tende vers 0 ? Il faut déjà donner un sens à une telle phrase quand $I \neq \mathbb{N}$.

Exemple 9.

✓

- Que donne $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |n|$? Est-ce que $(n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable ?
- Être sûr d'avoir bien compris pourquoi l'écriture intuitive $\sum\limits_{k\in 2\mathbb{N}} x_k = \sum\limits_{\ell=0}^{+\infty} x_{2\ell}$ est bien justifiée.
- En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_{-n}$ convergent.
- Regardez ce que donnent les sommes usuelles lorsqu'on somme sur $\mathbb{Z}$: géométriques, Riemann, télescopiques...

Exemple 10.

✓

- Généraliser aux classes de congruence modulo n'importe quel entier.
- L'exemple dit qu'on aurait un problème en sommant par paquets ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$: pourquoi ?

Exemple 11.

✓ Réfléchir à ce qui fait l'efficacité de ce choix de paquets. L'appliquer aux sommes de Riemann pour mieux voir.

★ Généraliser à l'étude de toutes les séries de Bertrand $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\beta(\ln(n))^\alpha}$.

Corollaire 17 (Suite exhaustive de parties de I)**.**

★ Comparer avec la démonstration du résultat analogue dans le cadre de l'intégration. Pouvait-on imiter les deux démonstrations ? (La question peut se poser dans les deux sens : imiter la démonstration de ce chapitre pour avoir une nouvelle preuve dans le cas intégral, et inversement.)

Corollaire 18 (Théorème de Fubini positif)**.**

✓

- Se représenter *visuellement* les paquets.
- Regarder ce que l'on obtient en variant les paquets. Une interprétation visuelle vous permettra peut-être de mieux voir comment recouvrir $I \times J$ naturellement.

Corollaire 19 (Produit de deux sommes, cas positif)**.**

✓

— Éventuellement écrire les étapes de la démonstration avec I et J petits (ou informellement avec des points de suspension) pour voir pourquoi l'usage de la linéarité pour « sortir » $\sum_{j\in J} y_j$ est naturel.

— Prendre $I = J$. Que donne le produit $\left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{i\in I} y_i\right)$ si l'on n'est pas prudent ? Vérifier par une écriture informelle (I petit, points de suspension...) que la formule tentante à proposer est fausse. Comprendre alors cet avertissement : *éviter de nommer de la même manière les deux indices de sommation en cas de produit.*

1.2.3 Familles sommables de nombres complexes

Motivation de cette partie

On étend la notion de somme aux familles de nombres complexes, ce qui nécessite un peu plus de travail parce qu'on ne peut plus parler de borne supérieure dans $\mathbb{C}$. On constatera que les théorèmes sur les familles de $[0, +\infty]$ restent valables *à condition de rajouter une hypothèse de sommabilité.* Les commentaires de cette partie sont faits sous l'hypothèse que je n'ai PAS défini la somme d'une famille de $\mathbb{C}^J$ avec des suites de Cauchy (cela dépendra de vous le jour J).

Définition 20 (Famille de $\mathbb{C}^J$ sommable, ensemble $\ell^1(J)$).

✓

— À quoi cette définition vous fait-elle penser, que vous avez déjà croisé dans un chapitre antérieur ? Si vous le voyez, alors vous savez déjà à quoi vous attendre dans la suite du cours.

— À quoi vous fait penser la notation $\ell^1(J)$?

— Pourquoi n'a-t-on pas la même définition que dans le cas réel positif ? J'affirme que même avec une famille de $\mathbb{R}^I$ cela poserait problème. Et même de $(\mathbb{R}_-)^I$, d'ailleurs.

★ S'interroger sur la structure de $\ell^1(J)$: anneau, corps, espace vectoriel ?

Exemple 12.

✓

— Pourquoi ai-je exclu $i = 0$ et $j = 0$ de l'indexation ?

— Une fois arrivé à l'expression $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|z|^i}{1-|z|^i}$: chercher un autre moyen d'en déduire la finitude de la somme.

Proposition 21 (Théorème de comparaison).

✓ Pourquoi le théorème de comparaison n'a pas d'autre formulation, avec des équivalents et des petits et grand o ?

Définition-Proposition 22 (Somme d'une famille de $\ell^1(J)$).

✓ Pourquoi ne donne-t-on pas de définition dans le cas non sommable, contrairement à ce qu'on fit dans $[0, +\infty]$?

★ S'inspirer de la démonstration du chapitre I que l'intégrabilité implique la convergence, pour proposer une autre définition de la somme d'une famille de $\ell^1(J)$: montrer que pour toute suite exhaustive de parties finies $(J_n)_{n\geqslant 0}$ de J, la suite $\left(\sum_{j\in J_n} x_j\right)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy (donc converge) et que sa limite est la même peu importe la suite exhaustive choisie. On *définit* alors $\sum_{j\in J} x_j$ comme étant cette limite commune. Quel est l'avantage de définir ainsi la somme ? (Se poser éventuellement la question après avoir tenté de l'utiliser pour démontrer les propriétés de base. Mais il y a d'autres arguments *a priori*.) Est-ce que cette définition permet bien de retrouver les relations de cette définition-proposition, notamment le lien avec la partie réelle et la partie imaginaire ?

Proposition 23 (Propriétés de base).

✓

— Pourquoi la propriété de restriction n'est plus la même que dans le cas des familles de $[0, +\infty]$?

— Démontrer *en deux lignes* l'approximation par les sommes finies dans le cas d'une famille de $[0, +\infty]^I$.

★	Démontrer toutes les propriétés laissées au lecteur, sauf l'inégalité triangulaire dans le cas complexe.
☢	Démontrer l'inégalité triangulaire dans le cas complexe.

Théorème 24 (Théorème de sommation par paquets)**.**

✓

- On aurait envie d'affirmer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n = 0$: vérifier avec le théorème de sommation par paquets que cette égalité, si elle était vraie, donnerait des contradictions.
- Compléter la démonstration en faisant le cas complexe. Comme elle est proche du cas réel, cela permettra de voir si vous en avez compris la teneur.

Corollaire 25 (Théorème de Fubini)**.**

✓

- Pourquoi ai-je sauté sa démonstration ? N'y a-t-il rien de différent dans le raisonnement ?
- Bien prendre le temps de traduire ce que signifie la sommabilité de $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$. Plus particulièrement pour $I = J = \mathbb{N}$. Cela prend quelques secondes et c'est important pour éviter une erreur très fréquente chez ceux qui veulent aller trop vite : non, on ne doit pas vérifier que $\sum_{n\geqslant 0}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$ converge absolument !

★

- Chercher des contre-exemples en l'absence de sommabilité.
- Chercher des contre-exemples lorsqu'on a l'hypothèse alternative et fausse dont je parle ci-dessus.

Corollaire 26 (Produit de deux sommes)**.**

✓	Pourquoi ai-je sauté sa démonstration ? N'y a-t-il rien de différent dans le raisonnement ?
★	Pour $I = J = \mathbb{N}$, trouverez-vous un cas où $(x_i y_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable bien que $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} y_n$ convergent ? Si vous ne voyez pas : réfléchissez éventuellement après la mise en garde plus bas.

Corollaire 27 (Produit de Cauchy)**.**

✓

- Obtenir *informellement* cette égalité, en écrivant avec des points de suspension les deux sommes du membre de gauche, puis en distribuant le produit comme on le ferait pour des sommes finies. Voir comment regrouper les termes pour reconnaître le membre de droite. Si vous êtes soignés, les termes regroupés auront une interprétation visuelle simple.
- Que représentent *visuellement* les paquets choisis, dans $\mathbb{N}^2$ interprété comme un quadrillage dans le plan ?
- Pourquoi cet énoncé est-il formulé avec $I = J = \mathbb{N}$? Ne peut-on pas le généraliser ?

Mise en garde 2.

✓

- J'affirme que le maximum de $x \mapsto (x+1)(n-x+1)$ est *visuel* et peut se trouver de tête. Comment ?
- Produire d'autres contre-exemples du même acabit. Est-ce que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ en fournit un ?

☢ En revanche, *si l'on sait* que le produit de Cauchy converge, y a-t-il l'égalité impliquant les trois sommes ?

Corollaire 28 (L'exponentielle est un morphisme)**.**

✓

- Revoir pourquoi la série exponentielle converge absolument partout.
- Avec ce corollaire, vous pouvez (partiellement) répondre à la question suivante : pourquoi prendre le développement en série de l'exponentielle comme étant sa *définition* est plus satisfaisant que les définitions que vous eûtes en Terminale et 1re année ? (Les chapitres VI, VII, VIII et X fourniront d'autres éléments de réponse.)

☢ On voit que finalement, la propriété de morphisme de l'exponentielle se résume à la formule du binôme de Newton. Est-ce que réciproquement, si l'on sait que l'exponentielle est un morphisme, on peut retrouver la formule du binôme ? (Il est sans doute trop tôt pour cette question.)

Exemple 13.

★ Trouver la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n$ par d'autres moyens. Ils ne manquent pas : 1° dériver une somme géométrique et passer à la limite convenablement (attention, dériver nécessite de se restreindre à une variable réelle, mais avec un argument supplémentaire on peut inclure le cas complexe), 2° effectuer un bête changement d'indice, 3° interpréter $(n+1)q^n$ comme $q^n + \cdots + q^n$ et sommer intelligemment par paquets, 4° effectuer une transformation d'Abel. Et toutes les méthodes sont instructives ! sauf 2° à la rigueur.

Conclusion.

✓ Détailler la première étape. Comment montre-t-on en pratique qu'une famille est sommable ou ne l'est pas, hormis dans le cas d'un calcul direct possible ? Quelques éléments de réponse, hormis ce qui est déjà illustré dans les exemples du cours : combiner le théorème de Fubini et le théorème de comparaison des séries à termes positifs ; raisonner sur des sous-familles, etc.

Exemple 14.

✓
- Comment décide-t-on si l'on somme d'abord sur n, ou sur k ? Est-ce indifférent ?
- J'ai montré la sommabilité par un calcul explicite. À partir de la somme : $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)}$, conclure autrement.
- Varier les exemples pour montrer qu'on a bien compris : prendre $\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{a^n}{k^{bn}}$ avec différents choix de a et b (remarquer que certains choix de a et b ne vont pas donner une famille sommable, attention).

Après votre révision de cette partie

1. Au-delà des définitions abstraites, assimiler les principales applications du théorème de sommation par paquets aux familles indexées sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$; se convaincre que cela donne des identités *intuitives* et qu'on saura réexploiter ; enfin, retenir la démarche expliquée en fin de section.
2. Faire le *Savoir-faire* sur les familles sommables.

2 Savoir-faire à vérifier

Les principaux acquis à vérifier sont :

Séries numériques.

✓ 1. Étudier la nature d'une série. (🗎 C) ☐

✓ 2. Calculer des sommes simples (grâce aux sommes télescopiques, géométriques, exponentielles, etc.). (🗎 C) ☐

★ 3. Obtenir un équivalent asymptotique de reste ou de somme partielle, ou de suite *via* le lien suite-série. (🗎 C) ☐

☢ 4. Démontrer et utiliser la transformation d'Abel. (🗎) ☐

Familles sommables.

✓ 1. Utiliser les théorèmes de Fubini et de sommation par paquets. ☐

L'icône « (🗎) » signifie que les documents *Méthodes* donnent des compléments sur ces savoir-faire.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices exerçant à ce savoir-faire.

Séries numériques.

✓ Déterminer la nature d'une série.

Exemples. Déterminer la nature des séries de termes généraux :

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, (b) $\dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}$, (c) $\dfrac{n!(n+1)!(n+2)!}{(3n)!}$, (d) $\dfrac{1}{e^{n^2}}$,

(e) $\dfrac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$, (f) $\dfrac{\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\ln(n)}}$, (g) $\dfrac{(-1)^n\sin(\ln(n))}{n^2}$, (h) $e^{-(\ln(n))^2}$,

(i) $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$, (j) $(-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n}$, (k) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$ (où $a>0$), (l) $e^{-\sqrt{\ln(n)}}$,

(m) $\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}$, (n) $(-1)^n\dfrac{x^n}{n+1}$, (o) $\dfrac{1}{n(\ln(n))^3}$.

✓ Calculer des sommes simples (grâce aux sommes télescopiques, géométriques, exponentielles, etc.).

Exemples. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{2^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{2^n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n(n^2+3n+1)}{n!}$, (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}\right)$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

★ Obtenir un équivalent asymptotique de reste ou de somme partielle, ou de suite *via* le lien suite-série.

Exemples.

1. Donner un équivalent asymptotique quand $N \to +\infty$ de :

   (a) $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(n)}{n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+e^{-n^2}}$, (e) $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} e^{-n^2}$.

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par : $u_0 \in]0,e]$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. Donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

☢ Utiliser la transformation d'Abel.

Exemples. Dans les trois questions suivantes, nous utiliserons la transformation d'Abel.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Montrer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$ (on peut admettre la convergence).
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ converge.

Familles sommables.

✓ Utiliser les théorèmes de Fubini et de sommation par paquets.

Exemples.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$. Montrer que la famille $\left(\dfrac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.
2. Soit $x \in [0,1[$. Montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{1-x^{2n+1}}$.
3. On admet : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
4. Calculer les sommes suivantes :

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n}, \quad \text{(b)} \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{p^q}{e^{2p}q!}, \quad \text{(c)} \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2} \frac{pq}{(p+q)^5}.$$

   On admet : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Vous aurez besoin d'une autre somme calculée ci-dessus.

Séries numériques

✓ Déterminer la nature d'une série. □

Réponse.

(a) Nature de $\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right)=\frac{1}{n}\left(\cancel{1}+\frac{1}{2n^2}-\cancel{1}+\frac{1}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^3}>0$$

et la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ converge, donc la série $\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ converge d'après le théorème de comparaison de séries à termes positifs.

(b) Nature de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\ln(n))^2}{n^2}$. On utilise la méthode de comparaison aux séries de Riemann. On a $n^\alpha\frac{(\ln(n))^2}{n^2}=n^{\alpha-2}(\ln(n))^2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ pour tout $\alpha<2$. Prenons α tel que $\alpha<2$ et $\alpha>1$, par exemple : $\alpha=\frac{3}{2}$. Alors ce qui précède montre que :

$$\frac{(\ln(n))^2}{n^2}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right);$$

or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge parce que son exposant est $\frac{3}{2}>1$, donc par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\ln(n))^2}{n^2}$ converge.

(c) Nature de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n!(n+1)!(n+2)!}{(3n)!}$. Posons $u_n=\frac{n!(n+1)!(n+2)!}{(3n)!}$ (notons que $u_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$). Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\cancel{(n+1)!}\cancel{(n+2)!}(n+3)!(3n)!}{n!\cancel{(n+1)!}\cancel{(n+2)!}(3n+3)!}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^3}{27n^3}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{27}<1,$$

donc la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge d'après la règle de D'Alembert.

(d) Nature de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{e^{n^2}}$. D'après le théorème des croissances comparées, on a : $\frac{1}{e^{n^2}}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge (l'exposant est $2>1$) donc $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{e^{n^2}}$ converge d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs. La règle de D'Alembert s'applique aussi avec pertinence ici.

(e) Nature de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$. Il serait naturel ici d'utiliser la règle de D'Alembert, mais nous tombons sur le cas d'incertitude (une limite égale à 1). Nous allons donc procéder classiquement en cherchant un équivalent asymptotique du terme général, et ce grâce à la formule de Stirling. On a :

$$\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\underset{n\to+\infty}{\sim}3^{3n}\frac{(2\pi n)^{3/2}\left(\frac{n}{e}\right)^{3n}}{(6\pi n)^{1/2}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2\pi}{\sqrt{3}}n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

Puisque le terme général ne converge pas vers 0, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$ diverge grossièrement.

(f) Nature de $\sum_{n\geqslant 2}\frac{\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\ln(n)}}$. On a : $\frac{\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\ln(n)}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{n\ln(n)}}>0$. On compare aux séries de Riemann : on a $n^\alpha\frac{1}{\sqrt{n\ln(n)}}=\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\ln(n)}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ pour tout $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$, tandis que $n^\alpha\frac{1}{\sqrt{n\ln(n)}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ pour tout

$\alpha > \frac{1}{2}$. Prenons α tel que $\alpha > \frac{1}{2}$ et $\alpha \leqslant 1$, par exemple : $\alpha = 1$. Pour tout n assez grand, on a donc $n\dfrac{1}{\sqrt{n\ln(n)}} \geqslant 1$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\sqrt{n\ln(n)}} \geqslant \frac{1}{n} > 0,$$

or la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n\ln(n)}}$ diverge, et également par comparaison la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\ln(n)}}$ diverge aussi.

(g) Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \sin(\ln(n))}{n^2}$. Elle converge absolument par comparaison (le terme général est dominé par $\frac{1}{n^2}$), donc elle converge.

(h) Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-(\ln(n))^2}$. On utilise la « méthode $n^\alpha u_n$ » pour comparer ce terme au terme général d'une série de Riemann. On a : $n^\alpha e^{-(\ln(n))^2} = e^{-(\ln(n))^2+\alpha\ln(n)}$. L'argument de l'exponentielle tend vers $-\infty$ indépendamment de la valeur de α ; si l'on prend $\alpha = 2$, on a donc $n^2 e^{-(\ln(n))^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc : $e^{-(\ln(n))^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On conclut comme plus haut, par comparaison à une série de Riemann convergente.

(i) Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$. Semblablement :

$$\begin{aligned}
\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1}) &= \cos\left(\pi n\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right) && \text{(on fait apparaître } \sqrt{1+u} \text{ avec } u\to 0\text{)}\\
&= \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) && \text{(on utilise les formules } \cos(x+n\pi) = (-1)^n\cos(x) \text{ et } \cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)\text{)}\\
&= \frac{3\pi}{8}\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) && \text{(car } \sin(u) = u + \underset{u\to 0}{o}(u^2)\text{)}
\end{aligned}$$

donc sa série converge par un raisonnement analogue.

(j) Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 3} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 3} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ est alternée et vérifie le théorème spécial des séries alternées (la décroissance n'est pas évidente : pour la démontrer, on montre que l'application $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ décroît sur $[e,+\infty[$, étant de dérivée $x \mapsto \frac{1-\ln(x)}{x^2}$), donc elle converge.

(k) Nature de $\sum\limits_{n>-a} \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$. On a, après calculs :

$$\ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\sum\limits_{n\geqslant 1} \text{ converge}} - \frac{a+1}{2n} + \underbrace{\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{\sum\limits_{n\geqslant 1} \text{ converge (abs.)}},$$

et la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge ; donc $\sum\limits_{n>-a} \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$ converge uniquement pour $a = -1$.

(l) Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-\sqrt{\ln(n)}}$. Pour tout $n \geqslant 3$, on a $\ln(n) \geqslant 1$, donc $\ln(n) \geqslant \sqrt{\ln(n)}$. On en déduit : $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(n)}} \geqslant \sum\limits_{n=3}^{+\infty} e^{-\ln(n)} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-\sqrt{\ln(n)}}$ diverge.

(m) Nature de $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}\right)$. On a, pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}-1\right)=\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}+\underbrace{\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{=v_n}$$

et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge d'après le théorème spécial des séries alternées, donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}\right)$ est de même nature que $\sum_{n\geqslant 1}v_n$; or cette série converge absolument parce que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}>1$), donc la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}\right)$ converge.

(n) Nature de $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}$. Posons $u_n=\frac{x^n}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Comme $x\geqslant 0$, on a $u_n\geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et donc cette série est bien alternée. Vérifions les hypothèses du théorème spécial des séries alternées. On a : $0\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. Il reste à vérifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante : pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{n+2}\cdot x\leqslant 1\cdot 1\leqslant 1$, donc $u_{n+1}\leqslant u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$: d'où la décroissance.

Puisque $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ est alternée, et que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante convergeant vers 0, d'après le théorème spécial des séries alternées la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge.

(o) Nature de $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln(n))^3}$. On effectue une comparaison série-intégrale. L'application $t\mapsto\frac{1}{t(\ln(t))^3}$ est décroissante et positive sur $]1,+\infty[$ (la positivité sert à pouvoir manipuler *a priori* la somme et l'intégrale ci-dessous), donc :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^3}=\sum_{n=3}^{+\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n(\ln(n))^3}\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=3}^{+\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^3}=\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^3}=\left[-\frac{1}{2(\ln(t))^2}\right]_2^{+\infty}=\frac{1}{2(\ln(2))^2}<+\infty,$$

donc la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln(n))^3}$ converge.

✓ Calculer des sommes simples (grâce aux sommes télescopiques, géométriques, exponentielles, etc.). ☐

Réponse.

(a) Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{2^n}$. C'est une somme géométrique de raison $\frac{e^{i\theta}}{2}$, de module $\frac{1}{2}<1$. Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{2^n}=\frac{1}{1-\frac{e^{i\theta}}{2}}.$$

(b) Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{2^n}$. C'est la partie réelle de la somme ci-dessus. Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{2^n}=2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2-e^{i\theta}}\right)=2\mathrm{Re}\left(\frac{2-e^{-i\theta}}{|2-e^{i\theta}|^2}\right)=\frac{4-2\cos(\theta)}{5-4\cos(\theta)}.$$

Pour le calcul de $\left|2-e^{i\theta}\right|^2$, il est plus commode d'utiliser l'identité suivante (que je vous laisserai vérifier) : $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2$, $|z\pm z'|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right)+|z'|^2$ (remarquez bien qu'il y a $\bar{z}$ et non z dans la partie réelle). Cette formule est à préférer à la définition du module lorsque, par exemple, z et z' sont des réels ou des exponentielles de la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ (parce que dans ces cas-là, le calcul des différents modules est immédiat). Ici, on obtient : $\left|2 - e^{i\theta}\right|^2 = |2|^2 - 2\mathrm{Re}\left(2e^{i\theta}\right) + \left|e^{i\theta}\right|^2 = 4 - 4\cos(\theta) + 1 = 5 - 4\cos(\theta)$.

(c) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$. Après une décomposition en éléments simples, on trouve :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{1}{3n} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{6(n+3)},$$

et donc, pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+3} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n'=2}^{N+1} \frac{1}{n'} + \frac{1}{6}\sum_{n'=4}^{N+3} \frac{1}{n'}$$

Comme $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$, on obtient, pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{6}\sum_{n=4}^{N+3} \frac{1}{n} \\
&= \cancel{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n}} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{N+1}\right) \\
&+ \frac{1}{6}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3}\right) \\
&= \frac{7}{36} + \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N}\right),
\end{aligned}$$

ce dont on déduit, quand $N \to +\infty$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{7}{36}$.

(d) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n(n^2+3n+1)}{n!}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n(n^2+3n+1)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n\left(n(n-1)+4n+1\right)}{n!} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{(n-2)!} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \\
&= 9\sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{3^{n'}}{(n')!} + 12\sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{3^{n'}}{(n')!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \\
&= 22e^3.
\end{aligned}$$

(e) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}\right)$. C'est plus subtil, mais si on essaie de calculer quelques sommes partielles on comprend les simplifications qui opèrent, et qui dépendent de la parité des indices (nous vous recommandons de le faire, avant de lire la suite de cette solution). Soit $N \geqslant 1$. Alors, en séparant les termes pairs et impairs :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{2N} \ln\left(\frac{n+(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}\right) &= \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right) + \sum_{k=1}^{N-1} \ln\left(\frac{(2k+1)-1}{(2k+1)+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\ln(2k+1) - \ln(2k-1)\right) + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\ln(2k) - \ln(2k+2)\right).
\end{aligned}$$

Les deux sommes sont télescopiques. On a donc : $\displaystyle\sum_{n=2}^{2N} \ln\left(\frac{n+(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}\right) = \ln(2N+1) + \ln(2) - \ln(2N) = \ln\left(1 + \frac{1}{2N}\right) + \ln(2) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$. De même si l'on somme jusqu'à $2N+1$ au lieu de $2N$. On en déduit : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}\right) = \ln(2)$.

(f) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$. On rappelle l'existence de $\gamma\in\mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$. (constante d'Euler). On doit savoir la démontrer (et comprendre pourquoi je vais en avoir besoin ici).

Soit $N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. On effectue une décomposition en éléments simples, et on trouve :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-2\sum_{\substack{\ell=3\\ \ell\text{ impair}}}^{2N+1}\frac{1}{\ell}.$$

Or : $\displaystyle\sum_{\substack{\ell=3\\ \ell\text{ impair}}}^{2N+1}\frac{1}{\ell}+\sum_{\substack{\ell=3\\ \ell\text{ pair}}}^{2N+1}\frac{1}{\ell}=\sum_{\ell=3}^{2N+1}\frac{1}{\ell}$, donc : $\displaystyle\sum_{\substack{\ell=3\\ \ell\text{ impair}}}^{2N+1}\frac{1}{\ell}=\sum_{\ell=3}^{2N+1}\frac{1}{\ell}-\sum_{\substack{\ell=3\\ \ell\text{ pair}}}^{2N+1}\frac{1}{\ell}=\sum_{\ell=3}^{2N+1}\frac{1}{\ell}-\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{2k}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n+1)}&=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-2\left(\sum_{\ell=3}^{2N+1}\frac{1}{\ell}-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k}\right)\\&=u_N+\ln(N)-2\left(u_{2N+1}+\ln(2N+1)-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(u_N+\ln(N)-1\right)\right)\\&=2u_N-2u_{2N+1}+2\ln\left(\frac{N}{2N+1}\right)+2\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}2\gamma-2\gamma+2\ln\left(\frac{1}{2}\right)+2.\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(2n+1)}$ converge, et que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=2\left(1-\ln(2)\right)$.

★ Obtenir un équivalent asymptotique de reste ou de somme partielle, ou de suite *via* le lien suite-série. ☐

Réponse.

1. *(a) Équivalent de* $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$. Soit N au voisinage de $+\infty$. Il est facile de démontrer que l'application $t\mapsto\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$ est décroissante sur $[2,+\infty[$, en tant que produit de deux fonctions décroissantes et POSITIVES (je veux me passer d'un calcul de dérivée). On a donc : $\forall n\geqslant 3$, $\forall t\in[n-1,n]$, $\dfrac{1}{n(\ln(n))^2}\leqslant\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$, et en intégrant cette inégalité et en sommant :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^2}\leqslant\sum_{n=N+1}^{+\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^2}=\int_{N}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^2}=\left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_N^{+\infty}=\frac{1}{\ln(N)}.$$

De même : $\dfrac{1}{\ln(N+1)}\leqslant\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$. Or il est facile de démontrer : $\ln(N+1)\underset{N\to+\infty}{\sim}\ln(N)$. Par le théorème des gendarmes : $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^2}\underset{N\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\ln(N)}$.

(b) Équivalent de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(n)}{n}$. La fonction $x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur $[e,+\infty[$. Une comparaison entre séries et intégrales donne :

$$\forall N\geqslant 3,\quad\int_4^{N+1}\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=4}^{N}\frac{\ln(n)}{n}\leqslant\int_3^{N}\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x,$$

or une primitive de $x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{x}$ est $x\mapsto\dfrac{(\ln(x))^2}{2}$. Partant de là, on arrive facilement à : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(n)}{n}\underset{N\to+\infty}{\sim}\frac{(\ln(N))^2}{2}$ (comme $\dfrac{(\ln(N))^2}{2}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, les premiers termes de la somme sont négligeables).

(c) Équivalent de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$. La fonction $x\mapsto\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est croissante sur $[1,+\infty[$. Pour tout $N\geqslant 1$:

$$\int_1^N\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=2}^{N}\frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\leqslant\int_2^{N+1}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\quad\text{donc : }\ 2e^{\sqrt{N}}-2e\leqslant\sum_{n=2}^{N}\frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\leqslant 2e^{\sqrt{N+1}}-2e^{\sqrt{2}},$$

Or : $\sqrt{N+1}-\sqrt{N}=\dfrac{(N+1)-N}{\sqrt{N+1}+\sqrt{N}}\underset{N\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2\sqrt{N}}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc : $e^{\sqrt{N+1}-\sqrt{N}}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}1$. Par conséquent les deux extrémités de cet encadrement sont équivalents à $e^{\sqrt{N}}$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\underset{N\to+\infty}{\sim}2e^{\sqrt{N}}$.

(d) Équivalent de $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+e^{-n^2}}$. On a : $\dfrac{1}{n^2+e^{-n^2}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}>0$ (vérifier le dernier équivalent, qui n'est pas visible à l'œil nu). Or la série télescopique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ converge par le lien suite-série, donc : $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+e^{-n^2}}\underset{N\to+\infty}{\sim}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{N}$.

Autre méthode : comparaison série-intégrale. On ne peut pas déterminer de primitive de l'application $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+e^{-x^2}}$ à l'aide de fonctions usuelles (et la décroissance n'est pas évidente, bien que vraie), mais on peut utiliser l'encadrement $\dfrac{1}{n^2+1}\leqslant\dfrac{1}{n^2+e^{-n^2}}\leqslant\dfrac{1}{n^2}$, valable pour tout $n>0$, pour estimer $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+e^{-n^2}}$ malgré tout. On a, pour tout $N\geqslant 1$:

$$\int_{N+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\leqslant\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}\leqslant\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+e^{-n^2}}\leqslant\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\leqslant\int_N^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Or : $\displaystyle\int_{N+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=[\arctan(x)]_{N+1}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\arctan(N+1)=\arctan\left(\frac{1}{N+1}\right)$ (pourquoi cette dernière égalité est-elle vraie ?), et : $\displaystyle\int_N^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{N}$. Donc : $\displaystyle\arctan\left(\frac{1}{N+1}\right)\leqslant\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+e^{-n^2}}\leqslant\frac{1}{N}$. On a $\arctan\left(\dfrac{1}{N+1}\right)\underset{N\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{N+1}\underset{N\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{N}$. On en déduit : $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+e^{-n^2}}\underset{N\to+\infty}{\sim}\frac{1}{N}$.

(e) Équivalent de $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty}e^{-n^2}$. On a : $e^{-n^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{-n^2}-e^{-(n+1)^2}$ (c'est la décroissance extrêmement rapide de cette exponentielle qui conduit à conjecturer cet équivalent, qui se démontre ensuite sans peine du fait que : $e^{-(n+1)^2+n^2}=e^{-2n-1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$), et la série télescopique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(e^{-n^2}-e^{-(n+1)^2}\right)$ converge par le lien suite-série, étant donné que $\left(e^{-n^2}\right)_{n\geqslant 0}$ converge (vers 0). Par le théorème de sommation des équivalents : $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty}e^{-n^2}\underset{N\to+\infty}{\sim}\sum_{n=N}^{+\infty}\left(e^{-n^2}-e^{-(n+1)^2}\right)=e^{-N^2}$.

2. L'intervalle $]0,e]$ est stable par $x\mapsto\ln(1+x)$ (l'image par cette application de $]0,e]$ est $]0,1]\subseteq]0,e]$), donc $u_n\in]0,e]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. De plus, comme $\ln(1+x)\leqslant x$ pour tout $x\geqslant 0$ par concavité du logarithme, on a $u_{n+1}=\ln(1+u_n)\leqslant u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Étant minorée et décroissante, elle converge vers un réel $L\in[0,e]$. Par continuité de $x\mapsto\ln(1+x)$ et par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1}=\ln(1+u_n)$, on a $L=\ln(1+L)$ et donc $L=0$ (il n'y a pas d'autre solution à l'équation $x=\ln(1+x)$, soit par stricte concavité, soit d'après une étude des variations de $x\mapsto x-\ln(1+x)$). Ceci montre déjà que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Cela nous permet

de faire le développement asymptotique suivant de $u_{n+1}^{\gamma} - u_n^{\gamma}$, pour $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{\gamma} - u_n^{\gamma} = (\ln(1+u_n))^{\gamma} - u_n^{\gamma} = \left(u_n - \frac{u_n^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(u_n^2\right)\right)^{\gamma} - u_n^{\gamma} &= u_n^{\gamma}\left(1 - \frac{u_n}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)\right)^{\gamma} - u_n^{\gamma} \\ &= u_n^{\gamma}\left(1 - \gamma\frac{u_n}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)\right) - u_n^{\gamma} \\ &= -\gamma\frac{u_n^{\gamma+1}}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(u_n^{\gamma+1}\right) \end{aligned}$$

Si l'on prend $\gamma = -1$, alors $u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, donc par le théorème de Cesàro : $u_{n+1}^{-1} - u_0^{-1} = \sum_{k=0}^{n}\left(u_{k+1}^{-1} - u_k^{-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$. On en déduit : $u_n^{-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$, et : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

☢ Utiliser la transformation d'Abel. □

Réponse. On rappelle la formule de la transformation d'Abel (à savoir démontrer quand on l'utilise) :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n \sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n-1}\left((u_{k+1} - u_k)\sum_{\ell=0}^{k} v_\ell\right).$$

Pour savoir avec quelles suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ l'utiliser, il faut la comprendre comme l'analogue discret de l'intégration par parties : un choix pertinent pour l'intégration par parties l'est souvent pour la transformation d'Abel (dériver un terme polynomial pour abaisser le degré, par exemple). Voir *Méthodes*.

1. Prenons $u_n = n$ et $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n} k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la transformation d'Abel donne, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = n\sum_{k=0}^{n} 1 - \sum_{k=0}^{n-1}\left(((k+1)-k)\sum_{\ell=0}^{k} 1\right) = n(n+1) - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1) = n(n+1) - \sum_{k=1}^{n} k.$$

De cela on déduit : $2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$, et donc : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$, et prenons $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{3^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la transformation d'Abel donne :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{3^n} = N\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{3^n} - \sum_{n=0}^{N-1}\left(((n+1)-n)\sum_{\ell=0}^{n}\frac{1}{3^\ell}\right) &= N\frac{1-\frac{1}{3^{N+1}}}{1-\frac{1}{3}} - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2}\left(N\left(1 - \frac{1}{3^{N+1}}\right) - N + \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{3^{n+1}}\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(-\frac{N}{3^{N+1}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^N}}{1-\frac{1}{3}}\right). \end{aligned}$$

D'après le théorème des croissances comparées, $\frac{N}{3^{N+1}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{3^n} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$.

3. Soit $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et prenons $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \cos(n)$ pour tout $n \geqslant 1$ (pour motiver ces choix, on peut penser à l'intégrale de Dirichlet étudiée dans le cours, exemple 8, où l'on montre la convergence en dérivant la puissance de t ; on fait ici de même avec la puissance de n, à savoir $\sqrt{n}$, où la dérivée est remplacée par la différence $u_{n+1} - u_n$). Alors :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos(n)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}\cos(n) - \sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(k). \qquad (*)$$

Pour étudier $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\cos(n)$, on utilise $\cos(n)=\mathrm{Re}(e^{in})$; on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}e^{in}=\sum_{n=1}^{N}\left(e^{i}\right)^{n}=e^{i}\frac{1-e^{iN}}{1-e^{i}}$, donc :

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\cos(n)\right|=\left|\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N}e^{in}\right)\right|\leqslant\left|\sum_{n=1}^{N}e^{in}\right|=\left|e^{i}\frac{1-e^{iN}}{1-e^{i}}\right|=\frac{|1-e^{iN}|}{|1-e^{i}|}\leqslant\frac{2}{|1-e^{i}|}.$$

Ceci démontre que les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\cos(n)$ sont bornées par $M=\dfrac{2}{|1-e^{i}|}$. On en déduit facilement que le premier terme de $(*)$ tend vers 0 quand $N\to+\infty$ d'après le théorème des gendarmes, tandis que le second terme définit une série absolument convergente ; en effet :

$$\forall n\geqslant 1,\quad\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(k)\right|\leqslant\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right|\cdot\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(k)\right|\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\cdot M,$$

et la série télescopique $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ converge parce que la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant1}$ converge (vers 0) ; on utilise alors le théorème de comparaison des séries à termes positifs. On en déduit que le second terme de $(*)$ converge également, donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ existe, et est finie : $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ converge.

Familles sommables.

✓ Utiliser les théorèmes de Fubini et de sommation par paquets. ☐

Réponse.

1. Montrons que la famille $\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable en calculant $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\left|\frac{z^p}{q!}\right|$:

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\left|\frac{z^p}{q!}\right|=\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{|z|^p}{q!}=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{q!}\sum_{p=0}^{+\infty}|z|^p=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{q!}\frac{1}{1-|z|}=\frac{1}{1-|z|}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{q!}=\frac{e^1}{1-|z|}<+\infty.$$

Ceci montre que $\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. On peut donc calculer sa somme, et en reproduisant le raisonnement ci-dessus (la seule chose qui change est qu'on remplace $|z|$ par z) on obtient : $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\frac{z^p}{q!}=\frac{e}{1-z}$.

2. Comme $x\in[0,1[$, on a : $\dfrac{1}{1-x^{2n+1}}=\sum_{k=0}^{+\infty}(x^{2n+1})^k$. Donc, sous réserve d'existence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^n}{1-x^{2n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^nx^n(x^{2n+1})^k=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2nk+k+n}.$$

Si la famille est bien sommable (ce que nous vérifierons ci-dessous), on a par le théorème de Fubini :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2nk+k+n}=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^nx^{(2n+1)k+n}=\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\sum_{n=1}^{+\infty}(-x^{2k+1})^n=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{1+x^{2k+1}},$$

ce qui est exactement l'identité demandée (quitte à renommer l'indice de sommation n). Montrons à présent que la famille $\left((-1)^nx^{(2n+1)k+n}\right)_{(n,k)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{N}}$ est effectivement sommable en montrant que $\left(\left|(-1)^nx^{(2n+1)k+n}\right|\right)_{(n,k)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{N}}$ l'est : comme c'est une famille de réels positifs, sa somme existe et on a, encore par le théorème de Fubini :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left|(-1)^nx^{2nk+k+n}\right|=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^nx^{(2n+1)k+n}\right|=\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\sum_{n=1}^{+\infty}(x^{2k+1})^n=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^{2k+1}},$$

et cette somme a une valeur finie car : $\frac{x^k}{1-x^{2k+1}} \underset{k\to+\infty}{\sim} x^k$, et la série géométrique $\sum\limits_{k\geqslant 0} x^k$ converge car $x \in [0,1[$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, il en est de même pour la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{1-x^{2k+1}}$, d'où la finitude de la somme ci-dessus. Ainsi la famille $\left((-1)^n x^{(2n+1)k+n}\right)_{(n,k)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{N}}$ est sommable et les calculs ci-dessus sont valides.

3. On somme des réels positifs. Par le théorème de sommation par paquets, avec les paquets $I_0 = 2\mathbb{N}\setminus\{0\}$ (entiers pairs non nuls) et $I_1 = 2\mathbb{N}+1$ (entiers impairs), on a : $I_0 \cup I_1 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n\in I_0} \frac{1}{n^2} + \sum_{n\in I_1} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Or l'énoncé nous donne : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. On en déduit : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$. Le théorème de sommation par paquets (avec les mêmes paquets), qu'on peut appliquer avec la somme d'une série absolument convergente, donne ensuite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n\in I_0} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{n\in I_1} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

4. *(a) Calcul de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n}$. On a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^n} = \sum_{(k,n)\in\Delta} \frac{1}{4^n}$ avec : $\Delta = \{(k,n) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$ (l'égalité est justifiée par le théorème de sommation par paquets appliqué à la famille $\left(\frac{1}{4^n}\right)_{(k,n)\in\Delta}$, avec : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $I_n = [\![0, n-1]\!] \times \{n\}$). En appliquant encore une fois le théorème de sommation par paquets, mais avec les paquets : $\forall k \in \mathbb{N}$, $J_k = \{k\} \times [\![k+1, +\infty[\![$, on trouve : $\displaystyle\sum_{(k,n)\in\Delta} \frac{1}{4^n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{(k,n)\in J_k} \frac{1}{4^n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{k+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$. Donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n} = \frac{4}{9}$.

(b) Calcul de $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{p^q}{e^{2p}q!}$. Par le théorème de Fubini positif :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{p^q}{e^{2p}q!} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{p^q}{e^{2p}q!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{2p}} \cdot e^p = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(e^{-1}\right)^p = \frac{1}{1-e^{-1}}.$$

(c) Calcul de $\displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2} \frac{pq}{(p+q)^5}$. On utilise le théorème de sommation par paquets, avec pour paquets : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $I_n = \{(p,q) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2 \mid p+q = n\}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2} \frac{pq}{(p+q)^5} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(p,q)\in I_n} \frac{pq}{n^5} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5}\sum_{p=1}^{n-1} p(n-p) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5}\left(n\cdot\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) \\ &= \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}\right) = \frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90}\right).\end{aligned}$$

3 Feuilles d'exercices

3.1 Indications et commentaires

L'icône « (🗎) » indique que les documents *Méthodes* donnent des conseils plus généraux.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices analogues.

Étude pratique de la nature des séries

✓ **Exercice 1. (Révisions) (🗎C)** C'est standard. Ne pas oublier la règle de D'Alembert et la méthode « $n^\alpha u_n$ » pour comparer à des séries de Riemann lorsqu'on n'obtient pas directement un équivalent de la forme $\frac{1}{n^s}$. On prendra garde à ne pas affirmer que la série (d) vérifie le critère spécial des séries alternées (regardez bien !). Cependant on n'est pas démuni dans ce cas ! La (h) nécessite un développement asymptotique patient et des formules de trigonométrie, de sorte à se ramener à un argument qui tend vers 0. Voir *Méthodes* si besoin.

> **Commentaires.** Cet exercice ne sert qu'à faire vos gammes. Vous pouvez vous amuser à traiter les mêmes séries à termes positifs, où vous ajoutez un $(-1)^n$ en facteur, pour voir si vous y parvenez toujours.

Exercice 2. (Méchantes séries) Lorsque les méthodes classiques n'aboutissent pas, songez à éclater le terme général en somme de termes plus simples *via* un développement asymptotique. Si les termes ainsi obtenus ne donnent pas une série alternée, songez aux techniques apprises cette année pour les séries plus capricieuses. Heuristiquement : pour savoir si la (c) converge ou non, on doit savoir à quel point le terme général est « petit », ce qui dépend de la proximité entre $en!$ et les entiers naturels. Or vous connaissez une expression de e l'exprimant comme somme de rationnels : vous devriez pouvoir vous en servir pour mesurer l'écart de $en!$ à un entier, et ainsi simplifier $\sin(2\pi e n!)$.

> **Commentaires.** Ne pas oublier les deux techniques plus subtiles qu'on a vues pour l'étude des séries capricieuses (sachant que le caprice provient souvent d'un terme trigonométrique : vous en avez croisé).
> Lorsqu'on doit comparer e à des entiers ou rationnels, c'est souvent son écriture sous forme de série qui le permet. Idée que vous retrouverez dans l'exercice 35 de ce chapitre.

Exercice 3. Comparer $|\cos(n\theta)|$ et $(\cos(n\theta))^2$. L'intérêt : avec des formules de trigonométrie, on peut se ramener à des séries qu'on sait étudier.

> **Commentaires.** Y compris dans le cas des intégrales, il est intéressant d'encadrer les valeurs absolues de sinus ou cosinus à l'aide de sinus ou cosinus, ou de leurs carrés. En effet $\cos^2$ et $\sin^2$ sont simplifiables au contraire de $|\cos|$ et $|\sin|$.

★ **Exercice 4.** La première série se traite banalement. Pour la seconde : noter que $\pi(2+\sqrt{3})^n$ et $\pi(2-\sqrt{3})^n$ sont proches modulo 2π. S'en rendre compte en explicitant et comparant le développement des deux nombres à la puissance n.

> **Commentaires.** L'exercice a l'air original, mais si vous y regardez de plus près : vous avez déjà eu la même préoccupation dans les exercices 1 et 2, à savoir : on simplifie l'argument du sinus, et affine notre compréhension de sa proximité avec zéro, en mesurant à quel point cet argument est proche d'un multiple de 2π. Une fois qu'on a enlevé ce multiple de 2π proche de l'argument, l'étude devient élémentaire. On fait finalement la même chose ici. Faire les séries analogues des deux exercices cités pour tirer pleinement profit de cette observation.

✓ **Exercice 5. (C)** Vous avez une méthode adaptée aux séries dont le terme général a des factorielles, puissances, etc.

> **Commentaires.** Rien de spécial à commenter sur cet exercice gentillet.

Exercice 6.

1. C'est un usage classique de la stricte monotonie et du théorème des valeurs intermédiaires.
2. Cela revient à trouver un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$, ou *a minima* une inégalité non triviale. Trouver de telles inégalités grâce à la monotonie de $f_n : x \mapsto \ln(x) - \arctan(x) - n\pi$ et à des évaluations en des réels convenables (dépendant de n). La croissance lente du logarithme et le caractère borné de l'arc tangente devraient vous permettre de conjecturer la taille que doit avoir x_n.

Commentaires. Les suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définies implicitement comme des réels vérifiant $f_n(x_n) = 0$ sont toujours difficiles à étudier asymptotiquement. Deux idées qui peuvent souvent aiguiller la réflexion néanmoins : 1° trouver des valeurs de x où le signe de $f_n(x)$ est manifeste ; grâce à la monotonie de f_n, on en déduit des inégalités sur x_n (qui, par le théorème des gendarmes, permettent d'avoir sa limite éventuelle : très utile), 2° isoler x_n dans l'égalité $f_n(x_n) = 0$, et faire un développement asymptotique de fonctions usuelles, permet parfois d'avoir un développement asymptotique de x_n.

Exercice 7. (Séries de nature combinatoire ou arithmétique)

1. On sait encadrer relativement bien a_n pour tout n. Une sommation par paquets peut simplifier l'étude de la deuxième série (pourquoi ? quels paquets ? l'idée ne sort pas de nulle part). On peut aussi se contenter de ne regarder que quelques termes bien choisis de la somme.
2. Sommer par paquets convenables, pour tirer profit qu'*individuellement*, on ne connaisse pas très bien les c_n, mais *globalement* si (par exemple : on sait dénombrer exactement combien il y a de nombres sans 9 dans l'écriture décimale entre tel et tel entier bien choisi).
3. ☢ Sommer par paquets, en regroupant les entiers n ayant le même plus grand diviseur premier. Il faudra reconnaître un produit eulérien dans votre calcul (voir exercice 36), et le majorer (quitte à être grossier) par un $O(\sqrt{k})$ par exemple. Il est plus facile de majorer son logarithme.

Commentaires. Les séries étudiées dans cet exercice ont un terme général qui : 1° n'est explicite qu'en des entiers bien choisis, 2° n'est pas simple à étudier individuellement, mais *en moyenne*, dans un intervalle bien choisi. Dans ces cas-là, la sommation par paquets permet de vous faire travailler sur lesdits intervalles.
Dans une somme de nature arithmétique, il est souvent pertinent de regrouper les entiers ayant les mêmes diviseurs, ou multiples, etc. En présence de produits d'entiers : regrouper les termes faisant apparaître des produits égaux. Idée qui revient aux exercices 36 et 37.

Calculs de sommes

✓ **Exercice 8. (🗎C)** Le terme général est une fraction rationnelle. C'est standard. La deuxième somme nécessite de comprendre comment se comporte asymptotiquement la somme des inverses des entiers impairs : se ramener à des sommes partielles de la série harmonique, puisque nous en connaissons un développement asymptotique précis.

Commentaires. La décomposition en éléments simples est insuffisante, pour le calcul de sommes de fractions rationnelles, lorsqu'il apparaît des carrés au dénominateur ou lorsque le dénominateur est de la forme $\frac{1}{an+b}$ avec $|a| \geqslant 2$ (entier). Dans ce cas, on peut soit s'en tirer avec la formule d'orthogonalité (exercice 12), soit en se ramenant à la série harmonique en jouant sur les classes de congruence de l'indice de sommation.

Exercice 9. (🗎) Noter que les dénominateurs des quatre quantités du terme général parcourent les quatre classes de congruence modulo 4. Régler l'anomalie du $-\frac{3}{4n+2}$ qui empêche d'en déduire une simplification de la somme. Vous aurez besoin de connaître un développement asymptotique précis des sommes partielles de la série harmonique.

Commentaires. Même commentaire que dans l'exercice 8.

★ **Exercice 10.** (🗎)

1. Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite de l'énoncé : remarquer qu'il est plus simple d'avoir le comportement en l'infini de $u_{n+1}-u_n$ que de u_n. Une autre piste : l'énoncé compare $\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(n)}{n}$ à ce qui semble être une primitive de $t\mapsto\frac{\ln(t)}{t}$. Qu'est-ce que cela incite à faire ?
2. Sommer ou soustraire $\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$ et $\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(n)}{n}$. Remarquer que des simplifications apparaissent selon la parité de n. En déduire une expression de $\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$ uniquement à l'aide de termes explicites et convergents.

Commentaires. Nous avons déjà commenté, dans le chapitre préliminaire, pourquoi il est parfois plus pertinent d'étudier $u_{n+1}-u_n$ plutôt que u_n, et comment faire le lien. À relire si besoin.
La présence du $(-1)^n$ nécessite souvent (dans le calcul explicite de sommes) de faire une distinction de cas sur la parité, ou de lui ajouter (ou soustraire) la « même somme sans le $(-1)^n$ » pour la simplifier. Cependant l'idée n'est efficace que si l'on connaît le comportement asymptotique de la fameuse somme ajoutée. C'est l'intérêt de la première question, et c'est la réflexion que vous devez avoir dans une circonstance analogue même si ce n'est pas suggéré par l'énoncé.

Exercice 11. Distinguer selon les termes pairs et impairs, et faire apparaître des factorielles grâce à la multiplicativité du logarithme. Passer à la limite dès que vous avez simplifié au possible.

Commentaires. À noter que lorsqu'on doit calculer explicitement une somme, il est souvent possible d'obtenir simultanément la convergence et la valeur de la somme. Ce qui permet d'économiser la rédaction. Néanmoins, il peut y avoir un intérêt de montrer la convergence au préalable : pour avoir la valeur de la somme en passant par la somme partielle de notre choix (en sommant jusqu'à $2N$, $2N+1$, etc., sans avoir à étudier *toutes* les suites extraites).
Attention, le théorème spécial des séries alternées n'est pas si simple à utiliser ici.
La présence du $(-1)^n$ nécessite souvent (dans le calcul explicite de sommes) de faire une distinction de cas sur la parité, ou de lui ajouter (ou soustraire) la « même somme sans le $(-1)^n$ » pour la simplifier.
Le produit des entiers pairs ou des entiers impairs est à savoir simplifier IMPÉRATIVEMENT. Voir *Méthodes* sur les suites numériques (*Déduire* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *de la relation de récurrence*).

Exercice 12. (Orthogonalité des caractères de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et application) (🗎)

1. C'est une somme usuelle.
2. Noter que le $pn+a$ du terme général ne parcourt que les entiers congrus à a modulo p. En déduire une réécriture de la somme qui montre qu'elle est manifestement une somme exponentielle restreinte à des indices vérifiant une condition de congruence. Faire apparaître la fonction indicatrice de l'ensemble des entiers vérifiant cette condition, et l'exprimer sous une autre forme grâce à la question précédente. Vous trouverez alors que la somme de l'énoncé est une combinaison linéaire de sommes exponentielles.
3. Immédiat si la question précédente a été réussie (la seule subtilité est le choix de x dans la seconde somme).

Commentaires. La méthode de cet exercice n'est pas isolée. Vous la retrouverez dans des exercices du chapitre VII par exemple, et on en parle plus longuement dans *Méthodes*, *Calculer la somme d'une série convergente*. C'est une méthode aussi très efficace pour le dénombrement de solutions modulo p.

Exercice 13. Il s'agit de trouver l'unique entier N tel que : $N\leqslant\sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{n^{2/3}}<N+1$. Or quel est le meilleur moyen connu d'encadrer explicitement et non trivialement des sommes ?

Commentaires. La méthode attendue ici doit être un *réflexe*. Ne pas avoir la moindre idée de la façon de commencer cet exercice serait une lacune problématique.

Exercice 14. (🗎) Utiliser la transformation d'Abel pour obtenir une expression de $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ en fonction de $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}$. Cela vous donne une idée du $u_{k+1} - u_k$ explicite à faire apparaître dans la nouvelle somme.

> **Commentaires.** La transformation d'Abel sert surtout à l'étude asymptotique de sommes. Le calcul pratique est assez rarement possible, ou bien : quand il est possible, c'est plus calculatoire que par d'autres approches. Néanmoins vous pouvez essayer, pour dompter la technique, de retrouver les autres sommes usuelles par cette approche.
> Pour savoir comment choisir les suites de votre transformation d'Abel, se dire que les bons choix pour une intégration par parties sont souvent des bons choix pour une transformation d'Abel, dans l'analogie déjà faite entre les deux transformations. Voir *Méthodes*, *Utiliser la transformation d'Abel.*

★ **Exercice 15. (C)** Écrire $t \mapsto \frac{1}{1+t^{\alpha}}$ comme une somme de série, et intégrer le résultat obtenu. Justifier l'égalité : $\int_0^1 \sum = \sum \int_0^1$, par une utilisation réfléchie du théorème de convergence dominée. On sait ensuite calculer l'intégrale d'une fraction rationnelle.

> **Commentaires.** On pourra aussi introduire un x^n au numérateur pour généraliser le résultat. La stratégie de passer par le théorème de convergence dominée reviendra, pour justifier des égalités de la forme : $\int_0^1 \sum = \sum \int_0^1$. Vous verrez notamment des théorèmes (qui ne s'appliquent pas dans cet exercice...) permettant d'assurer que cette égalité est vraie. On se convaincra qu'elle n'est pas évidente en cherchant des contre-exemples (on en donne dans la *Présentation* du chapitre VII).
> Ne pas oublier que les sommes usuelles dépendant d'un paramètre, et dont on a la valeur exacte, permettent d'obtenir de nouvelles sommes par intégration, dérivation, transformation d'Abel, etc.

Exercice 16. (Une identité trigonométrique, et calcul de $\zeta(2)$)

1. Cela revient à savoir calculer : $\sum_{k=1}^{N-1} k e^{i(N-k)x}$. Or c'est plutôt $\sum_{k=1}^{N-1} e^{i(N-k)x}$ que vous savez calculer. Réfléchir à une opération classique de l'analyse permettant de passer d'une somme à l'autre.
2. Multiplier par x l'égalité précédente, et intégrer. Il reste à savoir calculer l'intégrale de $\int_0^1 x\cos(\bigstar)\mathrm{d}x$, ce qui est très standard. Faire un changement d'indice, enfin, pour reconnaître les sommes de l'énoncé.
3. Isoler la somme $\sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ impair}}}^{N-1} \frac{1}{m^2}$ dans l'égalité précédente, et calculer la limite de chacun des termes. Celui de l'autre somme, qui ressemble à la somme harmonique, est très classique et vous devez savoir l'encadrer. Pour l'intégrale : majorer l'intégrande par une fonction plus sympathique. Pour majorer le numérateur : se souvenir que la majoration $|\sin| \leqslant 1$ n'est pas la plus pertinente près de 0. Pour simplifier le dénominateur près de 0, il faut savoir *minorer* le sinus. Vous devriez savoir le faire finement grâce à sa concavité. Vous en déduirez une majoration de l'intégrale par une constante de la variable N. Une fois ceci effectué, le passage à la limite ne pose aucune difficulté. En déduire la somme finale en séparant ses indices pairs de ses indices impairs.

> **Commentaires.** L'exercice est dans la philosophie des séries de Fourier (avec néanmoins quelques différences), dont une application est le calcul de sommes.
> Ne pas oublier que les sommes usuelles dépendant d'un paramètre, et dont on a la valeur exacte, permettent d'obtenir de nouvelles sommes par intégration, dérivation, transformation d'Abel, etc.
> La dernière question fait bien réviser deux réflexions *essentielles* d'un bon mathématicien en analyse : 1° avoir le bon réflexe dès qu'on veut encadrer une somme, 2° savoir comment majorer ou minorer le sinus selon qu'on soit près de zéro ou non (c'est souvent la minoration qui est oubliée).

Étude théorique de la nature des séries

★ **Exercice 17. (Règle de Raabe-Duhamel)** Vous voulez démontrer la convergence d'une suite alors que les données de l'énoncé permettent non pas d'avoir u_n explicitement, mais $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: on a déjà expliqué comment faire (cela ressemble à ce qu'on fait pour $u_{n+1} - u_n$: on s'y ramène en transformant le quotient en une différence). Problème : si vous voyez où je veux en venir, vous allez seulement réussir à obtenir (après sommation) un équivalent du type : $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\alpha\ln(n)$, qui n'est pas suffisant pour conclure parce qu'on ne peut pas simplement passer aux exponentielles dans un équivalent asymptotique. Il faut affiner la comparaison. On résout ce problème en trouvant une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ *simple* telle que : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et en appliquant votre première tentative avec $\ln(u_n) - \ln(v_n)$ à la place.

Commentaires. Illustration typique de l'étude d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ lorsqu'on connaît $u_{n+1}-u_n$ (lien suite-série) ou $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (on s'y ramène). Vous pouvez prendre plus de hauteur en étudiant les propriétés de base de l'application $(u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto \bigstar$, où $\bigstar$ est ce que vous avez normalement étudié si vous avez compris où l'indication veut vous mener. À savoir : 1° regardez les propriétés de cette application vis-à-vis de l'addition et de la multiplication (et davantage si vous avez de l'inspiration : injectivité et surjectivité, etc.), 2° calculez-la pour les suites les plus simples que vous connaissez. Si vous le faites, la démarche de l'exercice vous paraîtra sans doute moins mystérieuse. Vous verrez peut-être des points communs avec la dérivée logarithmique des fonctions (et vous pourrez essayer de comprendre pourquoi cette similitude était prévisible) et affinerez votre compréhension du parallèle parfois possible entre suites et fonctions.

Exercice 18. (Règle de Raabe-Duhamel : on raffine) Même indication que dans l'exercice 17, mais il faut faire preuve de plus de finesse : suivre la même approche vous permettra d'en déduire que u_n est négligeable devant le terme général d'une série potentiellement divergente : on ne peut pas conclure. La grande idée à avoir, ici, est de choisir une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ qui permettra d'avoir non seulement un petit o (insuffisant pour conclure, on l'a dit), mais un équivalent. Trouvez donc une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ telle que : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{1}{n} \pm \frac{1}{n\ln(n)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)$, et reprenez l'approche de l'exercice 17 en l'adaptant à la situation (si vous essayez d'obtenir un équivalent de $\ln(u_n)$ ou $\ln(u_n)-\ln(v_n)$, et que vous êtes embêtés par l'impossibilité de passer aux exponentielles dans un équivalent, essayez éventuellement de vous en passer en raisonnant directement avec $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$). Vous en déduirez que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Commentaires. Cet exercice et le nº 17 sont assez originaux. Ce que vous devez en tirer comme enseignement, c'est la façon de passer de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à u_n. C'est plutôt facile si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une expression exacte (par télescopage), et c'est le cas où vous n'en connaissez qu'un développement asymptotique qui est vraiment tortueux.

★ **Exercice 19. (Généralisation de la comparaison série-intégrale)**

1. Modifier la différence $\sum\limits_{n=1}^{N} f(n) - \sum\limits_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$ de sorte à ce que le terme général soit une intégrale (c'est normalement facile si vous comprenez l'esprit de la comparaison série-intégrale). Vous voulez ensuite faire apparaître f' pour utiliser l'hypothèse : songez à une opération banale sur les intégrales qui le permettrait. En déduire que la différence ci-avant a une limite finie.
2. Appliquer la question 1. La nature de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\sqrt{t}}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ s'obtient en s'inspirant d'exemples analogues vus en cours.
3. S'inspirer de ce qui précède, mais comparer à f' ne suffit pas, car f' n'est pas intégrable. Pas grave : pourquoi s'arrêter à f' ? Recommencer le raisonnement de la question 1 jusqu'à se ramener à une fonction intégrable.

Commentaires. Ce raffinement de la comparaison série-intégrale peut se poursuivre (c'est la formule d'Euler-Maclaurin qui le généralise) indéfiniment. Noter qu'il ne permet pas seulement d'obtenir des natures de séries, mais peut s'appliquer à des développements asymptotiques.
Cette idée de passer par f' n'est pas saugrenue : votre raisonnement fait apparaître une différence petite, qu'on a coutume de majorer avec l'inégalité des accroissements finis, laquelle nécessite de connaître la taille de f'. Cet exercice est dans la continuité (on se demandera en revanche pourquoi l'inégalité des accroissements finis échoue ici).

★ **Exercice 20.** Utiliser l'hypothèse de décroissance pour minorer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ (ou $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$) ne donne que des trivialités, étant donné que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Changer l'indexation de la somme pour contourner la minoration $u_k \geqslant 0$.

> **Commentaires.** Une illustration parmi d'autres du passage parfois difficile d'une hypothèse sur la série à un résultat sur le terme général : on a une préoccupation semblable avec les intégrales. On utilise souvent les mêmes idées dans les deux cas de figure, et nous vous invitons donc à relire la discussion que nous avions eu à ce sujet dans les exercices d'intégration.
> Le cas le plus favorable est celui où on peut se servir de : $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$. Se demander pourquoi cela ne marche pas ici. Un second recours est souvent de raisonner sur ce qu'on appelle une « tranche de Cauchy » $\sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k$, à plus forte raison si les hypothèses nous permettent de relier les u_k et u_n.
> On se demandera ici pourquoi minorer $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ grâce à la monotonie n'enseigne pas grand'chose.

★ **Exercice 21.** On a vu un résultat analogue dans le cours d'intégration. S'en inspirer.

> **Commentaires.** Comparer $|ab|$ et a^2, b^2 revient plusieurs fois dans des contextes variés (convexité, calcul différentiel à deux variables, espérance d'un produit de variables aléatoires, etc.). C'est très facile une fois qu'on a l'idée : s'efforcer de l'avoir. Il y a deux façons d'effectuer une telle comparaison (l'une fait intervenir un produit dans la majoration, et l'autre une somme).
> On peut également comparer $|ab|$ et a^p, b^q plus généralement (mais pas pour n'importe quelles valeurs de p et q). C'est l'inégalité de Hölder. L'égalité de Young de l'exercice 5 d'intégration permet de la démontrer.

★ **Exercice 22.**

1. L'analogue continu de cette série serait $\int_a^{+\infty} \frac{f'}{f^\alpha}$ dont on obtient aisément la nature grâce à une primitive de l'intégrande. Cela vous permet de conjecturer ce qu'il se passe selon les valeurs de α. Pour passer de la conjecture à la démonstration : 1° dans cette heuristique, l'analogue de u_n est f' : pourquoi ? Quel est le lien entre u_n et S_n ? L'utiliser, 2° comparer ensuite à une intégrale pour se ramener à la situation plus simple décrite ci-dessus ; puisque *a priori* on ne peut pas écrire u_n ni S_n^α sous la forme $f(n)$, il va falloir un peu réfléchir à l'intégrande que vous voulez faire apparaître ; ce n'est pas difficile si vous avez écrit correctement u_n en fonction de S_n et que vous savez comment on peut souvent interpréter une différence dans un contexte d'intégration, et plus spécifiquement de comparaison série-intégrale. La minoration est cependant plus délicate.
2. Raisonnement en tous points analogue à celui précédent, si vous l'avez réussi.

> **Commentaires.** Comme dans le commentaire de l'exercice 20 : raisonner sur une tranche $\sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k$ marche bien à condition que l'on puisse comparer les u_k et u_n. Ici c'est possible non pas grâce à la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, mais à celle de ses sommes partielles. Voyez comment on l'exploite ici, et pourquoi il ne marchait pas de procéder en raisonnant sur $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha}$ (je vous demande déjà cette analyse dans l'exercice **??** du chapitre préliminaire ainsi que dans l'exercice 20 : faites-la systématiquement !).

Exercice 23. Sommer par paquets convenables qui feront apparaître $u_{2n} + u_{2n+1}$ dans le terme général (en vérité il faudra faire un peu mieux pour conclure ci-après : qu'obtenez-vous comme majoration de u_n en réexploitant la même inégalité plusieurs fois ?). Selon votre façon de choisir les paquets, l'inégalité de l'énoncé permet d'en déduire une minoration de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ soit par elle-même fois une constante trop grande, soit par une somme infinie.

> **Commentaires.** L'idée de raisonner par paquets est exactement pour les mêmes raisons que dans l'exercice 7 : le fait de raisonner ici en base 2 plutôt qu'en base 10 ne doit en rien vous détourner de l'observation que c'est la même chose. On y est naturellement mené à partir du moment où l'hypothèse fait intervenir des indices parcourant toutes les classes modulo 2.

★ **Exercice 24. (Critère d'Abel)** Imiter ce qu'on a fait dans le cours en application de la transformation d'Abel.

Commentaires. Les hypothèses sont naturelles au sens où elles permettent de naturellement se ramener à la série télescopique convergente $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$. En vous mettant en tête que là est l'objectif, recouvrer toutes les hypothèses du critère d'Abel naturellement (d'abord réfléchir à l'hypothèse bornée, puis au fait que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ doive décroître, puis converger, et enfin converger vers 0). Ainsi vous n'aurez pas à faire d'effort de mémoire artificiel, et cela vous permettra par ailleurs de retenir aisément les différentes hypothèses de la démonstration.

Exercice 25. (Élimination du signe alterné)

1. On voit que l'objectif est d'éliminer le $(-1)^n$. Une distinction de cas sur la parité le permet aisément.
2. Cela vous ramène à savoir calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$. Somme classique, calculable soit grâce à l'exercice 15, soit en intégrant une somme usuelle (pour voir laquelle, réfléchir à une fonction usuelle qui, après intégration, donne le $\frac{1}{n+1}$; le $(-1)^n$ vous permet de savoir comment choisir les bornes d'intégration), soit en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange avec une fonction dont la partie régulière du développement limité donne $\sum\limits_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+1}$.

Commentaires. La présence du $(-1)^n$ nécessite souvent (dans le calcul explicite de sommes) de faire une distinction de cas sur la parité, ou de lui ajouter (ou soustraire) la « même somme sans le $(-1)^n$ » pour la simplifier. C'est ce que formalise cet exercice. On se demandera s'il y a aussi la même nature sans l'hypothèse de l'énoncé sur $(u_n)_{n\geqslant 0}$: instructif, car cela fournirait potentiellement un contre-exemple au théorème de sommation par paquets !
Ne pas oublier que les sommes usuelles dépendant d'un paramètre, et dont on a la valeur exacte, permettent d'obtenir de nouvelles sommes par intégration, dérivation, transformation d'Abel, etc.

Exercice 26. (Un autre théorème spécial des séries alternées) Imiter la démonstration du cas décroissant.

Commentaires. Ce n'est pas une variante artificielle du théorème des séries alternées. Vous pouvez notamment l'utiliser lorsque vous cherchez à déterminer la complexité informatique de l'algorithme d'Euclide étendu.

Exercice 27. (Théorème de Mertens) Étudier la différence entre $\sum\limits_{n=0}^{N}\sum\limits_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}$ et $\sum\limits_{n=0}^{N}u_n\sum\limits_{n=0}^{N}v_n$, et passer à la limite. Pour simplifier cette différence : développer le produit (cela ne pose pas de difficulté puisqu'il est fini). *Bien identifier* quelle partie de $\mathbb{N}^2$ est couverte par les indices k et ℓ apparaissant dans ce produit. Comparer avec les indices couverts par les $(k, n-k)$ du produit de Cauchy. Ainsi les termes correspondants disparaîtront en faisant la différence ci-dessus. Une fois ces simplifications effectuées, vous serez embêtés : toutes les majorations tentantes nécessitent de faire apparaître une somme avec $|u_k|$, ce qui n'arrange en rien vu que seule $\sum\limits_{n\geqslant 0}v_n$ converge absolument. Pour poursuivre, s'inspirer de la transformation d'Abel (même si ce n'est pas ce que vous ferez) : écrire $\sum\limits_{n=0}^{N}\sum\limits_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}-\sum\limits_{n=0}^{N}u_n\sum\limits_{n=0}^{N}v_n$ comme une somme dont le terme général dépend de v_k et de $\sum\limits_{k=\bigstar}^{\spadesuit}u_k$ (vous verrez peut-être mieux ce que vous devez obtenir si vous écrivez informellement la somme obtenue et regroupez les termes en facteur de u_k). Des majorations epsilonesques mais simples permettront enfin d'avoir le résultat voulu (l'idée d'une partie de ces majorations sera : on a $\sum\limits_{k=1}^{n}v_k\cdot\clubsuit$, mais on veut avoir $\sum\limits_{k=1}^{n}|v_k|$: majorer $\clubsuit$ de sorte à s'en débarrasser).

Commentaires. Ce théorème montre que finalement, les contre-exemples au théorème sur le produit de Cauchy sont marginaux et ne produisent pas d'identité contradictoire : quand le produit de Cauchy converge, sa somme est bien égale à ce qu'on pense (même si on ne le montre pas dans le cas général ici : il faudra attendre les séries entières).
On ne peut pas comprendre les simplifications du raisonnement si l'on ne s'efforce pas de se représenter *concrètement* (en représentant $\mathbb{N}^2$ par un quadrillage d'une partie du plan) les indices (k,ℓ) du produit u_kv_ℓ. On l'a fait en cours pour visualiser des paquets du théorème de sommation.

Exercice 28. D'abord montrer que f est continue en 0 pour simplifier l'étude. C'est en effet un exercice classique qu'une fonction *additive* et continue est linéaire : montrer la continuité permet donc d'obtenir le résultat simplement en vérifiant que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer la continuité en 0 en raisonnant par l'absurde. Quantifier epsilonesquement la non continuité, et l'utiliser pour fabriquer une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ convergente telle que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(u_n)$ diverge.
Soit η un module de continuité. Pour en déduire : $\forall x \in]-\eta,\eta[$, $f(-x) = -f(x)$, raisonner par l'absurde et en déduire l'existence d'une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ convergeant vers 0 telle que $((f(x_n)+f(-x_n)))_{n\geqslant 0}$ soit strictement positive. En déduire une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, fabriquée à partir de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$, telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge par compensation deux à deux des termes consécutifs (il y aura peut-être besoin de répétitions : à vous de voir pourquoi) tandis que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(u_n)$ diverge. Raisonner semblablement pour avoir l'identité $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
Maintenant qu'on sait que $f(x+y) = f(x)+f(y)$, la fin de l'exercice s'obtient par un raisonnement classique (commencer à montrer que $f(x) = xf(1)$ pour tout $x \in \mathbb{N}$, puis tout $x \in \mathbb{Q}$, puis tout $x \in \mathbb{R}$ par densité), à ceci près qu'il faut éventuellement remplacer $f(1)$ par f évaluée en autre chose : en effet, si $1 \notin]-\eta,\eta[$, on est coincé.

Commentaires. Les différents résultats suivants seront très utiles cette année pour montrer que des applications sont l'identité, ou linéaires, etc. : un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'identité ; un morphisme de groupes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ *continu* est linéaire (dans le premier cas, la continuité est remplacée par la monotonie) ; plus généralement, un morphisme de corps restreint au sous-corps premier est l'identité ; un morphisme de corps est K-linéaire où K est le sous-corps premier (on verra ce qu'est le sous-corps premier au chapitre III).
Nous verrons en topologie que si f est linéaire et CONTINUE, alors il est toujours vrai que la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ implique celle de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(u_n)$ et qu'on a alors : $f\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(u_n)$ (sachant que pour une somme finie c'est trivial).
Ayant cela à l'esprit, le questionnement de l'exercice est naturel et la première étape de l'indication n'a rien de surprenant.

Comportements asymptotiques

Exercice 29. (C) C'est du cours. Attention à traiter à part le cas $\alpha = 1$.

Commentaires. Comment obtenir un équivalent de $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\beta (\ln(k))^\alpha}$? (pour $\beta < 1$). Se demander pourquoi j'ai fixé $\beta = 1$.

Exercice 30. (C) Le premier terme du développement est du cours. Pour le second : soustraire la somme de l'énoncé et l'expression qui vous permit d'obtenir l'équivalent : soit une intégrale, soit une somme télescopique bien choisie. Simplifier cette différence. Si vous avez une intégrale : songez à une opération souvent utilisée pour expliciter son terme prépondérant (souvent utilisée de manière générale pour renforcer ou accélérer une convergence).

Commentaires. Vous avez plusieurs méthodes pour avoir le premier terme du développement asymptotique (un équivalent). Pour le second, le point de départ est souvent de faire la différence entre votre somme et l'équivalent obtenu, puis d'étudier les différences consécutives. On explique comment faire dans *Méthodes*, section *Étudier des suites en passant par des séries télescopiques*. Dans le cas de la comparaison série-intégrale : songez à la méthode plusieurs fois utilisée pour faire apparaître un terme convergeant plus vite vers 0.
On pourra cependant être perplexe en voyant qu'en intégration, je donnais d'autres façons d'obtenir les termes suivants (comparez les exercices analogues d'intégration, ainsi que ce que j'en dis dans *Méthodes*). Pourquoi ne pouvons-nous pas transposer la méthode ici ? Que manque-t-il ? (Patience : nous aurons bientôt les théorèmes adéquats dans le cas des séries, au chapitre VII).

Exercice 31. (C)

1. C'est du cours. Si vous passez par une comparaison série-intégrale : 1° attention à la monotonie, 2° la fonction en présence n'admet pas de primitive simple et vous devrez un peu travailler pour

avoir un équivalent (c'est possible relativement facilement : relire les conseils de *Méthodes* sur les développements asymptotiques, si besoin). Si vous voulez utiliser le théorème de sommation des équivalents et que vous n'avez pas d'idée d'une suite télescopique à laquelle comparer la somme de l'énoncé : chercher une suite de la forme $(n^\alpha e^n)_{n\geqslant 0}$ dont les différences consécutives sont équivalentes à $\frac{e^n}{n}$, éventuellement à une constante près.

2. Mettre sous forme exponentielle une quantité de la forme $a_k^{b_k}$ est souvent une bonne idée. Le faire, et en déduire un équivalent asymptotique du terme général. Faire le lien avec la question précédente. Notez bien qu'on demande deux termes : poussez votre développement asymptotique suffisamment loin.

Commentaires. Comparer avec le commentaire de l'exercice 30 sur la difficulté d'avoir plusieurs termes dans un développement asymptotique d'une somme. Est-ce qu'on fait la même chose ici ? Est-ce plus simple ? Si oui, pourquoi ? Et pour quel autre type de somme ce serait « aussi simple » d'avoir un développement aussi précis ?

Exercice 32. Remarquer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ suit une relation de récurrence d'ordre 1. Elle devrait vous permettre de conjecturer un équivalent, puis de le démontrer par un encadrement obtenu par récurrence. Pour le terme suivant : faire apparaître un télescopage, non pas avec $u_{n+1} - u_n$ mais autre chose. Pour avoir des idées, se tourner éventuellement vers le document *Méthodes* intitulé *Déduire* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *de la relation de récurrence.* Si vous vous débrouillez bien, vous serez amenés à obtenir un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} 4^k \ln(k)$. La croissance lente du logarithme et celle, au contraire très rapide, d'une suite géométrique, devraient permettre de conjecturer cet équivalent : l'obtenir comme souvent (voir commentaire de l'exercice 31 par exemple) en étudiant les différences consécutives de cet équivalent conjecturé (espérant qu'il soit équivalent à $4^k \ln(k)$, éventuellement à une constante près). Problème : vous en déduirez un équivalent de $\ln(u_n)$ et non de u_n, et votre équivalent ne sera pas assez fin pour permettre de passer à l'exponentielle. Pas grave : il suffit de raffiner votre équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} 4^k \ln(k)$: cela, au contraire du reste, c'est classique et ce fut illustré aussi bien dans le cours avec la série harmonique que dans *Méthodes.*
Ceci étant dit, vous en déduirez un développement de u_n à deux termes, et vous pouvez même poursuivre le procédé.

Commentaires. Pour une somme, le plus pénible est souvent d'avoir le premier terme, puisque la méthode du passage par le lien suite-série donne une trivialité (du fait que $S_n - S_{n-1} = u_n$ quand S_n est la somme partielle d'indice n de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$). Le plus dur étant passé, il suffit de faire la différence de la somme et de l'équivalent trouvé, puis d'utiliser le lien suite-série comme expliqué dans *Méthodes*, section *Étudier des suites en passant par des séries télescopiques.*

Exercice 33.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$ grâce à une minoration triviale. La relation de récurrence vous permet d'avoir un équivalent simple de $u_{n+1}^\gamma - u_n^\gamma$ pour γ bien choisi. Utiliser le théorème de sommation des équivalents.
2. Au lieu d'utiliser un équivalent et le théorème de sommation des équivalents : utiliser $u_{n+1}^\gamma - u_n^\gamma$ pour obtenir un encadrement *explicite* de u_n^γ, valable pour tout n. Vous y parviendrez grâce à un télescopage et à des encadrements simples qui vous ramèneront à l'étude des sommes harmoniques, que vous savez encadrer.

Commentaires. L'approche de la première question est décrite dans le cours et dans *Méthodes*, *Étudier des suites en passant par des séries télescopiques.* S'y référer si besoin. La seule différence ici est que l'on n'a pas composé à droite un développement limité en 0 par $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Lorsqu'on veut un encadrement explicite, noter que les relations de comparaison ne sont pas suffisamment explicites (aucune information sur le rang au-delà duquel le terme d'erreur est inférieur à une quantité donnée). Dans ce cas, songer aux méthodes *globales* qui explicitent ces termes d'erreur : théorème de Taylor avec reste intégral pour un développement limité, comparaison série-intégrale pour une somme, etc.

Exercice 34.

1. Remarquer que f'/f est la dérivée de $\ln(f)$. Or, ayant un contrôle sur une dérivée, plusieurs techniques nous permettent d'en déduire la taille de la fonction (ou du moins de l'accroissement de la fonction). L'utiliser pour en déduire que f est dominée par « n'importe quelle » exponentielle.
2. Heuristique : la limite semble indiquer que f décroît exceptionnellement vite (le f' est là pour mesurer la vitesse de décroissance, et la division par f pour normaliser). On est donc tenté de penser que le premier terme du reste est prépondérant devant la somme de tous les autres. Démontrer la conjecture en écrivant le reste comme somme de son premier terme et d'un autre reste, que vous majorez grâce à l'estimation de la question 1.
3. Il suffit d'appliquer la question précédente.

Commentaires. On se demandera si le résultat de cet exercice s'adapte au cas des intégrales. En d'autres endroits, j'ai donné des indications sur la réponse à cette question.
Nul besoin de nécessairement démontrer l'inégalité de la première question à chaque fois que, sur un exemple *concret*, vous voulez démontrer que le premier terme du reste domine tous les autres. Des encadrements élémentaires suffisent parfois. S'exercer à cela dans le cas de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-n^2}$.

Exercice 35. (e^2 est irrationnel)

1. Exprimer les sommes partielles en fonction des restes $R_{N,e}$ et $R_{N,e^{-1}}$. Encadrer $R_{2N,e}$ soit avec la formule de Taylor avec reste intégral, soit en majorant par une somme qu'on sait usuellement calculer (télescopique ? géométrique ?). Encadrer $R_{2N,e^{-1}}$ en notant que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!}$ est alternée.
2. Se souvenir que $\mathbb{Q}$ est stable par produit.

Commentaires. Plusieurs démonstrations d'irrationalité procèdent ainsi : en raisonnant par l'absurde et en produisant une suite d'entiers naturels convergeant vers 0. Il y en a un autre exemple en intégration : exercice 2.
Lorsqu'on doit comparer e à des entiers ou rationnels, c'est souvent son écriture sous forme de série qui le permet. En effet, si l'on somme un nombre fini de termes, la série exponentielle donne un rationnel : c'est le reste qui mesure l'écart entre ce rationnel et e. L'idée est que ce reste « converge trop vite » pour permettre que e soit rationnel : si c'était le cas, $N!e$ serait entier pour tout N assez grand, donc sa différence avec $N!$ fois les sommes partielles aussi, mais $N!R_{N,e}$ ne l'est pas pour la raison qu'on vient de dire. Cet exercice quantifie cela précisément.
Idée que l'on retrouve dans l'exercice 2 de ce chapitre.

Rudiments de théorie analytique des nombres

★ **Exercice 36. (Produits eulériens)**

1. Le sens direct est facile par restriction. Pour le sens réciproque : remarquer que la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ s'obtient à l'aide des $1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(p^k)$. La formule de la question permet de conjecturer comment. Pour simplifier le produit indexé par $p \leqslant T$, après l'avoir développé : ne perdez pas de vue que : 1° f est multiplicative, ce qui permet de mettre le terme général sous la forme $f(\bigstar)$, 2° vous voulez obtenir $f(n)$ à la fin, et vous avez $f(\bigstar)$. Que faire pour qu'apparaisse $f(n)$? Vous aurez à un moment besoin d'un théorème d'arithmétique : le fait que les p soient premiers n'est pas anodin.
2. Appliquer la question précédente à une fonction multiplicative convenable. Montrer que la famille n'est pas sommable en raisonnant par l'absurde, et en notant que la sommabilité implique une majoration facile de $\zeta(s)$ par une constante, ce qui est impossible quand $s \to 1$ (pourquoi ?).

Commentaires. Dans une somme de nature arithmétique, il est souvent pertinent de regrouper les entiers ayant les mêmes diviseurs, ou multiples, etc. En présence de produits d'entiers : regrouper les termes faisant apparaître des produits égaux. Idée qui revient aux exercices 7 et 37.
Les produits eulériens sont le point de départ de tous les raisonnements sur la densité des nombres premiers qui recourent à l'analyse. Autant dire que le résultat est loin d'être anecdotique, et que ces produits sont vains si on ne sait pas étudier la fonction obtenue par produit, la fonction dzêta dans la dernière question. Autant dire qu'il est important de connaître ses propriétés élémentaires (dérivée, plus précisément dérivée de son logarithme, monotonie, limite et équivalent en 1, régularité, valeurs remarquables...).

★ **Exercice 37. (Produit de séries de Dirichlet)** Faire le produit et utiliser le théorème de sommation par paquets. Ce qui guide le choix des paquets est la volonté d'avoir n^s au dénominateur de la somme-produit.

Commentaires. Dans une somme de nature arithmétique, il est souvent pertinent de regrouper les entiers ayant les mêmes diviseurs, ou multiples, etc. En présence de produits d'entiers : regrouper les termes faisant apparaître des produits égaux. Idée qui revient aux exercices 7 et 36.
Les propriétés du produit de convolution seront à nouveaux étudiées dans les exercices du chapitre IV. Écrire des fonctions de nature arithmétique à l'aide d'un produit de convolution permet en effet de simplifier leur étude, et cet exercice permet partiellement de voir pourquoi : quitte à passer par les séries de Dirichlet, on peut dissocier l'étude de $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$, ce qui devrait en principe être plus agréable que l'étude de $\sum\limits_{k+\ell=n} a_k b_\ell$.

Exercice 38. (Séries génératrices de Dirichlet des fonctions arithmétiques classiques)

1. C'est une application directe de l'exercice 37.
2. C'est une application directe de l'exercice 37. Il suffit préalablement d'écrire $\zeta(s-1)$ sous la forme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\bigstar}{n^s}$.

Commentaires. Ces cas concrets illustrent le commentaire de l'exercice 37. En fait, une très grande partie des fonctions intéressantes pour l'arithmétique peuvent s'obtenir ainsi.

★ **Exercice 39. (Fonction de Möbius et fonction dzêta)**

1. Noter que de nombreux termes de la somme sont nuls. Ensuite : regrouper les diviseurs d ayant même nombre de facteurs premiers (faire un peu de combinatoire pour identifier combien il y en a ; cela dépend du nombre de diviseurs premiers de n, donc donnez un nom à cette quantité). Reconnaître une somme usuelle.
2. Immédiat grâce à la question précédente et l'exercice 37.

Commentaires. L'identité de la première question (qui est reformulée analytiquement dans la seconde) est parmi les plus importantes de l'arithméticien, dans la mesure où elle permet d'inverser des formules invoquant le produit de convolution, et il y en a beaucoup (préoccupation omniprésente du mathématicien en général, qui va de l'inversion du système $AX = Y$ d'inconnue X jusqu'à l'inversion de Fourier ou de Laplace : relier ce qu'on *connaît* et ce qu'on *veut* nécessite très souvent des inversions). Vous en aurez des applications concrètes dans l'exercice 40 (même si l'on peut s'en passer), mais aussi dans des exercices du chapitre d'arithmétique voire de probabilités avec la formule du crible.
L'étudiant en exercice s'amusera à résoudre la seconde question grâce au produit eulérien de la fonction dzêta. Cette façon de faire permet de mieux comprendre la définition *a priori* artificielle de la fonction de Möbius.

Exercice 40. (Densité des entiers premiers entre eux)

1. Le raisonnement est combinatoire. Une façon d'obtenir cette formule : pour tout nombre premier p, chercher le cardinal de l'ensemble des couples d'entiers divisibles par p. Écrire de manière ensembliste l'ensemble à dénombrer (ou son complémentaire dans $[\![1,n]\!]^2$) à l'aide de ces ensembles-là. Passer aux cardinaux. Vous aurez une réunion non disjointe de plus de deux ensembles et ne pourrez donc pas utiliser la fameuse formule de Moivre $\mathrm{card}(A\cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A\cap B)$. Y remédier par une récurrence où, dans l'hérédité, vous utiliserez la formule de Moivre. Conclure en remarquant

que dans la somme obtenue, le signe en facteur de chaque cardinal dépend du nombre de facteurs premiers dans l'indexation de la somme : c'est décrit par μ.

2. Encadrer trivialement la partie entière de la formule précédente, et diviser par n^2. Il apparaîtra des sommes avec du $\frac{\mu(k)}{k^2}$ (reconnaître $\frac{1}{\zeta(2)}$ grâce à l'exercice précédent), et du $\frac{\mu(k)}{k}$ (à majorer, quitte à ce que soit grossier, par un majorant classique des sommes harmoniques : vous savez faire). Passer à la limite.

> **Commentaires.** Il est très souvent plus pratique de caractériser les entiers premiers entre eux comme les entiers qui n'ont aucun diviseur premier en commun (plutôt que de dire que leur pgcd vaut 1). Deux intérêts : 1° si l'on veut formuler ou démontrer que deux entiers sont premiers entre eux par recensement exhaustif des diviseurs premiers en commun, c'est bien plus rapide que de vouloir recenser tous les diviseurs communs « tout court », 2° si l'on veut raisonner sur un diviseur premier commun potentiel, on peut utiliser le lemme d'Euclide (et plus généralement tout résultat seulement valable pour des nombres premiers).
>
> La généralisation de la formule de Moivre est très utile pour les dénombrements savants qui font intervenir une réunion de trois ensembles ou plus. On peut s'en servir pour dénombrer l'ensemble des surjections d'un ensemble fini dans un autre ou l'ensemble des permutations d'un ensemble fini qui n'ont pas de point fixe. Il est donc intéressant de savoir la trouver et la démontrer.

☢ **Exercice 41.** Il est possible d'expliciter les éléments de l'ensemble dénombré (combien y a-t-il d'entiers de la forme $kq + r_{n,k}$ avec les contraintes $r_{n,k} \geqslant \frac{n}{2}$ et $kq + r_{n,k} \leqslant n$?), et donc d'expliciter le cardinal en question. Vous aurez une somme dont le terme général est une partie entière et qui, à un facteur $\frac{1}{n}$ près, est une somme de Riemann de pas $\frac{1}{n}$ (faire bien attention cependant car la fonction dont on reconnaît une somme de Riemann n'est pas continue sur $[0,1]$; néanmoins le caractère borné fait qu'on s'en sort malgré tout). Passer à la limite. Après relation de Chasles qui permet de simplifier la partie entière, l'intégrale obtenue fait apparaître les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{k+\frac{1}{2}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{k+1}$. Vous savez trouver des développements asymptotiques de leurs sommes partielles, ce qui permet de conclure.

> **Commentaires.** Cet exercice permet de mettre en œuvre de nombreuses idées non triviales : convergence d'une somme de Riemann d'une fonction qui n'est pas continue sur un segment, calcul d'une somme dont le terme général est une fraction rationnelle et qui nécessite un raisonnement fin sur les sommes partielles pour se simplifier, et un peu de dénombrement.
>
> On découvre en passant que les sommes de Riemann peuvent se généraliser à des intervalles ouverts ! Très utile à savoir ! Du moins, *sous certaines hypothèses*. L'élève motivé cherchera un exemple sur $]0,1]$ qui ne fonctionne pas (somme de Riemann divergente avec pourtant une intégrale convergente). Vous trouverez d'autres cas fonctionnels : voir l'exercice 18 du chapitre I.

★ **Exercice 42.** Deux façons de faire : 1° développer en série $\frac{1}{1-z^n}$ et réécrire autrement la double somme obtenue grâce aux théorèmes du cours, 2° écrire : $d(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{D(n)}(k)$ où $D(n)$ est l'ensemble des diviseurs de n, et réarranger la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d(n)z^n$ ainsi réécrite avec des paquets convenables (si vous interprétez visuellement l'ensemble des couples (n,k) tels que $1 \leqslant k \leqslant n$: au lieu de sommer colonne par colonne, sommer ligne par ligne).

> **Commentaires.** La deuxième façon de faire peut paraître la plus astucieuse. Au contraire. Elle est même supérieure puisqu'elle permet de trouver l'expression du membre de gauche sans la connaître *a priori*.
>
> L'idée derrière, et qu'on peut retrouver en de nombreux exercices qui font intervenir une somme dont le terme général dépend de diviseurs inférieurs à n : écrire ce terme général sous la forme $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A(n)}(k)$ où $A(n)$ est l'ensemble des diviseurs apparaissant dans la définition du terme général. L'intérêt de procéder ainsi est qu'en intervertissant la double somme, on inverse la relation d'ordre de divisibilité : on ne compte plus des diviseurs (difficile) mais des multiples (très facile). Vous pouvez remplacer $d(n)$ par d'autres fonctions arithmétiques dépendant de diviseurs (il y en a dans cette feuille d'exercices) pour vous convaincre de l'efficacité de l'approche.
>
> En cas de double indexation, s'efforcer de se représenter *concrètement* (en représentant $\mathbb{N}^2$ par un quadrillage d'une partie du plan) les couples d'indices en présence. Cela vous permettra souvent de visualiser les autres façons de sommer.

Dénombrabilité

★ **Exercice 43.** S'inspirer de l'argument diagonal de Cantor utilisé dans le cours pour démontrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : entre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et les réels écrits sous forme décimale, il n'y a que peu de différence. Remarquer ensuite que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont très naturellement en bijection (comment dénombrez-vous $\mathcal{P}(E)$ quand E est fini ?).

> **Commentaires.** Vous avez peut-être déjà rencontré l'énoncé selon lequel il n'existe pas de surjection f de E dans $\mathcal{P}(E)$, peu importe l'ensemble E. Le raisonnement passe traditionnellement par l'examen d'une partie A de E telle que, si f est surjective, il existe x vérifiant $x \in A \cap (E \setminus A) = \emptyset$. On pourra vérifier que cette partie A est l'image par la bijection naturelle $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ d'une suite contredisant la dénombrabilité de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Tous les arguments classiques d'indénombrabilité sont en fait liés.

Exercice 44. (Dénombrabilité des nombres algébriques) C'est à peu près la même idée que pour la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$: noter qu'en bornant la taille des coefficients, on obtient un ensemble fini. Attention à bien prendre en compte le degré. Noter que l'ensemble des nombres transcendants est $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$, et vous connaissez la dénombrabilité (ou non) des deux ensembles en jeu (pour la dénombrabilité ou non de $\mathbb{C}$, utiliser ce que vous savez sur $\mathbb{R}$).

> **Commentaires.** Une grande partie des arguments de dénombrabilité utilisent une réunion dénombrable d'ensembles finis. Lorsqu'il y a des entiers en jeu, c'est facile : il suffit de mettre une borne sur leur taille pour produire un ensemble fini.
> Remarque culturelle qui dépasse le cadre de cet exercice : lorsqu'il n'y a pas des entiers, mais ce qu'on appelle des nombres algébriques, on peut parfois contourner la difficulté en introduisant la *hauteur* de ces nombres, qui joue le même rôle que la valeur absolue des entiers et assure qu'il y en a un nombre fini dès qu'on impose une borne. Cela a donné naissance au XXᵉ siècle à une branche très riche et encore active de l'arithmétique (qui porte sans surprise le nom de théorie des hauteurs). Son plus grand succès fut la démonstration en 1986 d'une conjecture de Mordell, qui valut la médaille Fields à son auteur (!) Faltings.

Exercice 45. (L'ensemble de Cantor)

1. Se rappeler que tout nombre de $[0,1]$ admet un développement en base 3 : $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n}$. Vérifier que le procédé de construction peut s'interpréter sur ce développement : les éléments de C_1 vérifient $a_1 \neq 1$, ceux de C_2 vérifient $a_2 \neq 1$, etc. Pour s'en convaincre, il faut savoir encadrer $\sum_{n=k}^{+\infty} a_n 3^{-n}$ pour tout k.
   La surjectivité en découle, et l'injectivité vient de l'unicité du développement... À une subtilité près ! Laquelle ?
2. Immédiat en utilisant l'écriture en base 2 de tous les réels.
3. On sait que $[0,1[$ n'est pas dénombrable par le cours. Passer à $[0,1]$.

> **Commentaires.** On ne réalise pas la portée de ce raisonnement si l'on perd de vue que cet ensemble, qu'il est chaudement encouragé de se représenter concrètement (en gros, on part de $[0,1]$ et on enlève à chaque étape le tiers central des segments présents), est de « mesure nulle » (pour cette discussion, il suffit de se dire que la mesure d'une réunion de segments est la somme de leurs longueurs, et qu'on obtient la mesure d'ensembles plus sophistiqués par passage à la limite), au sens où, partant de $[0,1]$ qui est de mesure 1, chaque étape – pour passer de C_n à C_{n+1} – multiplie par $\frac{2}{3}$ la mesure de l'ensemble précédent. Au bout d'une infinité d'étapes, la mesure de $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ est donc inférieure à $(2/3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: elle est nulle. On a donc un ensemble qui est ridiculement petit si l'on raisonne en termes de volume, et il est pourtant extrêmement grand au regard du cardinal ! C'est en cela un exemple très différent des ensembles indénombrables déjà croisés.

Familles sommables

✓ **Exercice 46.** Famille (a) : rien que $n \in \mathbb{N}$ pose problème. Famille (b) : aucune difficulté par comparaison. De bons paquets évitent d'être tracassé plus que cela par $n < 0$. Famille (c) : le calcul explicite est possible pour $n \geqslant 0$ et $n < 0$. Le théorème de sommation par paquets autorise cette scission en deux cas. Famille (d) : de même.

> **Commentaires.** Rien de profond. Raisonner par paquets avec une famille de $[0,+\infty]^{\mathbb{Z}}$ me semble une idée naturelle.

✓ **Exercice 47.** Famille (a) : sommer par paquets de sorte à reconnaître une somme de Riemann. Famille (b) : majorer de sorte à avoir un produit au dénominateur, et reconnaître deux séries usuelles. Cela donnera la sommabilité pour certaines valeurs de α. Pour les autres valeurs de α : une minoration permet de se ramener à la famille (a) (mais pas avec le même α). Famille (c) : idée analogue. Famille (d) : l'idée est que quand r^2 est proche de 0, $\frac{1}{r^2}$ est très gros. Problème : il y a une infinité de termes r^2 près de 0. Préciser les choses pour conclure.

> **Commentaires.** Lorsqu'il y a deux variables dans les inégalités, il est très utile de connaître entre autres : l'inégalité arithmético-géométrique (qui permet de « transformer produit en somme » ou inversement), l'inégalité triangulaire pour $\sqrt{\cdot}$, et quelques autres encore que vous verrez en topologie.
> À chaque fois, on essaie idéalement de se ramener aux sommes usuelles sur $\mathbb{N}$. C'est le terme général de la famille qui est susceptible de nous enseigner à quoi se ramener.
> Lorsqu'on veut *contredire* une sommabilité, il vaut le coup de se demander si une sous-famille ne serait pas plus simple à sommer (puisque la sommabilité d'une famille implique la sommabilité de toutes ses sous-familles).

✓ **Exercice 48. (🗎)** Cela ressemble à une fraction rationnelle en p et q. Le principe reste donc le même que pour les sommes classiques : voir *Méthodes*, *Calculer la somme d'une série convergente*, si nécessaire. Vous vous simplifierez cependant la vie avec des paquets convenables.

> **Commentaires.** C'est standard, même si c'est une somme double. Notez qu'il faut déjà connaître sur le bout des doigts les sommes usuelles indexées par une partie de $\mathbb{N}$.

☢ **Exercice 49.** Utiliser le théorème de Fubini. Remarquer qu'à q fixé, $\frac{p!q!}{(p+q+2)!}$ est une fraction rationnelle : on sait calculer sa somme après décomposition en éléments simples. L'étape difficile est la simplification de la double somme *finie* qui en résulte (la somme indexée par q n'intervient toujours pas à ce stade, si vous avez sommé sur p). Quelques pistes : permuter les deux sommes, en prenant garde que vous sommez sur un « triangle » (si l'on visualise les couples d'indices parcourus dans le « plan » $\mathbb{N}^2$) ; remarquer que vous avez énormément de factorielles qui apparaissent, en simplifiant les produits d'entiers que votre décomposition en éléments simples a inévitablement fait apparaître : les regrouper ; enfin, reconnaître la formule du binôme de Newton. une fois cette double somme finie calculée, vous n'aurez aucun mal à reconnaître la somme donnée dans l'énoncé en sommant sur q.

Selon votre façon de raisonner, vous aurez peut-être besoin de savoir simplifier : $\sum\limits_{k=0}^{p-2}(-1)^k\binom{q+1}{k}$ (ou une somme apparentée). Remarquer que grâce à la formule de Pascal, les termes se simplifient deux à deux.

> **Commentaires.** On ne peut pas faire rapidement les changements d'indexation, surtout pour une somme « en triangle », si l'on ne s'efforce pas de se représenter *concrètement* (en représentant $\mathbb{N}^2$ par un quadrillage d'une partie du plan) les indices (k,q) de la double somme finie que vous devez simplifier. On l'a fait en cours pour visualiser des paquets du théorème de sommation.
> On se demandera si les paquets fréquemment rencontrés $I_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q = n\}$ simplifient la vie ici.

★ **Exercice 50.** Utiliser le théorème de Fubini. Reconnaître des sommes usuelles.

> **Commentaires.** Pour choisir dans quel ordre on somme, avec le théorème de Fubini : choisir l'ordre qui fait immédiatement apparaître une somme usuelle, quand c'est possible (et c'est le cas ici).

Exercice 51. (Contre-exemple au théorème de Fubini)

1. S'intéresser à une sous-famille pour laquelle il est très facile de montrer que ce n'est pas sommable. Traiter la question suivante en premier permet aussi de montrer que ce n'est pas sommable, au risque de contredire un théorème du cours.

2. Remarquer qu'à n ou p fixé, $\frac{1}{n^2-p^2}$ est une fraction rationnelle : calculer sa somme (sur n ou sur p) selon la méthode standard (décomposition en éléments simples).

Commentaires. On voit l'importance de la positivité ou de la sommabilité, comme pour le théorème de sommation par paquets. Aucun affaiblissement des hypothèses n'est possible : par exemple, même la sommabilité de la famille $\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'empêcherait pas les contre-exemples.

Exercice 52. Noter la ressemblance avec un énoncé du cours d'intégration (pour les intégrales de fonctions positives). Il peut vous servir d'inspiration, en faisant attention puisqu'il n'y a pas positivité ici : raisonner sur les parties réelle et imaginaire séparément, et sur leurs parties positive et négative séparément (l'objectif étant de se ramener au cas réel positif). Pour la démonstration de l'inégalité : $\sum_{i\in I} \bigstar \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n} \bigstar$, vous aurez à raisonner sur une partie finie J de I, et à démontrer que pour une telle partie, il existe n tel que $J \subseteq I_n$: montrer d'abord que c'est vrai pour chaque élément de J.

Autre piste potentielle : remplacer la famille $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (qui n'est pas disjointe et empêche l'emploi du théorème de sommation par paquets) par une famille $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite à partir de la précédente et qui, elle, est un recouvrement disjoint de I.

Commentaires. Toutes ces ressemblances entre le cours d'intégration et celui sur les séries (même si on ne doit *surtout pas* perdre de vue les dissemblances) ne sont pas anodines. C'est la théorie de la mesure de Lebesgue qui unifie les deux. Lorsque vous découvrirez cette théorie après la classe préparatoire, vous ne serez pas étonnés de voir des constructions d'abord dans le cas positif (avec une borne supérieure prise sur les intégrales sur des segments, etc.), etc.
Vous trouverez également de telles analogies en abordant la théorie des probabilités. La seconde piste proposée dans l'indication est ce que nous ferons pour démontrer le théorème de continuité monotone.

Exercice 53. ($\zeta(4)$ en quelques secondes)

1. Simplifier le terme général, et sommer. L'autre façon de faire : séparer la somme en trois (s'assurer d'abord que c'est licite), et noter que sommer $f_4(m+n,n)$ sur $(m,n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2$ revient à sommer $f_4(m,n)$ sur (m,n) vérifiant $m>n>0$ (pourquoi ?), de même avec $f_4(m,m+n)$. Utiliser cette observation pour en déduire que la somme initiale revient à éliminer tous les indices tels que $m\neq n$.
2. C'est exactement le même raisonnement qu'à la question précédente.
3. Raisonner par récurrence forte.

Commentaires. Méthode originale et assez peu connue pour calculer les sommes de séries de Riemann. On y utilise ce qu'on appelle les fonctions « polyzêta ». Le cas des entiers impairs est mystérieux. On pourra se demander, dans cette démonstration, où intervient la nécessité que k soit pair.

3.2 Classement des exercices par thèmes

Calculs de sommes : cas subtils	8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 27
Calculs de sommes : cas usuels	8, 16, 48, 51
Comparaison série-intégrale	10, 13, 16, 19, 22
Constante d'Euler	8, 9, 10
Convergence de séries abstraites	6, 17, 18, 23, 27, 34
Convergence de séries explicites	1, 2, 3, 4, 10, 11, 15
Développements asymptotiques de sommes	29, 30, 31, 35, 41
Développements asymptotiques de suites	32, 33, 41
« Différences petites »	16, 34
Lien suite-série	10, 17, 30, 32, 33
Quasi-démonstration du cours	21, 24, 26, 30, 43, 52
Raisonnement arithmétique	7, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42
Règle de D'Alembert	1, 5
Séparer les indices selon leur congruence	8, 9, 10, 11, 12, 16, 25
Séries « trigonométriques »	2, 3
Sommation par paquets, théorème de Fubini	7, 23, 36, 37, 42, 46, 47, 48, 49, 50, 53
Transformation d'Abel	2, 14, 24

Table des matières