Chapitre II — Séries numériques et familles sommables

Jean Le Rond d'Alembert
(1717–1783)

Ernesto Cesàro
(1859–1906)

Guido Fubini
(1879–1943)

On somme des réels et veut la convergence ;
Leur limite étant nulle, aisément je l'obtiens,
Mais une voix d'en-haut avec fureur me tance :
« Laissez cet argument aux chimistes vauriens !

La série harmonique en prouve la carence.
Pour juger si converge un infini de riens,
Comparez votre u_n à ceux de référence,
Ou l'Examinateur vous privera de biens ! »

Ce présage alarmant jette un trouble en mon cœur.
Est-ce un conseil sacré de notre professeur,
Ou l'adage savant d'un divin Célicole ?

Il est vrai que l'effort d'un seul jour est sans fruit
Mais qu'en le répétant, sa somme nous conduit
Aux biens sans fins des Cieux ou d'une Grande École.
(Pierre Le Moyne)

Comment lire ce livret

Il est constitué majoritairement d'un plan du chapitre. Les seuls exemples et propositions écrits intégralement sont les rappels de 1re année et les extensions sans mystères de résultats déjà connus.

Interprétation des différents symboles. Ils sont généralement dans la marge.

♡ : exemple soit instructif, soit très classique ; à comprendre, à connaître par cœur, et à savoir reconnaître : peut tomber à tout instant de l'année, y compris hors de ce chapitre ;

⚠ : mise en garde contre une erreur fréquente extrêmement fâcheuse et durement sanctionnée ;

↘ : à mettre en rapport avec un résultat d'un chapitre antérieur (référencé après la flèche) ;

↗ : à mettre en rapport avec un résultat d'un chapitre ultérieur (référencé après la flèche) ;

→ : à mettre en rapport avec un résultat ultérieur du même chapitre ;

← : à mettre en rapport avec un résultat antérieur du même chapitre ;

💡 : donne l'idée derrière une proposition ; peut aider la mémorisation ou compréhension ;

📄 : plus de détails dans un autre document, en général le *Méthodes* du chapitre ;

🔍 : proposition hors programme : il faut savoir la démontrer si on veut l'utiliser dans un problème écrit ou à l'oral ;

📖 : extrait du programme officiel de Mathématiques en MP.

Révisions attendues

1. L'intégralité du cours de 1re année sur les relations de comparaison, les développements limités et équivalents asymptotiques, etc.
2. L'intégralité du cours de 1re année sur les séries numériques.
3. L'intégralité du cours de 1re ou 2e année sur le calcul intégral et l'intégration plus généralement.

Vos révisions sont insuffisantes si vous ne parvenez pas à faire ces exercices :

Exercice 1. Déterminer un équivalent asymptotique simple de chaque suite ci-dessous quand $n \to +\infty$.

$$a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n), \qquad b_n = \frac{\ln(n^4+4)}{n+1}, \qquad c_n = \ln(n+1) - \ln(n+2),$$
$$d_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+5} - \frac{4}{n^2}, \qquad e_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n^4}, \qquad f_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 2. Calculer les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{\tan(x)-x}$, et : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(\sin(x))^2}\right)$.

Exercice 3. Calculer les sommes : $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{2^n}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n^4}{2^n n!}$.

Exercice 4. Étudier la nature des séries : $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n^2}$, $\sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{3/4}\ln(n)}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

1 Séries numériques : deuxième étude

1717 – 1783

1.1 Comparaison à des séries géométriques : règle de D'Alembert

Proposition 1 (Règle de D'Alembert).

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$, il est tentant d'écrire $u_{n+1} \approx L u_n$, puis $u_n \approx L^n u_0$ par analogie avec une suite géométrique de raison L. Or $\sum_{n\geqslant 0} L^n$ converge pour $L < 1$, diverge pour $L > 1$, donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ aussi. L'incertitude dans le cas $L = 1$ réside dans le fait que l'approximation $u_n \approx L^n u_0$ n'est pas rigoureuse : u_n peut être tantôt plus grand, tantôt plus petit que L^n, ce qui pose problème dès qu'on flotte autour de la ligne de démarcation $L = 1$.

Démonstration (idée). Cas où $L \in \mathbb{R}_+$. Soit $\varepsilon > 0$. Encadrer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à l'aide de la définition de limite, et en déduire un encadrement de u_n par $(L-\varepsilon)^n$ et $(L+\varepsilon)^n$ pour tout n assez grand, à des constantes multiplicatives près (télescoper ou raisonner par récurrence). Choisir convenablement ε selon que $L < 1$ ou $L > 1$, pour conclure par comparaison à des séries géométriques. □

Exercice 5. Compléter la démonstration pour traiter le cas $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$.

Exercice 6. S'inspirer de la démonstration de la règle de D'Alembert pour démontrer la règle de Cauchy : soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes positifs, telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = \lambda \in \mathbb{R}_+$. Alors :
- si $\lambda < 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge ;
- si $\lambda > 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Remarque. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, tout peut arriver.

Remarque. Cadre d'application de la règle de D'Alembert.

Exemple 1. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exemple 2. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

Remarque. N'utilisez pas la règle de D'Alembert pour étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} q^n$ où $q \in \mathbb{R}_+^*$.

	Avantage	Inconvénient
Formule de Stirling	Équivalent précis	Calcul compliqué
Règle de D'Alembert	Calcul facile	Cas indécis si $L = 1$

1.2 Quand les critères habituels ne s'appliquent pas

Lemme 2 (Différence convergente de deux séries).

Exemple 3. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Remarque. Contre-exemple au théorème de comparaison des séries à termes positifs.

Méthode 1. Un analogue de l'intégration par parties : la transformation d'Abel. 8

Exemple 4. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.

Étudier $\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ plutôt. Effectuer une transformation d'Abel en faisant apparaître $\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}$ dans la nouvelle somme (motivation : avoir un télescopage). Calculer explicitement $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$ pour tout n pour en déduire que cette somme est majorée par une constante M. Conclure que chaque terme de la transformation d'Abel a une limite finie quand $N\to+\infty$.

1.3 Étude asymptotique des restes et sommes partielles

Méthode 2. Cas très particulier où $u_n = f(n)$, où f est continue et MONOTONE : comparaison entre série et intégrales. Voir figure.

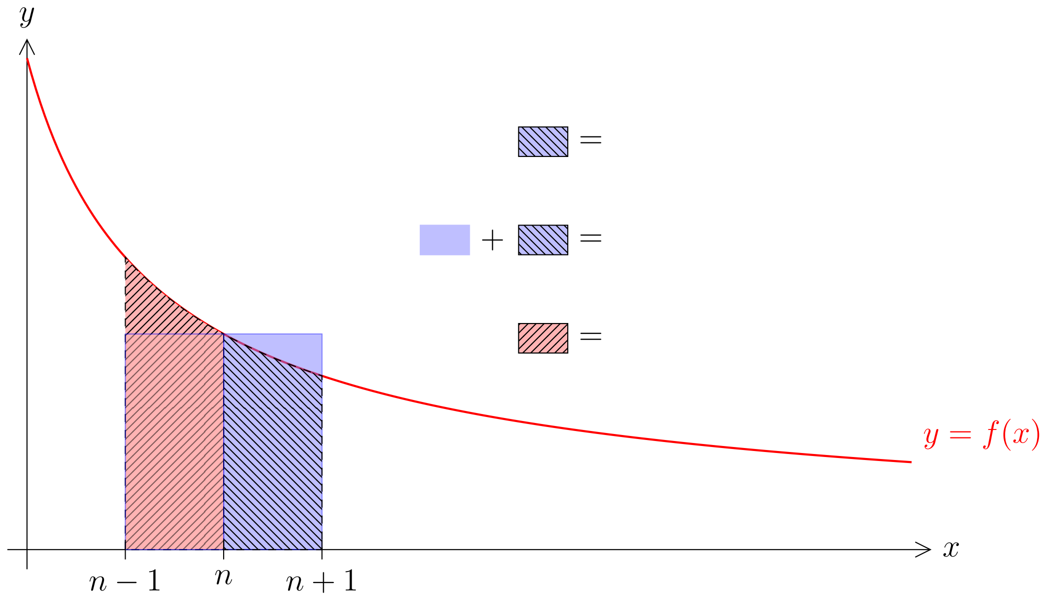
Exemple 5. Soit $s \in]-\infty,1[$. Équivalent asymptotique de $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}$ quand $N\to+\infty$.

Exercice 7.

1. Traiter le cas où $s = 1$.
2. Soit $s \in]1,+\infty[$. Trouver un équivalent asymptotique simple, quand $N\to+\infty$, de : $\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$.

Exemple 6. Raffinement du terme d'erreur dans l'équivalent : $\sum_{n=1}^{N}\sqrt{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}N^{3/2}$.

FIGURE 1 – Comparaison entre série et intégrales. Cas d'une application $f :]x_0,+\infty[\to\mathbb{R}$ décroissante.



Théorème 3 (Sommation des relations de comparaison). ↘ I th. 16

Corollaire 4 (Théorème de Cesàro).

Exemple 7. Équivalent asymptotique d'une suite vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$. ♡

Exemple 8. Développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique. ♡

2 Familles sommables

L'objectif est de pouvoir définir la somme d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ indexée par un autre ensemble que $\mathbb{N}$ ou ses parties. Comme, *a priori*, nous ne savons calculer que des sommes indexées par des ensembles d'entiers naturels, nous nous y ramenons *via* des bijections $\varphi : \mathbb{N} \to I$ et c'est ce qui motive l'étude des ensembles *dénombrables*.

2.1 Ensembles dénombrables

Définition 5 (Ensemble dénombrable, au plus dénombrable)**.**

Proposition 6 (Un ensemble au plus dénombrable est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$)**.**

Remarque. Une injection de E dans $\mathbb{N}$ suffit.

Proposition 7 ($\mathbb{Z}$ est dénombrable)**.**

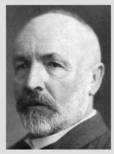
Proposition 8 (Produit cartésien d'ensembles dénombrables, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable)**.**

Remarque. Cas « au plus » dénombrable.

Proposition 9 (Réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables)**.**

Corollaire 10 ($\mathbb{Q}$ est dénombrable)**.**

Proposition 11 ($\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable)**.**


1717 – 1783

2.2 Familles sommables à valeurs dans $[0, +\infty]$

Dans cette section et la suivante, I et J désignent des ensembles quelconques (qui, dans les faits, peuvent être pris au plus dénombrables).

Définition 12 (Somme d'une famille de $(\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})^I$, sommabilité)**.**

↘ I déf. 2

Proposition 13 (Cas I fini, $I = \mathbb{N}$)**.**

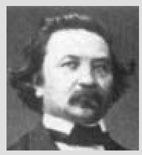
Théorème 14 (Théorème de sommation par paquets, cas positif)**.**

Corollaire 15 (Propriétés de base)**.**

Mise en garde 1. La formule du changement d'indice pour une série non absolument convergente.

Exemple 9. Identités : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} x_k + \sum_{k=1}^{+\infty} x_{-k} = x_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(x_k + x_{-k})$.

Exemple 10. Identité : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{k=0}^{+\infty} x_{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} x_{2k+1}$.


1822-1900

Exemple 11. Nature de la série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 16 (Le support d'une famille sommable est au plus dénombrable)**.**

Corollaire 17 (Suite exhaustive de parties de I)**.**

Corollaire 18 (Théorème de Fubini positif)**.**

Corollaire 19 (Produit de deux sommes, cas positif)**.**

2.3 Familles sommables de nombres complexes

Définition 20 (Famille de $\mathbb{C}^J$ sommable, ensemble $\ell^1(J)$)**.**

Exemple 12. Soit $z \in \mathbb{C}$. Sommabilité de la famille $\left(z^{ij}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2}$.

Définition-Proposition 21 (Somme d'une famille de $\ell^1(J)$)**.**

Proposition 22 (Propriétés de base)**.**

Théorème 23 (Théorème de sommation par paquets)**.**

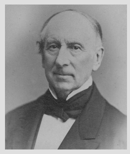
1879 – 1943

Corollaire 24 (Théorème de Fubini)**.** *Soit $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille sommable de nombres complexes. Alors les familles $\left(\sum_{i\in I} x_{i,j}\right)_{j\in J}$ et $\left(\sum_{j\in J} x_{i,j}\right)_{i\in I}$ sont sommables et on a :*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} x_{i,j}.$$

Corollaire 25 (Produit de deux sommes)**.** *Soient $(x_i)_{i\in I}$, $(y_j)_{j\in J}$ deux familles sommables de nombres complexes. Alors la famille $(x_i y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est également sommable, et on a :*

$$\left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{j\in J} y_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j.$$



1789–1857

Corollaire 26 (Produit de Cauchy)**.**

Mise en garde 2. Contre-exemple en l'absence de sommabilité.

Corollaire 27 (L'exponentielle est un morphisme)**.**

Exemple 13. Développement en série de $\dfrac{1}{(1-q)^2}$ pour $q \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à 1.

Proposition 28 (Théorème de comparaison)**.**

Conclusion. Résumé du principe des familles sommables.

Exemple 14. Calcul de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{k^n}$.

Dans le cas d'une famille quelconque, il est préconisé de commencer par un calcul formel à justifier dans un second temps.

— Fin du chapitre II —

Rappels sur les calculs dans $[0, +\infty]$

— addition : $\forall (x, y) \in [0, +\infty]^2$, $x + y = +\infty \Longleftrightarrow x = +\infty$ ou $y = +\infty$;
— multiplication : $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, et : $\forall x \in]0, +\infty]$, $x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = +\infty$.

En général on ne peut pas donner de sens à $0 \times (+\infty)$ ou $(+\infty) \times 0$... sauf dans le cas TRÈS PARTICULIER des familles sommables de $[0, +\infty]$ et des intégrales impropres de fonctions positives. On *pose*, UNIQUEMENT DANS CE CONTEXTE :

$$0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0.$$

— pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $x < +\infty$, et : $+\infty \leqslant \infty$; en particulier :

$$\forall x \in [0, +\infty], \quad (x \geqslant +\infty \Longrightarrow x = +\infty) \ ;$$

— les inégalités restent compatibles avec l'addition et la multiplication dans $[0, +\infty]$;
— la propriété de borne supérieure dans $\mathbb{R}$ devient, dans $[0, +\infty]$: **toute** partie A de $[0, +\infty]$ admet une borne supérieure. En particulier :

$$\sup(A) = +\infty \Longleftrightarrow A \text{ non majorée, et : } \sup(\emptyset) = 0.$$

— si $A \subseteq B \subseteq [0, +\infty]$, alors : $\sup(A) \leqslant \sup(B)$;
— $\forall \lambda \in [0, +\infty]$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$;
— si $A, B \neq \emptyset$: $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Compléments et approfondissements

1. Un élève ambitieux se doit de faire sienne la transformation d'Abel et la technique de comparaison série-intégrale, y compris dans le cas non monotone.
   Plus généralement : de nombreux exercices écrivent des relations entre sommes et intégrales. Les comprendre et les exploiter !
2. Les familles sommables fournissent les bons théorèmes pour étudier des sommes de nature arithmétique : sommes indexées par des diviseurs, des nombres premiers, etc. Je pense évidemment au théorème de sommation par paquets en particulier.
   Les exemples essentiels qui démontrent son efficacité dans ce contexte sont : les produits eulériens (celui de fonction dzêta étant le premier historiquement et le plus important) et le produit de séries de Dirichlet.
3. Pour l'étude de nombres définis analytiquement (π et e) dans un contexte algébrique (irrationalité, solution d'une équation polynomiale rationnelle), on saura tirer profit de leurs développements sous forme de sommes ($e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$) pour quantifier précisément leur écart à des nombres rationnels ou entiers.

Table des matières

Table des figures