Du cours aux exercices (Aide à la révision du cours)

Chapitre II — Séries numériques et familles sommables

1 Séries numériques : deuxième étude

1.1 Comparaison à des séries géométriques : règle de D'Alembert

Motivation de cette partie

Les séries de Riemann ne se comparent pas toujours facilement à une série, notamment quand le terme général dépend de factorielles (et pour cause, on ne connaît pas encore le comportement asymptotique de $n!$). Cette section remédie à ce problème en proposant une méthode dédiée plus spécifiquement à ce genre de série.

Proposition 1 (Règle de D'Alembert)**.**

✓

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L > 1$, quelle est la différence d'ordre de grandeur, « en gros », entre u_n et u_{n+1} ? Que dire de la croissance d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ qui vérifierait ceci ? En déduire que la règle de D'Alembert est, dans ce cas, intuitivement évidente.
- Trouver des moyens informels de se convaincre que le passage de $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - L\right| \leqslant \varepsilon$ à $(L-\varepsilon)^{n-n_0}u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant (L+\varepsilon)^{n-n_0}u_{n_0}$ est naturel : sortez votre brouillon et faites des manipulations élémentaires, éventuellement avec $n_0 = 0$ et n « petit ». Reconnaître les différentes étapes de l'heuristique du livret, dans la démonstration.
- Montrer que peu importe le réel L choisi, il existe des suites qui peuvent donner $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$.
- Appliquer la règle de D'Alembert à tous les exemples vus l'an dernier. Que remarque-t-on ? Utiliser une calculatrice pour aussi tracer les courbes des termes généraux correspondants, et juger de la vitesse de décroissance : la comparer avec celle des fonctions géométriques $x \mapsto \frac{1}{2^x}$, $x \mapsto \frac{1}{3^x}$, etc. Peut-on faire un lien entre les séries où la règle de D'Alembert est pertinente, et la vitesse de décroissance du terme général ? Analyser sa conformité avec l'encadrement de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ fourni par la démonstration, lorsque $L = 1$.

★

- Et si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1 *par valeurs supérieures*, peut-on conclure ? Et si c'est *par valeurs inférieures* ?
- Peut-on créer une règle de D'Alembert pour les fonctions ? Si $\frac{f(x+1)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$, est-ce que la position de L par rapport à 1 permet d'en déduire la nature de $\int_a^{+\infty} f$?

Exercice 1.

✓ Ce cas est même plus simple que celui de la démonstration effectuée dans la proposition 1. Intuitivement, que peut-on dire de la monotonie et croissance d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ où $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$? En déduire que la règle de D'Alembert est, dans ce cas, intuitivement évidente.

★ Trouver des hypothèses sur $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 0}$ dans le cas où la suite n'admet pas de limite, mais qui permettent malgré tout de conclure à la convergence (le cas de la divergence est plus facile).

Exercice 2.

✓

- Le faire. Bien constater les points communs dans la démonstration avec celle de la règle de D'Alembert. Montrer que le cas $\lambda = 1$ est incertain. Et si $\lambda = +\infty$?
- Trouver des séries pour lesquelles ce critère permet d'obtenir la nature, là où les méthodes usuelles échouent.

★ Trouver des séries où la règle de Cauchy permet de conclure, mais pas la règle de D'Alembert.

Remarque.

✓ Comprendre pourquoi $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ (ou > 1) ne permet pas de conclure : qu'est-ce que cette inégalité veut dire de $(u_n)_{n\geqslant 0}$? Pourquoi est-ce insuffisant pour avoir la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$?

Remarque.

★ Quoi qu'en dise cette remarque, celle faite plus haut montre que les séries de Riemann sont des cas où la règle de D'Alembert ne s'applique pas. Pourtant le terme général contient bien des puissances. Qu'est-ce qui pose problème ?

Exemple 1.

✓
- Bien noter une erreur d'étourderie très tentante si l'on va trop vite : vous devez obtenir $(2n+3)(2n+2)$ et non $(2n+2)$. Inspecter les parités permet de détecter une erreur sans effort intellectuel.
- Retrouver la nature *via* la formule de Stirling. Comparer les mérites des deux méthodes. Il y a mieux à faire que de directement appliquer cette formule avec $(2n+1)!$, si l'on veut que l'équivalent se simplifie : comment ?

Exemple 2.

✓
- Comprendre pourquoi il est *idiot* d'à la fois utiliser la règle de D'Alembert et la formule de Stirling : reprendre cet exemple ou le précédent en calculant $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec la formule de Stirling. Ne plus recommencer.
- En s'inspirant de cet exemple, bricoler d'autres séries définies à l'aide de factorielles, qui donnent le cas d'incertitude de la règle de D'Alembert (noter que si votre bricolage produit une suite vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \neq 0$, il est assez facile de modifier u_n pour obtenir un quotient tendant vers 1).
- Juger de la pertinence de la méthode « $n^\alpha u_n$ » dans ces exemples de cette section.

Remarque.

✓ Observer qu'il n'est pas intéressant (au-delà du contre-sens logique) d'utiliser la règle de D'Alembert pour étudier la nature d'une série géométrique. Constater une restriction dans les hypothèses, et la faiblesse d'une des conclusions.

Après votre révision de cette partie

1. Faire les *Savoir-faire à vérifier*. Traiter uniquement les séries avec des factorielles.
2. Avoir bien compris où la règle de D'Alembert s'applique, et où elle NE s'applique PAS : c'est presque d'égale importance ! Notamment, lorsqu'on étudie la nature d'une série dont le terme général dépend de factorielles, quand est-il préférable d'utiliser la règle de D'Alembert, et quand préfère-t-on utiliser la formule de Stirling ?
3. À ce stade, vous avez vu toutes les méthodes au programme pour étudier la nature d'une série à termes POSITIFS. Avec toutes ces méthodes différentes, vous devez au mieux clarifier le cadre d'application de chacune. Passez tout le début du cours en revue pour cela. S'aider au besoin de l'encart de la section 1 de *Méthodes*. Trouver quelques exemples types pour chacune d'entre elles (comparaison série-intégrale, comparaison à une série de Riemann, méthode « $n^\alpha u_n$ », règle de D'Alembert).

1.2 Quand les critères habituels ne s'appliquent pas

Motivation de cette partie

Cette dernière section donne la marche à suivre pour les dernières séries problématiques, lorsque toutes les autres approches ont échoué, en « cassant » un terme général en somme de termes généraux plus simples (grâce à un développement asymptotique), se traitant tous avec les méthodes précédentes.

Lemme 2 (Différence convergente de deux séries).

✓
- Noter que la démonstration n'a rien de spécifique aux séries, et vaut pour les fonctions, intégrales, etc.
- Et si $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge, peut-on faire un lien entre les natures des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$? Peut-on dire quelque chose de la somme ou différence de deux séries divergentes ? Réfléchir avec des exemples SIMPLES.

Exemple 3.

✓

— Réviser le théorème des séries alternées. Peut-on démontrer que cette série ne vérifie pas ses hypothèses ?
— Être capable de comprendre où arrêter le développement asymptotique pour être certain de pouvoir conclure : ce n'est pas au hasard et il faut être méthodique.
— Reprendre l'étude en remplaçant $\sqrt{n}$ par n^α. Repérer à partir de quel α il y a convergence.

★ Noter que cette stratégie n'a rien de spécifique aux séries et vaut pour les intégrales. S'en convaincre en fabriquant immédiatement un exemple analogue à celui-ci ; il faut simplement se demander ce qui peut jouer le rôle du $(-1)^n$ dans le cas intégral, étant donné que $x \mapsto (-1)^x$ n'est certainement pas bien définie sur une demi-droite réelle.

Remarque.

★ Produire des contre-exemples plus élémentaires : prendre une série convenable dont les termes se simplifient deux à deux. Il n'est donc pas nécessaire de recourir à une telle artillerie.

Méthode 1.

8

✓ **Lecture conseillée.** *Méthodes*, section 8, au moins la partie sur la convergence des séries.

★

— Puisque cette transformation est présentée comme un analogue discret de l'intégration par parties : pousser plus loin cette analogie. Qu'est-ce que l'analogue discret de la dérivée ou des primitives ? Du théorème fondamental de l'analyse ? D'une équation différentielle linéaire ? De l'inégalité des accroissements finis ?
— On a coutume d'appeler *dérivation* sur un anneau A qui est un K-espace vectoriel (plus tard on appellera cela une K-algèbre) une application $d : A \to A$ qui est K-linéaire et vérifie : $\forall (u,v) \in A^2$, $d(uv) = d(u)v + ud(v)$. À cet égard, est-ce que $(u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}$ est une dérivation de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$?

☢ Dans le cas où il existe $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe C^1 qui interpole $(u_n)_{n\geqslant 0}$: arriveriez-vous à écrire $\sum_{n=0}^{N} u_n v_n$ en fonction de la suite $(V_n)_{n\geqslant 0}$, de f et f', et d'une intégrale ? À quels égards cette réécriture peut être plus agréable à manier ? Vous aurez peut-être une idée plus précise après avoir lu dans *Méthodes*, voire subi, les difficultés calculatoires que cause la transformation d'Abel par rapport à l'intégration par parties.

Exemple 4.

♡

✓

— Comparer avec les natures des intégrales analogues. Comment avait-on eu leur nature, déjà ? S'en souvenir à la lumière de l'heuristique de la transformation d'Abel.
— Et si $\theta \equiv 0 \bmod 2\pi$, que dire de la nature des séries ? Qu'est-ce qui change dans la démonstration ?
— Est-ce que la majoration triviale $\sum_{n=1}^{N} \left|e^{in\theta}\right| \leqslant N$ aurait suffi dans la démonstration ?
— Reprendre l'exemple 3 avec une transformation d'Abel, en vous inspirant de ce qu'on a fait ici.

★

— Les différentes étapes de la démonstration pourraient marcher avec des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ plus générales. Penser à un énoncé concluant à la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n v_n$ avec de bonnes hypothèses qui permettent de reproduire presque mot pour mot la démonstration de cet exemple.
— Parvient-on à retrouver la nature des séries usuelles avec une transformation d'Abel ?

☢ Pour $\alpha = 1$ et *certaines* valeurs de θ modulo 2π, vous pouvez obtenir la nature de ces deux séries sans passer par une transformation d'Abel. Lesquelles ?

Après votre révision de cette partie

1. **Lecture impérative.** *Méthodes*, sections 1 et 2. Refaire vous-même cette synthèse (voire une fiche). « Inventer » un exemple type pour chaque situation de l'encart rouge.
2. Essayer de faire tous les *Savoir-faire à vérifier*, sauf ceux sur les développements asymptotiques.

1.3 Étude asymptotique des restes et sommes partielles

Motivation de cette partie

On donne des méthodes pour obtenir des équivalents (voire davantage) de sommes partielles ou de restes. La meilleure méthode connue pour encadrer des sommes étant la comparaison série-intégrale, il est logique qu'on en reparle. Le théorème d'intégration des relations de comparaison a un analogue discret qui, appliqué aux sommes télescopiques, permet aussi l'étude de suites.

Méthode 2.

✓
— Vérifier, par des contre-exemples simples et explicites, que la monotonie est absolument essentielle.
— Réviser ce que vous avez vu en 1re année sur la comparaison série-intégrale, et être capable de retenir (et démontrer rapidement) l'encadrement de la somme par des intégrales, dans le cas croissant ou décroissant. Voir si on n'est capable de directement raisonner sur la somme ou l'intégrale pour avoir l'encadrement, ou si l'on préfère d'abord encadrer f, puis intégrer, puis sommer. Il est important de trouver une rédaction à votre convenance. Une interprétation graphique peut vous aider à y voir clair.

Exemple 5.

✓
— Noter que l'équivalent obtenu est intuitif et simple à retenir (pourquoi ?).
— Pour $s \in \{-1, -2, -3\}$, comparer l'équivalent avec les valeurs exactes connues de ces sommes.

★
— Pour $s < 0$, trouvez une autre méthode permettant de trouver ces équivalents beaucoup plus rapidement.
— Généraliser : sous quelle condition suffisante a-t-on : $\sum_{n=1}^{N} f(n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \int_1^N f(t)\mathrm{d}t$?

Exercice 3.

✓ Montrer que l'encadrement que vous avez produit dans la deuxième question donne un moyen de calculer des valeurs approchées des sommes de séries de Riemann. L'appliquer au calcul approché de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ à 10^{-2} près (je prends ces exemples car on sait en donner des valeurs exactes, ce qui permet de juger l'efficacité de votre approximation). Que pensez-vous de l'efficacité du calcul ?

★
— A-t-on toujours, en cas de convergence, l'équivalent : $\sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \int_N^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$? Se poser éventuellement la question plus tard, quand le théorème de sommation des équivalents permettra d'obtenir plein d'exemples.
— Varier les exemples : peut-on trouver des équivalents des sommes partielles ou des restes de $\sum_{n\geqslant 2} n^\alpha (\ln(n))^\beta$, $\sum_{n\geqslant 1} e^{an^\alpha} n^\beta$, etc., selon les valeurs des paramètres ?

Exemple 6.

✓
— Améliorer le terme d'erreur. Pour savoir comment : songez à une technique déjà utilisée dans un autre contexte d'intégration, pour augmenter la vitesse de décroissance de l'intégrande. Si vous voyez à quoi je pense : noter que vous pouvez répéter le procédé *ad vitam æternam* pour avoir un développement aussi précis qu'on veut.
— Généraliser à $\sum_{n=1}^{N} n^\alpha$ avec $\alpha \geqslant -1$, ou à $\sum_{n=N+1}^{+\infty} n^\alpha$ avec $\alpha < -1$.

★ Vérifier que dans le cas d'une fonction f décroissante et positive, la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_n^{n+1} (f(n) - f(t))\mathrm{d}t$ converge. En déduire un théorème de comparaison série-intégrale comparant les natures de $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ et $\int_{n_0}^{+\infty} f$. À comparer avec le lemme 2.

Théorème 3 (Sommation des relations de comparaison).

↘ I th. 16

✓

- Faire la démonstration que j'ai sautée, en imitant le cas intégral.
- Est-ce que l'approche que je décris, juste après l'énoncé du théorème, pour retrouver les équivalents des sommes de Riemann, permettrait aussi de les CALCULER (dans le cas d'un exposant entier) ?
- Comme dans le cas intégral, mais avec l'usage du lien suite-série : vous forger une « base de données » de séries dont vous connaissez des équivalents des sommes partielles ou des restes. Pour cela, partez de suites $(v_n)_{n\geqslant 0}$ très simples ($\left(n^a e^{n^b}\right)_{n\geqslant 0}$ par exemple), et regardez à quelle suite basique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est équivalent $v_{n+1}-v_n$ quand $n\to+\infty$. Utiliser le théorème de sommation des équivalents pour en déduire un équivalent des sommes partielles ou des restes de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$. Si vous choisissez bien vos suites $(v_n)_{n\geqslant 0}$, vous aurez ainsi une grande famille d'équivalents « de référence ». Est-ce que vous obtenez toujours des équivalents analogues à ceux du cas intégral ? Comprenez-vous les cas où c'est différent ? Attention aux analogies hâtives.
- Les hypothèses sont sur la nature de $\sum_{n\geqslant 0} v_n$. Aurait-on pu avoir le même théorème en les faisant sur $\sum_{n\geqslant 0} u_n$?
- Chercher des contre-exemples à l'équivalence (ou autre relation) des sommes partielles de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ lorsque les séries *convergent*. Il n'y a pas besoin de chercher très loin.

★

- Vérifier que le cas intégral *contient* le cas discret : en appliquant le théorème d'intégration des relations de comparaison à des fonctions bien choisies, obtenir ce théorème de sommation. Pour cela, on notera que toute série est une intégrale déguisée. Est-ce que cette stratégie permet d'avoir d'autres théorèmes sur les séries ?
- Trouver des contre-exemples sans l'hypothèse de positivité. Si vous en avez trouvé dans le cas intégral, vous pourrez vous en inspirer (ce sera en vérité bien plus simple dans le cas discret).

☢

Dans tous les exemples que vous étudierez, éventuellement de votre cru, regarder si une transformation d'Abel ne vous permettrait pas également d'avoir un équivalent. Après tout, l'intégration par parties a parlé cette utilité dans le cas intégral, donc pourquoi pas son analogue discret ?

Corollaire 4 (Théorème de Cesàro)**.**

✓

- Le démontrer directement sans recours au théorème précédent.
- Pourquoi n'ai-je pas directement utilisé le théorème précédent avec la relation $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$, préférant une contorsion en apparence artificielle ? Deux raisons à cela.

★

Réciproquement, si $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, est-ce que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$? Pensez aussi au cas d'une suite positive, sinon c'est trop facile de répondre à cette question.

Exemple 7.

✓

Est-on toujours certain qu'à la fin du calcul de $u_{n+1}^{\gamma}-u_n^{\gamma}$, un bon choix de γ permet de conclure ?

★

- Comprendre pourquoi cette méthode permet éventuellement de démontrer qu'une application n'est pas contractante (le sinus en l'occurrence).
- Varier les exemples. Prendre notamment des cas de relations $u_{n+1}=f(u_n)$ où : 1° le premier terme non nul du développement limité de f n'est pas x, mais αx, ou plus généralement αx^{β} avec $\beta>1$, 2° le point fixe vers lequel $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge n'est pas 0. Tout cela afin de voir la souplesse ou la limite de la technique.

☢

J'affirme que cette méthode est un analogue discret de l'inégalité des accroissements finis. Pourquoi ?

Exemple 8. ♡

✓

- Revoir si besoin comment on a obtenu l'existence de γ.
- Comprendre pourquoi j'ai poussé le développement de $u_{n+1}-u_n$ de sorte à avoir deux termes, alors que l'équivalent n'en nécessite qu'un seul.
- Pour vous assurer que vous avez compris le principe : raffiner encore le développement.
- Reprendre l'exemple 6, et obtenir son développement asymptotique par le lien suite-série.

★ Se convaincre d'une limite de cette méthode : elle nécessite d'obtenir au moins un équivalent (c'est-à-dire le premier terme du développement asymptotique) par un autre moyen. Pourquoi ?

Après votre révision de cette partie

1. **Lecture conseillée.** *Méthodes*, *Étudier des suites en passant par des séries télescopiques.*
2. Récapitulez toutes les façons d'avoir des équivalents ou développements asymptotiques de sommes partielles et restes. Selon votre recul, vous en trouverez entre deux et quatre. Idéalement : exercer toutes ces méthodes sur des exemples simples (séries de Riemann...), pour discuter de leurs mérites comparés.
3. Faire les *Savoir-faire à vérifier* sur les développements asymptotiques.

2 Familles sommables

2.1 Ensembles dénombrables

Motivation de cette partie

Nous aurons besoin cette année de savoir calculer des sommes indexées par des ensembles infinis qui ne sont pas nécessairement $\mathbb{N}$ (par exemple lorsqu'on réalisera des expériences aléatoires avec éventuellement, pour résultats possibles, tous les entiers relatifs). Nous pouvons toutefois nous y ramener si l'on peut « numéroter » ces ensembles infinis par des entiers naturels : nous formalisons dans cette section ce qu'est un tel ensemble infini.

Définition 5 (Ensemble dénombrable, au plus dénombrable)**.**

✓ Relier cette définition au fait qu'un ensemble dénombrable soit un ensemble dont on peut numéroter les éléments.

Proposition 6 (Un ensemble au plus dénombrable est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$)**.**

✓
- Pourquoi l'existence d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et une de ses parties peut paraître contre-intuitive au commun des mortels ? Quels autres ensembles vérifient ceci ? Cela les caractérise-t-il ?
- Se convaincre que le minimum de $A \setminus \{u_0, \ldots, u_n\}$ existe toujours. Cela serait faux avec une partie finie ou une partie de $\mathbb{Z}$: quelles propriétés de A et $\mathbb{N}$ interviennent ?
- La démonstration de l'item (b) semble suggérer que la relation « être en bijection avec » est transitive. Est-ce que cela définit une relation d'équivalence ? Il y a un piège subtil.

★ Achever de vérifier que l'application proposée est bijective, si je ne l'ai pas fait en cours.

Remarque.

✓
- Expliquer pourquoi, si $A \subseteq B$ et si B est dénombrable, alors A aussi. Que dire si A est indénombrable ? Se convaincre que tout cela est intuitif.

★
- À l'inverse, peut-on caractériser les ensembles E pour lesquels il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans E ?
- Et s'il existe une surjection de E dans $\mathbb{N}$, est-ce intéressant ? Et s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans E ?

Proposition 7 ($\mathbb{Z}$ est dénombrable)**.**

✓
- Pourquoi l'existence d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ peut paraître contre-intuitive au commun des mortels ?
- Vérifier HONNÊTEMENT que les applications proposées sont réciproques l'une de l'autre, et surtout se demander : comment pouvait-on « deviner » ces bijections ?
- Essayer de proposer au moins deux autres possibilités de bijections $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Il n'y a donc pas unicité de la bijection : et plus généralement ? Existe-t-il des ensembles dénombrables E pour lesquels la bijection $f : \mathbb{N} \to E$ est unique ?

Proposition 8 (Produit cartésien d'ensembles dénombrables, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable)**.**

✓

- Si vous voulez peaufiner votre culture scientifique générale, faites des recherches sur les « hôtels de Hilbert », qui sont une vulgarisation de la dénombrabilité de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- Pourquoi ce sens de parcours en diagonale ? Pourquoi pas ligne par ligne, ou colonne par colonne ? Donner néanmoins une situation où cette façon de faire fonctionne.
- Pour généraliser ce que j'ai fait avec $E_1 \times E_2$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: vérifier que si E et F sont en bijection, alors l'un est dénombrable si et seulement si l'autre l'est.
- Qu'est-ce que $\mathbb{N}^p$ pour $p = 0$, au juste ?

★

- Comprendre les définitions de f et g. Cela me semble impossible si l'on n'identifie pas les différentes quantités en jeu : 1° la numérotation des diagonales parcourues, 2° le nombre d'éléments parcourus sur les n premières diagonales, 3° le k^{e} élément de la n^{e} diagonale, 4° le k^{e} élément de $\mathbb{N}^2$. Beaucoup de choses à ne pas confondre !
- Peut-on *naturellement* expliquer qu'il y a $\binom{n+1}{2}$ éléments sur les n premières diagonales parcourues ?
- Achever la démonstration, si je ne l'ai pas fait en cours.
- Proposer d'autres parcours possibles de $\mathbb{N}^2$, et juger de la difficulté à expliciter les bijections réciproques.
- Se demander si l'on peut adapter la démonstration pour justifier que $\mathbb{Q}$ est dénombrable (puisque, après tout, tout élément de $\mathbb{Q}$ est représenté par deux entiers, et diffère donc peu de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$.

☢

Est-ce qu'un produit cartésien dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable ? Raisonner sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Et un produit cartésien dénombrable d'ensembles finis ?

Remarque. Cas « au plus » dénombrable.

✓

Vérifier cette affirmation. Peut-on faire une démonstration qui englobe tous les cas ?

Proposition 9 (Réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables)**.**

✓

Pourquoi ce choix de bijection définie sur $I \times \mathbb{N}$? Ne pouvait-on pas, par exemple, considérer l'application de $\bigcup\limits_{i \in I} E_i$ dans I, qui à x associe un indice i tel que $x \in E_i$? Cette construction semble plus simple, puisque I est ensuite immédiatement en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Pourquoi ne l'ai-je pas suivie ?

Corollaire 10 ($\mathbb{Q}$ est dénombrables)**.**

✓

Retenir l'idée derrière le choix des ensembles finis, pour savoir reconnaître d'autres situations où elle s'applique.

Proposition 11 ($\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable)**.**

✓

- Réviser si besoin comment on démontre l'existence et la presque unicité du développement décimal. Dans quel cas n'y a-t-il pas unicité, et pourquoi ?
- Pourquoi ce développement de x est bien son développement décimal *propre* ?
- Pouvait-on faire d'autres choix de x_k ? Qu'est-ce qui est réellement important ?
- Pourquoi la valeur de x_k doit-elle être choisie en fonction de $a_{k,k}$? Qu'est-ce qui ne marcherait pas si la valeur de x_k dépendait uniquement d'un certain $a_{i,k}$ avec $i \neq k$?
- Pourquoi appelle-t-on cet argument le principe *diagonal* de Cantor ? Où voyez-vous une diagonale ?
- Pourquoi cette prudence sur le choix du développement propre ? Si je ne fixe pas ce choix, qu'est-ce qui peut potentiellement poser problème dans ce raisonnement ?
- Se demander pourquoi le même raisonnement ne démontrerait pas que $\mathbb{Q}$ est indénombrable : après tout, les rationnels aussi admettent un développement décimal. Où apparaît une propriété essentielle des réels ?
- Proposer une autre justification de l'implication « $]0{,}1[$ indénombrable $\Longrightarrow \mathbb{R}$ indénombrable » que celle que j'ai proposée.
- Pourquoi suis-je passé de $[0{,}1[$ à $]0{,}1[$? Question duale : pourquoi n'ai-je pas raisonné avec $]0{,}1[$ dès le début ?
- Ma bijection entre $]0{,}1[$ et $\mathbb{R}$ peut paraître tordue. Se convaincre qu'elle s'obtient méthodiquement.

☢

Une fois que vous avez compris pourquoi on parle de principe « diagonal » : songer à d'autres ensembles dont on pourrait démontrer l'indénombrabilité ainsi.

2.2 Familles sommables à valeurs dans $[0, +\infty]$

Motivation de cette partie

Comment calculerait-on $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+1}$ ou $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}\cap]1,+\infty[} \frac{1}{q^2}$, $\sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{m^2+n^2}$, etc. ? On donne plusieurs résultats pour y parvenir. Si les définitions et démonstrations utilisent des propriétés éventuellement très théoriques des bornes supérieures, on s'attardera sur les *techniques* de calcul pratique et remarquera que *tout se passe comme pour les sommes à support fini.*

Définition 12 (Somme d'une famille de $(\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})^I$, sommabilité)**.**

↘ I déf. 2

✓

- Se convaincre *heuristiquement* qu'au vu de cette définition, la valeur de la somme ne devrait pas dépendre de l'ordre dans lequel on somme les x_i. Ne pas chercher à produire une démonstration à ce stade.
- Remarquer qu'une borne supérieure analogue est déjà apparue dans le cours d'intégration. Regarder quelles en furent les conséquences au chapitre I : on peut s'attendre à ce qu'elle serve à la même chose ici.
- Réviser si besoin les opérations licites dans $[0, +\infty]$. Les démontrer si cela n'a pas encore été fait.
- Pourquoi inclut-on $+\infty$ aux valeurs possibles des x_i ? Se reposer la question plus tard éventuellement.

★ Pourquoi cette définition est-elle seulement donnée pour des réels positifs ?

Proposition 13 (Cas I fini, $I = \mathbb{N}$)**.**

✓

- Se convaincre que c'est vrai pour I fini. Ce n'est vraiment pas compliqué (mais cela permet déjà de comprendre pourquoi la positivité était essentielle dans la définition, si vous n'aviez pas encore de réponse à cette question).
- Où intervient la positivité des x_i ? (Au moins à deux reprises.)
- Comme d'habitude, lorsqu'on veut montrer une égalité avec une borne supérieure, on utilise deux inégalités issues de sa définition (comme majorant, et comme *plus petit* majorant). Regarder comment on les emploie.
- Ne voyez-vous pas une analogie entre l'égalité du cas $I = \mathbb{N}$, et une partie de la définition-proposition 2 du chapitre I ? Si oui, proposer une généralisation de cette égalité. Et la démontrer.

Théorème 14 (Théorème de sommation par paquets, cas positif)**.**

✓

- En appliquant à tort le théorème avec $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n$, vérifier que la positivité est essentielle.
- Se convaincre que les deux hypothèses sur les I_k sont raisonnables : si on enlève l'hypothèse *disjoints*, quelle relation devrait-on avoir entre les deux sommes de l'énoncé, si l'on se base sur le cas des sommes classiques ? Et si les I_k sont disjoints mais de réunion plus petite que I ? Vous pourrez vérifier que la démonstration du théorème contient des éléments suffisants de preuve pour démontrer ce que vous conjecturez là.
- Pourquoi, intuitivement, faut-il que les I_k soient disjoints ? Et que leur réunion donne I ? Chercher ensuite où cela est utilisé dans la démonstration.
- Comprendre la minoration $\mathrm{card}(J) \geqslant \mathrm{card}\,\{k \in K \mid J \cap I_k \neq \emptyset\}$ (comment a-t-on simplifié la somme ?). Vérifier qu'on n'y fait rien d'illicite, bien que certains termes de la somme puissent éventuellement être infinis. Pourquoi la vérification de la finitude de ce cardinal est-elle essentielle ?
- Chercher où interviennent les deux hypothèses sur les I_k : le fait qu'ils soient *disjoints* et que la réunion soit I.

Corollaire 15 (Propriétés de base)**.**

✓

- Se convaincre que les propriétés de restriction et de croissance sont intuitives.
- Proposer une généralisation de la formule du changement d'indice quand φ est seulement injective.
- Prendre $I = \mathbb{N}$ et φ définie sur $\mathbb{N}$ par $n \mapsto n+1$ (ou plus généralement $n \mapsto n+a$ avec $a \in \mathbb{N}$). Vérifier qu'elle est injective. Que donne la formule du changement d'indice dans ce cas ? Que reconnaît-on de classique ? Conclure qu'on ne fait que généraliser un résultat que vous connaissiez déjà.
- Prendre $I = \mathbb{Z}$ et $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $n \mapsto -n$. Pourquoi est-ce bijectif ? Que donne la formule dans ce cas ? Pourquoi le résultat obtenu est-il logique ?
- Dans la démonstration de la formule du changement d'indice, où apparaît-il que φ soit injective ?
- Se convaincre que la formule du changement d'indice assure bien que l'écriture : $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$, quand I est dénombrable, ne dépend pas du choix de la bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I$.
- Démontrer ces propriétés sans utiliser le théorème de sommation par paquets, sauf la linéarité. C'est facile.

★

— Démontrer la propriété $\sup(aA) = a\sup(A)$ utilisée, si vous ne l'avez pas déjà fait au chapitre I.
— Démontrer la propriété de linéarité sans utiliser le théorème de sommation par paquets.
— Nous n'avons démontré que l'additivité avec le théorème de sommation par paquets. Pouvait-on démontrer la propriété de linéarité plus générale d'un seul coup avec ce théorème ?

Mise en garde 1.

☢

— Définir rigoureusement la permutation utilisée.
— Trouver d'autres identités absurdes en changeant la permutation. Vous pouvez en fait obtenir n'importe quel réel après permutation convenable.

Proposition 16 (Le support d'une famille sommable est au plus dénombrable)**.**

✓

— Vérifier rigoureusement que la réunion donne bien le support de la famille.
— Le choix du $\frac{1}{n}$ est-il important ?
— À votre avis, si l'on tient absolument à définir une notion de somme indexée par un ensemble non dénombrable, que fait-on ? (Cette question a une réponse bien établie et vous avez les clés pour répondre.)

☢

Peut-on aller plus loin en étendant aux familles sommables le fait que le terme général d'une série convergente tende vers 0 ? Il faut déjà donner un sens à une telle phrase quand $I \neq \mathbb{N}$.

Exemple 9.

✓

— Que donne $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |n|$? Est-ce que $(n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable ?
— Être sûr d'avoir bien compris pourquoi l'écriture intuitive $\sum\limits_{k\in 2\mathbb{N}} x_k = \sum\limits_{\ell=0}^{+\infty} x_{2\ell}$ est bien justifiée.
— En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_{-n}$ convergent.
— Regardez ce que donnent les sommes usuelles lorsqu'on somme sur $\mathbb{Z}$: géométriques, Riemann, télescopiques...

Exemple 10.

✓

— Généraliser aux classes de congruence modulo n'importe quel entier.
— L'exemple dit qu'on aurait un problème en sommant par paquets ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$: pourquoi ?

Exemple 11.

✓ Réfléchir à ce qui fait l'efficacité de ce choix de paquets. L'appliquer aux sommes de Riemann pour mieux voir.

★ Généraliser à l'étude de toutes les séries de Bertrand $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\beta(\ln(n))^\alpha}$.

Corollaire 17 (Suite exhaustive de parties de I)**.**

★

Comparer avec la démonstration du résultat analogue dans le cadre de l'intégration. Pouvait-on imiter les deux démonstrations ? (La question peut se poser dans les deux sens : imiter la démonstration de ce chapitre pour avoir une nouvelle preuve dans le cas intégral, et inversement.)

Corollaire 18 (Théorème de Fubini positif)**.**

✓

— Se représenter *visuellement* les paquets.
— Regarder ce que l'on obtient en variant les paquets. Une interprétation visuelle vous permettra peut-être de mieux voir comment recouvrir $I \times J$ naturellement.

Corollaire 19 (Produit de deux sommes, cas positif)**.**

✓

— Éventuellement écrire les étapes de la démonstration avec I et J petits (ou informellement avec des points de suspension) pour voir pourquoi l'usage de la linéarité pour « sortir » $\sum_{j\in J} y_j$ est naturel.

— Prendre $I = J$. Que donne le produit $\left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{i\in I} y_i\right)$ si l'on n'est pas prudent ? Vérifier par une écriture informelle (I petit, points de suspension...) que la formule tentante à proposer est fausse. Comprendre alors cet avertissement : *éviter de nommer de la même manière les deux indices de sommation en cas de produit.*

2.3 Familles sommables de nombres complexes

Motivation de cette partie

On étend la notion de somme aux familles de nombres complexes, ce qui nécessite un peu plus de travail parce qu'on ne peut plus parler de borne supérieure dans $\mathbb{C}$. On constatera que les théorèmes sur les familles de $[0, +\infty]$ restent valables *à condition de rajouter une hypothèse de sommabilité*. Les commentaires de cette partie sont faits sous l'hypothèse que je n'ai PAS défini la somme d'une famille de $\mathbb{C}^J$ avec des suites de Cauchy (cela dépendra de vous le jour J).

Définition 20 (Famille de $\mathbb{C}^J$ sommable, ensemble $\ell^1(J)$)**.**

✓

— À quoi cette définition vous fait-elle penser, que vous avez déjà croisé dans un chapitre antérieur ? Si vous le voyez, alors vous savez déjà à quoi vous attendre dans la suite du cours.
— À quoi vous fait penser la notation $\ell^1(J)$?
— Pourquoi n'a-t-on pas la même définition que dans le cas réel positif ? J'affirme que même avec une famille de $\mathbb{R}^I$ cela poserait problème. Et même de $(\mathbb{R}_-)^I$, d'ailleurs.

★ S'interroger sur la structure de $\ell^1(J)$: anneau, corps, espace vectoriel ?

Exemple 12.

✓

— Pourquoi ai-je exclu $i = 0$ et $j = 0$ de l'indexation ?
— Une fois arrivé à l'expression $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|z|^i}{1-|z|^i}$: chercher un autre moyen d'en déduire la finitude de la somme.

Proposition 21 (Théorème de comparaison)**.**

✓ Pourquoi le théorème de comparaison n'a pas d'autre formulation, avec des équivalents et des petits et grand o ?

Définition-Proposition 22 (Somme d'une famille de $\ell^1(J)$)**.**

✓ Pourquoi ne donne-t-on pas de définition dans le cas non sommable, contrairement à ce qu'on fit dans $[0, +\infty]$?

★ S'inspirer de la démonstration du chapitre I que l'intégrabilité implique la convergence, pour proposer une autre définition de la somme d'une famille de $\ell^1(J)$: montrer que pour toute suite exhaustive de parties finies $(J_n)_{n\geqslant 0}$ de J, la suite $\left(\sum_{j\in J_n} x_j\right)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy (donc converge) et que sa limite est la même peu importe la suite exhaustive choisie. On *définit* alors $\sum_{j\in J} x_j$ comme étant cette limite commune. Quel est l'avantage de définir ainsi la somme ? (Se poser éventuellement la question après avoir tenté de l'utiliser pour démontrer les propriétés de base. Mais il y a d'autres arguments *a priori*.) Est-ce que cette définition permet bien de retrouver les relations de cette définition-proposition, notamment le lien avec la partie réelle et la partie imaginaire ?

Proposition 23 (Propriétés de base)**.**

✓
- Pourquoi la propriété de restriction n'est plus la même que dans le cas des familles de $[0, +\infty]$?
- Démontrer *en deux lignes* l'approximation par les sommes finies dans le cas d'une famille de $[0, +\infty]^I$.

★ Démontrer toutes les propriétés laissées au lecteur, sauf l'inégalité triangulaire dans le cas complexe.

☢ Démontrer l'inégalité triangulaire dans le cas complexe.

Théorème 24 (Théorème de sommation par paquets).

✓
- On aurait envie d'affirmer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n = 0$: vérifier avec le théorème de sommation par paquets que cette égalité, si elle était vraie, donnerait des contradictions.
- Compléter la démonstration en faisant le cas complexe. Comme elle est proche du cas réel, cela permettra de voir si vous en avez compris la teneur.

Corollaire 25 (Théorème de Fubini).

✓
- Pourquoi ai-je sauté sa démonstration ? N'y a-t-il rien de différent dans le raisonnement ?
- Bien prendre le temps de traduire ce que signifie la sommabilité de $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$. Plus particulièrement pour $I = J = \mathbb{N}$. Cela prend quelques secondes et c'est important pour éviter une erreur très fréquente chez ceux qui veulent aller trop vite : non, on ne doit pas vérifier que $\sum_{n\geqslant 0}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$ converge absolument !

★
- Chercher des contre-exemples en l'absence de sommabilité.
- Chercher des contre-exemples lorsqu'on a l'hypothèse alternative et fausse dont je parle ci-dessus.

Corollaire 26 (Produit de deux sommes).

✓ Pourquoi ai-je sauté sa démonstration ? N'y a-t-il rien de différent dans le raisonnement ?

★ Pour $I = J = \mathbb{N}$, trouverez-vous un cas où $(x_i y_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable bien que $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} y_n$ convergent ? Si vous ne voyez pas : réfléchissez éventuellement après la mise en garde plus bas.

Corollaire 27 (Produit de Cauchy).

✓
- Obtenir *informellement* cette égalité, en écrivant avec des points de suspension les deux sommes du membre de gauche, puis en distribuant le produit comme on le ferait pour des sommes finies. Voir comment regrouper les termes pour reconnaître le membre de droite. Si vous êtes soignés, les termes regroupés auront une interprétation visuelle simple.
- Que représentent *visuellement* les paquets choisis, dans $\mathbb{N}^2$ interprété comme un quadrillage dans le plan ?
- Pourquoi cet énoncé est-il formulé avec $I = J = \mathbb{N}$? Ne peut-on pas le généraliser ?

Mise en garde 2.

✓
- J'affirme que le maximum de $x \mapsto (x+1)(n-x+1)$ est *visuel* et peut se trouver de tête. Comment ?
- Produire d'autres contre-exemples du même acabit. Est-ce que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ en fournit un ?

☢ En revanche, *si l'on sait* que le produit de Cauchy converge, y a-t-il l'égalité impliquant les trois sommes ?

Corollaire 28 (L'exponentielle est un morphisme).

✓

- Revoir pourquoi la série exponentielle converge absolument partout.
- Avec ce corollaire, vous pouvez (partiellement) répondre à la question suivante : pourquoi prendre le développement en série de l'exponentielle comme étant sa *définition* est plus satisfaisant que les définitions que vous eûtes en Terminale et 1re année ? (Les chapitres VI, VII, VIII et X fourniront d'autres éléments de réponse.)

☢ On voit que finalement, la propriété de morphisme de l'exponentielle se résume à la formule du binôme de Newton. Est-ce que réciproquement, si l'on sait que l'exponentielle est un morphisme, on peut retrouver la formule du binôme ? (Il est sans doute trop tôt pour cette question.)

Exemple 13.

★ Trouver la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n$ par d'autres moyens. Ils ne manquent pas : 1° dériver une somme géométrique et passer à la limite convenablement (attention, dériver nécessite de se restreindre à une variable réelle, mais avec un argument supplémentaire on peut inclure le cas complexe), 2° effectuer un bête changement d'indice, 3° interpréter $(n+1)q^n$ comme $q^n+\cdots+q^n$ et sommer intelligemment par paquets, 4° effectuer une transformation d'Abel. Et toutes les méthodes sont instructives ! sauf 2° à la rigueur.

Conclusion.

✓ Détailler la première étape. Comment montre-t-on en pratique qu'une famille est sommable ou ne l'est pas, hormis dans le cas d'un calcul direct possible ? Quelques éléments de réponse, hormis ce qui est déjà illustré dans les exemples du cours : combiner le théorème de Fubini et le théorème de comparaison des séries à termes positifs ; raisonner sur des sous-familles, etc.

Exemple 14.

✓

- Comment décide-t-on si l'on somme d'abord sur n, ou sur k ? Est-ce indifférent ?
- J'ai montré la sommabilité par un calcul explicite. À partir de la somme : $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)}$, conclure autrement.
- Varier les exemples pour montrer qu'on a bien compris : prendre $\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{a^n}{k^{bn}}$ avec différents choix de a et b (remarquer que certains choix de a et b ne vont pas donner une famille sommable, attention).

Après votre révision de cette partie

1. Au-delà des définitions abstraites, assimiler les principales applications du théorème de sommation par paquets aux familles indexées sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$; se convaincre que cela donne des identités *intuitives* et qu'on saura réexploiter ; enfin, retenir la démarche expliquée en fin de section.
2. Faire le *Savoir-faire* sur les familles sommables.

Table des matières