Du cours aux exercices (Savoir-faire à vérifier)

Chapitre VIII — Séries entières

Les principaux acquis à vérifier sont :

✓ 1. Calculer le rayon de convergence d'une série entière. (**C**) ☐

✓ 2. Développer en série entière une fonction s'obtenant à l'aide de fonctions usuelles. () ☐

✓ 3. Calculer une somme, en reconnaissant une somme de série entière obtenue à l'aide de développements en série entière usuels (*via* combinaison linéaire, produit de Cauchy, dérivation, intégration), évaluée en un réel. (**C**) ☐

✓ 4. Prolonger un développement en série entière à l'extrémité de l'intervalle ouvert de convergence. ☐

★ 5. Déterminer la somme d'une série entière à l'aide d'une équation différentielle ou fonctionnelle. () ☐

★ 6. Trouver des solutions d'une équation différentielle sous forme de somme de série entière. (**C**) ☐

★ 7. Expliciter le terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence compliquée *via* une série entière. (**C**) ☐

☢ 8. Utiliser la formule de Cauchy intégrale. () ☐

L'icône « () » signifie que les documents *Méthodes* donnent des compléments sur ces savoir-faire.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices exerçant à ce savoir-faire.

✓ Déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

Exemples. Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

$$\text{(a)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n, \quad \text{(b)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2} z^n, \quad \text{(c)} \sum_{n\geqslant 0} e^{-n^2} z^n, \quad \text{(d)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^{3n}, \quad \text{(e)} \sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) z^n.$$

✓ Écrire le développement en série entière d'une fonction à l'aide des fonctions usuelles.

Exemples. Donner le développement en série entière en 0 des fonctions suivantes :

$$\text{(a) } x \mapsto \frac{\sin(x)-x}{x^3}, \quad \text{(b) } x \mapsto \ln(1+x+x^2), \quad \text{(c) } x \mapsto \frac{1}{x^2-3x+2}.$$

Penser à reconnaître en $1+x+x^2$ une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

✓ Calculer une somme de série entière.

Exemples. Calculer la somme des séries entières suivantes (en précisant le domaine de convergence) :

$$\text{(a)} \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{x}{a}\right)^n \ (a \in \mathbb{C}^*), \quad \text{(b)} \sum_{n\geqslant 0} (n^2+3n)x^{2n}, \quad \text{(c)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$\text{(d)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n-1)}{n!} x^n, \quad \text{(e)} \sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}.$$

✓ Prolonger un développement en série entière à l'extrémité de l'intervalle ouvert de convergence.

Exemples.

1. Montrer :
$$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} = 1 - \ln(1-x)\left(1-\frac{1}{x}\right),$$
et justifier que le résultat obtenu reste valable pour $x=-1$ et quand $x \to 1$.
2. On pose :
$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{\ln(x+1)}{3} - \frac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$
Développer f' en série entière en 0, et en déduire : $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$, puis montrer que l'égalité reste valable pour $x=1$.

★ Déterminer la somme d'une série entière à l'aide d'une équation différentielle ou fonctionnelle.

Exemple. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière en 0, et expliciter cette série entière en montrant que f vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre.

★ Trouver des solutions d'une équation différentielle sous forme de somme de série entière.

Exemples.

1. Déterminer les solutions développables en série entière en 0 de l'équation différentielle :
$$\forall x \in I, \quad xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0, \tag{E_1}$$
où I est un voisinage de 0.
2. En faire de même avec l'équation différentielle :
$$\forall x \in]-1,1[, \quad y'(x) - y(x) = -\frac{1}{1+x}. \tag{E_2}$$

★ Expliciter des suites en passant par leurs séries génératrices.

Exemples.

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $u_0 = u_1 = 1$, et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)u_{n+2} = u_{n+1} - 2u_n.$$
   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant 1$, et en déduire que le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est strictement positif.
   (b) Soit S la somme de la série génératrice $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$. Montrer : $\forall x \in]-R,R[$, $S(x) = e^{x-x^2}$, et en déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à valeurs réelles vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 3u_{n+2} - 4u_n = 0. \tag{$*$}$$
   (a) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence strictement positif, en démontrant d'abord par récurrence que si l'on pose $C = \max(|u_0|, |u_1|, |u_2|)$ et si l'on note r la plus grande racine dans $[1,+\infty[$ de $X^3 - 3X^2 - 4$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n| \leqslant C \cdot r^n$.
   (b) Expliciter la somme S de cette série entière, et en déduire une expression simple des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant la relation de récurrence $(*)$.

☢ Utiliser la formule intégrale de Cauchy.

Exemples.

1. Soit $(S_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions développables en série entière sur $\mathrm{B}(0,1)$, convergeant uniformément vers $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ sur tout compact inclus dans $\mathrm{B}(0,1)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_k(S_n)$ le k^{e} coefficient du développement en série entière de S_n. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_k(S_n) = 1$.
2. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un encadrement de la dérivée n^{e} de $x \mapsto (\arctan(x))^2$ évaluée en 0.
On admettra que $r = 1 - \frac{2}{n\ln(n)}$ fournit une bonne approximation du réel où est atteint le minimum de $r \mapsto \frac{1}{r^n}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$ pour n très grand.
3. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ une série entière de rayon de convergence infini dont on note f la somme. On suppose :
$$\forall \ell > 1,\ \exists r_0 > 0,\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad \left(|z| \geqslant z_0 \Longrightarrow \frac{\ln(|f(z)|)}{|z|} \leqslant \ell\right).$$
Montrer : $\forall \ell > 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\forall n \geqslant n_0$, $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \ell$.

✓ Déterminer le rayon de convergence d'une série entière. ☐

Réponse.

(a) Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$. On a : $\frac{n^2+1}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{3^n}$. Déterminons le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{3^n} z^n$. On sait que le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$ est 1. Par conséquent, en changeant z en $\frac{z}{3}$, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{3^n} z^n = \sum_{n\geqslant 0} n^2 \left(\frac{z}{3}\right)^n$ converge si $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$ (c'est-à-dire $|z| < 3$) et diverge si $\left|\frac{z}{3}\right| > 1$ (c'est-à-dire $|z| > 3$). Le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{3^n} z^n$ est donc 3, et par comparaison il en est de même de celui de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$. Par conséquent : $R = 3$.

(b) Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2} z^n$. On utilise la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors la série converge trivialement, et si $z \neq 0$ alors pour tout n au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\frac{\left|\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} z^{n+1}\right|}{\left|\frac{\ln(n)}{n^2} z^n\right|} = |z| \cdot \underbrace{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}}_{=1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

Si $|z| < 1$ alors d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\ln(n)}{n^2} z^n$ converge absolument ; si $|z| > 1$ alors elle diverge. Par conséquent $R = 1$.

(c) Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n^2} z^n$. Pour tout $\rho \geqslant 0$ la suite $\left(e^{-n^2} \rho^n\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 (croissances comparées) donc elle est bornée pour tout $\rho \geqslant 0$, et par définition du rayon de convergence on a : $R = +\infty$.

(d) Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^{3n}$. On utilise la règle de D'Alembert. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors la série converge trivialement, et si $z \neq 0$ alors pour tout n au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\left|\frac{\frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3} z^{3n+3}}{\frac{(3n)!}{(n!)^3} z^{3n}}\right| = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} |z|^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} 27|z|^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 27|z|^3.$$

Si $|z| < \frac{1}{3}$ alors $27|z|^3 < 1$ donc, d'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^{3n}$ converge absolument ; si $|z| > \frac{1}{3}$ alors elle diverge. Par conséquent $R = \frac{1}{3}$.

(e) Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) z^n$. On a : $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, et le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ est 1, donc d'après le théorème de comparaison des séries entières on a : $R = 1$.

✓ Écrire le développement en série entière d'une fonction à l'aide des fonctions usuelles. ☐

Réponse.

(a) Développement de $x \mapsto \frac{\sin(x) - x}{x^3}$. Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\frac{\sin(x)-x}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - x\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n+3)!}$$

(cette égalité se prolonge par continuité en 0).

(b) Développement de $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\ln(1+x+x^2) = \ln\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

où $a_n = \dfrac{1}{n}$ si n n'est pas un multiple de 3, et $a_{3k} = -\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{3k} = \dfrac{2}{3k}$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(c) Développement de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$. Enfin, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

✓ Calculer une somme de série entière. ☐

Réponse.

(a) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n$. C'est une série géométrique, donc elle converge si et seulement si $\left|\dfrac{x}{a}\right| < 1$, si et seulement si $|x| < |a|$. Pour tout $x \in]-|a|,|a|[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{a}{a-x}.$$

(b) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+3n)x^{2n}$. Le rayon de convergence est 1 (vérification facile). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n^2+3n = n(n-1)+4n$, donc :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+3n)x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{2n} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{2n}$$

(ces deux sommes existent bien, puisque ce sont des sommes de séries entières de rayon de convergence 1). Ainsi, si l'on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+3n)x^{2n} = x^4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(x^2\right)^{n-2} + 4x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(x^2\right)^{n-1} = x^4 S''(x^2) + 4x^2 S'(x^2).$$

On en déduit : $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+3n)x^{2n} = \frac{2x^4}{(1-x^2)^3} + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}$.

(c) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$. On pourrait obtenir cette somme en intégrant trois fois la somme géométrique $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ (procédé qui, par ailleurs, démontre que le rayon de convergence de cette série est 1), et en divisant par x^3, mais ce serait un calcul abominable. Décomposons plutôt en éléments simples la fraction rationnelle en n, pour obtenir :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+3}.$$

Les trois sommes de droite existent bien, puisque ce sont des sommes de séries entières de rayon de convergence 1. Après des changements d'indice et des factorisations convenables, on reconnaît des logarithmes :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)(n+3)} &= \frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{1}{2x^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+3}}{n+3}\\ &= -\frac{\ln(1-x)}{2x} - \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2x^3}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &= -\frac{\ln(1-x)}{2x} + \frac{\ln(1-x)+x}{x^2} - \frac{\ln(1-x)+x+x^2/2}{2x^3}\\ &= \ln(1-x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^3}\right) + \frac{3}{4x} - \frac{1}{2x^2}.\end{aligned}$$

Pour $x = 0$, la somme vaut clairement $\dfrac{1}{6}$.

(d) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n-1)}{n!}x^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n-1)}{n!}x^n = 2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = (2x-1)e^x.$$

(e) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$. Si $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$, on vérifie que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1} = -(x^2 f'(x^2)) \times x = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

✓ Prolonger un développement en série entière à l'extrémité de l'intervalle ouvert de convergence. ☐

Réponse.

1. En utilisant la décomposition en éléments simples : $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$, on peut écrire la somme demandée à l'aide de sommes usuelles :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &= -\ln(1-x) - \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat en regroupant les termes logarithmiques. Pour prolonger l'identité en $x = 1$, notons que cette égalité étant valable pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on peut passer à la limite quand $x \to 1$ par valeurs inférieures :

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \lim_{x\to 1^-}\left(1 + \frac{\ln(1-x)(1-x)}{x}\right) = 1.$$

(on a utilisé le théorème des croissances comparées : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\ln(1-x)(1-x) = \lim_{u\to 0^+} u\ln(u) = 0$). Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ converge en $x = 1$ et $x = -1$ par comparaison à la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$.

Par le théorème d'Abel radial : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Finalement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

De même, en prenant la limite quand $x \to -1$, la continuité en -1 nous permet d'écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)} = 1 - 2\ln(2).$$

2. Il est clair que f est dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2x-1}{6(x^2-x+1)} + \frac{2}{3\left(1+\frac{(2x-1)^2}{3}\right)} &= \frac{2(x^2-x+1)-(2x-1)(x+1)}{6(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{1}{2(x^2-x+1)} \\ &= \frac{\cancel{2x^2} - 2x + 2 - (\cancel{2x^2} + x - 1) + 3(x+1)}{6(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{1}{x^3+1}. \end{aligned}$$

Or $|-x^3| < 1$ si $|x| < 1$, donc : $\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \dfrac{1}{1-(-x^3)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n}$. La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{3n}$ étant de rayon de convergence 1 (facile à démontrer), on peut l'intégrer terme à terme entre 0 et $x \in]-1,1[$ et on a : $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) - f(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$. Or : $f(0) = \dfrac{\arctan(-1/\sqrt{3}) + \pi/6}{\sqrt{3}} = 0$. En résumé : $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$. Pour en déduire que cette égalité vaut également pour $x = 1$, on montre que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge grâce au théorème spécial des séries alternées, et on utilise le théorème d'Abel radial. D'où : $f(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$. Notons que nous avons démontré :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = f(1) = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Somme très difficile à calculer autrement (mais vous pouvez essayer ! passer par la formule d'orthogonalité et le logarithme complexe).

★ Déterminer la somme d'une série entière à l'aide d'une équation différentielle ou fonctionnelle. ☐

Réponse. L'application f est produit de deux fonctions développables en série entière de rayon de convergence au moins 1, donc est développable en série entière ; on écrit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$. Or f vérifie :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (x^2-1)f'(x) + xf(x) = 1.$$

On trouve cette équation différentielle à tâtons, en calculant f' et en tentant de l'exprimer en fonction de f. En remplaçant f et f' par leurs développements, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1,$$

c'est-à-dire : $\forall x \in]-1,1[,\ -a_1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left((n-1)a_{n-1} - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\right) x^n = 1$. Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit d'une part $a_1 = -1$, et d'autre part :

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_{n-1}.$$

Un raisonnement par récurrence nous permet d'en déduire, comme $a_0 = f(0) = \frac{\pi}{2}$:

$$\forall p \geqslant 0, \quad a_{2p} = \frac{(2p-1)\times\cdots\times 1}{(2p)\times\cdots\times 2} a_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2},$$

et de même : $\forall p \geqslant 0$, $a_{2p+1} = -\dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.

★ Trouver des solutions d'une équation différentielle sous forme de somme de série entière. ☐

Réponse.

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont on note S la somme. Alors S est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme. On a : $\forall x \in]-R,R[$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, $S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$. Par conséquent, S vérifie (E_1) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Après simplifications, ceci équivaut à : $\forall x \in]-R,R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)(n+2)a_{n+1} - a_n\right) x^n = 0$. Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, cela équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)(n+2)a_{n+1} - a_n = 0.$$

Après tâtonnement au brouillon (on peut aussi être méthodique avec les conseils du *Méthodes* sur les suites récurrentes), puis démonstration par récurrence, on trouve que cette relation est vérifiée par les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{a_0}{n!(n+1)!}.$$

Pour une telle suite, la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est de rayon de convergence infini (règle de D'Alembert), et solution de (E_1). Par conséquent, les solutions de (E_1) développables en série entière en 0 sont de la forme :

$$x \mapsto a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)!}, \text{ avec } a_0 \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$ (on étudie (E_2) sur $]-1,1[$), dont on note S la somme. Alors S est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et dérivable terme à terme. On a : $\forall x \in]-1,1[$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. De plus : $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$. Par conséquent, S vérifie (E_2) sur $]-1,1[$ si et seulement si :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

Après simplifications, cette équation équivaut à :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} - a_n\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^n.$$

Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, c'est équivalent à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+1}.$$

Nous commentons comment déterminer des suites vérifiant une telle relation dans le document *Méthodes* sur les suites : on note que si on l'écrit en tout entier k, et qu'on la multiplie par $k!$, cette égalité donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (k+1)!a_{k+1} - k!a_k = (-1)^{k+1}k!.$$

En sommant cette relation de $k = 0$ à $k = n-1$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, le membre de gauche est une somme télescopique et on obtient donc : $n!a_n - 0!a_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}k!$. Donc $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence ci-dessus si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = \frac{a_0}{n!} + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}k!.$$

Pour une telle suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$, la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est bien de rayon de convergence au moins 1 (on peut en effet vérifier, avec l'égalité qu'on vient de démontrer, et en majorant $|(-1)^{k+1}k!|$ par $(n-1)!$ dans la somme, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|a_n| \leqslant |a_0| + 1$, donc $a_n = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$ et on sait que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ est de rayon de convergence 1), et vérifie (E_2). Par conséquent, les solutions de (E_2) développables en série entière en 0 sont de la forme :

$$x \mapsto a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_0}{n!} + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}k!\right)x^n, \text{ avec } a_0 \in \mathbb{R}.$$

Remarque. En fait, on obtient là la forme de *toutes* les solutions de (E_2) : pourquoi ?

Remarque. Si l'on veut résoudre (E_2) par des méthodes classiques, on trouve que y est solution si et seulement si : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]-1{,}1[$, $y(x) = \left(\lambda + \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}\mathrm{d}t\right)e^x$. En comparant les deux expressions obtenues (avec $a_0 = \lambda = 0$), on en déduit : $\forall x \in]-1{,}1[$, $e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}k!}{n!}\right)x^n$.

★ Expliciter des suites en passant par leurs séries génératrices. ☐

Réponse.

1. (a) On montre la majoration par récurrence double sur n, l'initialisation pour $n = 0$ et $n = 1$ étant immédiate (nous verrons dans l'hérédité qu'il vaut mieux initialiser la récurrence à $n = 1$). Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que : $|u_n| \leqslant 1$, et : $|u_{n+1}| \leqslant 1$. Alors :

$$|u_{n+2}| \leqslant \frac{|u_{n+1}|}{n+2} + 2\frac{|u_n|}{n+2} \leqslant \frac{3}{n+2} \leqslant \frac{n+2}{n+2} \leqslant 1,$$

car $n+2 \geqslant 3$ pour $n \geqslant 1$. D'où l'hérédité de la propriété, et par suite le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de comparaison des séries entières, on a : $R \geqslant 1$ (car la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ est de rayon de convergence 1).

(b) Comme S est développable en série entière sur $]-R,R[$, elle est dérivable terme à terme. La relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_{n\geqslant 0}$ permet alors d'écrire, pour tout $x\in]-R,R[$:

$$\begin{aligned}S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n=1+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)u_{n+2}x^{n+1}&=1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_{n+1}-2u_n\right)x^{n+1}\\&=1+\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n+1}x^{n+1}-2x\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n\\&=1+(S(x)-1)-2xS(x)\\&=(1-2x)S(x).\end{aligned}$$

En résolvant cette équation différentielle, on obtient : $\forall x\in]-R,R[,\ S(x)=S(0)e^{x-x^2}=e^{x-x^2}$. Utilisons cette expression pour obtenir un développement en série entière explicite de S. Soit $x\in]-R,R[$. Faisons un produit de deux familles sommables (qui donne donc une famille sommable) pour écrire :

$$S(x)=e^x\cdot e^{-x^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{\left(-x^2\right)^\ell}{\ell!}=\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}(-1)^\ell\frac{x^{k+2\ell}}{k!\ell!}.$$

Utilisons à présent le théorème de sommation par paquets (possible par sommabilité), avec les paquets : $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n=\left\{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2\mid k+2\ell=n\right\}$. On obtient :

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{(k,\ell)\in I_n}(-1)^\ell\frac{x^{k+2\ell}}{k!\ell!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-1)^\ell}{(n-2\ell)!\ell!}\right)x^n.$$

On a aussi : $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$. Par unicité des coefficients : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\sum\limits_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\dfrac{(-1)^\ell}{(n-2\ell)!\ell!}$. D'où le résultat.

2. (a) Notons que r existe par le théorème des valeurs intermédiaires, étant donné que $1^3-3\cdot1^2-4<0$ et : $x^3-3x^2-4\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

On montre l'inégalité par récurrence forte. Elle est trivialement vérifiée pour $n\leqslant 1$. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. On suppose : $\forall k\in[\![0,n]\!],\ |u_n|\leqslant C\cdot r^n$. Alors d'après $(*)$ on a :

$$|u_{n+1}|\leqslant 3|u_n|+4|u_{n-1}|\leqslant C(3r^n+4r^{n-1})=Cr^{n-1}(3r+4)=Cr^{n-1}r^2=Cr^{n+1}.$$

En effet, par définition de r on a : $r^2=3r+4$. Ceci prouve l'hérédité de l'inégalité, et donc qu'elle est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$ par principe de récurrence.

Par le théorème de comparaison des séries entières, le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_nx^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum\limits_{n\geqslant 0}(rz)^n$, et donc : $R\geqslant\frac{1}{r}>0$.

(b) Soit $x\in]-R,R[$. Multiplions $(*)$ par x^{n+3}, et sommons de $n=0$ à $+\infty$. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n+3}x^{n+3}+3\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n+2}x^{n+3}-4\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^{n+3}=0,$$

c'est-à-dire :

$$S(x)-(u_0+u_1x+u_2x^3)+3x\left(S(x)-(u_0+u_1x)\right)-4x^3S(x)=0.$$

On en déduit :

$$S(x)=-\frac{u_2x^3+3u_1x^2+(u_1+3u_0)x+u_0}{4x^3-3x-1}.$$

Pour poursuivre, nous devons effectuer une décomposition en éléments simples. Pour cela, factorisons le polynôme au dénominateur. On trouve rapidement, à tâtons, la racine 1. En effectuant la division euclidienne de $4X^3-3X-1$ par $X-1$, on obtient alors : $4X^3-3X-1=(X-1)(4X^2+4X+1)=4(X-1)\left(X+\frac{1}{2}\right)^2$. Nous savons donc qu'il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

$$S(x)=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{2x+1}+\frac{c}{(2x+1)^2}.$$

Les a, b et c dépendent de u_0, u_1 et u_2. Leur explicitation ne nous intéresse pas, comme nous le verrons. Il reste à développer en série entière ces trois fractions rationnelles ; pour la dernière, on dérive terme à terme $u\mapsto\frac{1}{1-u}$ et on pose $u=-2x$. On en déduit, pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que : $|x|<\min\left(R,\frac{1}{2}\right)$:

$$S(x)=a\sum_{n=0}^{+\infty}x^n+b\sum_{n=0}^{+\infty}(-2x)^n+c\sum_{n=1}^{+\infty}n(-2x)^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a+b(-2)^n+c(n+1)(-2)^n\right)x^n.$$

Mais on a aussi : $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$. Par unicité des coefficients :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=a+b(-2)^n+c(n+1)(-2)^n.$$

Ainsi toute suite vérifiant $(*)$ est dans $F=\mathrm{Vect}\left((1)_{n\geqslant 0},((-2)^n)_{n\geqslant 0},(n(-2)^n)_{n\geqslant 0}\right)$. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension au plus 3 (et même exactement 3 mais nous n'allons pas avoir besoin de nous fatiguer à le justifier *a priori*), or l'ensemble des suites vérifiant $(*)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, l'application $(u_n)_{n\geqslant 0}\mapsto(u_0,u_1,u_2)$ fournissant un isomorphisme de cet espace dans $\mathbb{R}^3$, et il est inclus dans F. On en déduit : $\dim(F)=3$, puis que l'ensemble des suites vérifiant $(*)$ est exactement F : d'où l'explicitation cherchée.

☢ Utiliser la formule intégrale de Cauchy. ☐

Réponse.

1. Puisque : $\forall z\in\mathrm{B}(0,1)$, $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}z^n$, il est tentant de voir dans le résultat à démontrer une convergence coefficient par coefficient. Cependant, même si $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $f:z\mapsto\dfrac{1}{1-z}$, il n'y a pas lieu d'en déduire directement, *a priori*, que $\left(S_n^{(k)}\right)_{n\geqslant 0}$ converge (uniformément ou autre) vers $f^{(k)}$, et donc à plus forte raison que $(a_k(S_n))_{n\geqslant 0}=\left(\frac{S_n^{(k)}(0)}{k!}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=1$, puisque la convergence uniforme d'une suite ne se préserve pas par dérivation.
C'est ainsi qu'on est amené à utiliser la formule intégrale de Cauchy, qui permet d'exprimer les $a_k(S_n)$ en fonction de S_n directement (et non $S_n^{(k)}$). Fixons $r\in]0,1[$. On a :

$$\forall(k,n)\in\mathbb{N}^2,\quad a_k(S_n)=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}S_n(re^{it})e^{-ikt}\mathrm{d}t.$$

Si le passage à la limite dans l'intégrale est licite, alors c'est gagné. Or $\left(t\mapsto S_n(re^{it})e^{-ikt}\right)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $t\mapsto f(re^{it})e^{-ikt}$ sur $[0,2\pi]$, puisque :

$$\forall t\in[0,2\pi],\quad |S_n(re^{it})e^{-ikt}-f(re^{it})e^{-ikt}|=|S_n(re^{it})-f(re^{it})|\leqslant\|S_n-f\|_{\infty,\mathrm{B}_f(0,r)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

où le passage à la limite dans le majorant est permis par l'hypothèse de convergence uniforme sur les compacts. Ainsi on a majoré $|S_n(re^{it})e^{-ikt}-f(re^{it})e^{-ikt}|$ indépendamment de t par une suite convergeant vers 0, ce qui prouve la convergence uniforme sur $[0{,}2\pi]$. Tout étant continu, on peut bien utiliser le théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment :

$$\lim_{n\to+\infty} a_k(S_n) = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \lim_{n\to+\infty} S_n(re^{it})e^{-ikt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ikt}\mathrm{d}t.$$

Cette dernière intégrale est égale, toujours par la formule de Cauchy, au k^{e} coefficient du développement en série entière de f, c'est-à-dire 1 : d'où le résultat.

2. Tout d'abord, comme $x \mapsto (\arctan(x))^2$ est une fonction paire, toutes ses dérivées d'ordre impair sont impaires et donc nulles en 0. La question n'a un intérêt que pour n pair.
   Obtenir une expression exacte de la dérivée n^{e} de $f : x \mapsto (\arctan(x))^2$ est pénible (quoique faisable si l'on procède intelligemment). Nous allons atteindre directement sa valeur en 0 grâce à la formule intégrale de Cauchy. Comme : $\forall x \in]-1{,}1[,\ \arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, il est naturel de prolonger l'arc tangente sur $\mathrm{B}(0{,}1)$ en posant : $\forall z \in \mathrm{B}(0{,}1),\ \arctan(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ (ce n'est qu'une notation de commodité dont on pourrait se passer pour traiter cette question). Alors, par la formule de Cauchy :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in]0{,}1[,\quad f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\mathrm{d}t.$$

   Or :

$$\forall z \in \mathrm{B}(0{,}1),\quad |\arctan(z)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|z|^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)$$

   (le calcul de cette somme est classique : intégrer terme à terme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ ou utiliser le théorème de sommation par paquets avec le développement en série entière de $x \mapsto -\ln(1-x)$). Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in]0{,}1[,\quad |f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!}{2^3\pi r^n}\int_0^{2\pi}\left(\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\right)^2\mathrm{d}t = \frac{n!}{4r^n}\left(\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\right)^2.$$

   Qualitativement, on pressent que pour $r \to 1$ ou $r \to 0$, la majoration est mauvaise à cause des termes $\frac{1}{r^n}$ et $\ln(1-r^2)$ qui tendent vers l'infini. Prenons plutôt $r = 1 - \frac{2}{n\ln(n)}$ comme suggéré par l'énoncé. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!}{4}\left(1 - \frac{2}{n\ln(n)}\right)^{-n}(\ln(n\ln(n)))^2.$$

   Ce majorant est équivalent, quand $n \to +\infty$, à : $\dfrac{n!}{4}(\ln(n))^2$. Vous pourrez constater, logiciel de calcul formel à l'appui, que cette majoration est malheureusement très mauvaise. Son intérêt est qu'elle nécessita des calculs assez peu techniques.
   Remarque. C'est une connaissance fine de la fonction W de Lambert (qui fut le sujet d'étude de Mathématiques II à Centrale-Supélec, filière PSI, année 2020) qui me permit de proposer l'approximation du minimum proposée. Une meilleure approximation encore serait $r = 1 - \frac{2}{n\left(\ln(n)+\frac{2}{n}-\ln(2)\right)}$.

3. On a des hypothèses sur f et on veut des conclusions sur les coefficients a_n : on est en plein dans le cadre d'application de la formule intégrale de Cauchy. Soient $\ell > 1$ et $\ell' \in]1,\ell[$. Par hypothèse, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant : $|z| \geqslant r_0$, on ait : $\frac{\ln(|f(z)|)}{|z|} \leqslant \ell'$ (vous comprendrez plus bas l'intérêt d'avoir introduit ℓ'), ou encore : $|f(z)| \leqslant e^{\ell'|z|}$. On a donc, par la formule intégrale de Cauchy : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $|a_n| \leqslant \dfrac{n!}{2\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\ell' r}\mathrm{d}t = \dfrac{n!e^{\ell' r}}{r^n}$. Or une étude de variation basique montre que le minimum de cette quantité est atteint pour $r = \frac{n}{\ell'}$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant n!\left(\frac{\ell' e}{n}\right)^n$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant (n!)^{\frac{1}{n}}\frac{\ell' e}{n}$. Or par la formule de Stirling on montre que ce majorant converge vers $\ell' < \ell$, donc il existe un rang au-delà duquel : $(n!)^{\frac{1}{n}}\frac{\ell' e}{n} < \ell$. Ceci donne le résultat voulu.
   Remarque. La réciproque du résultat démontré est vraie aussi.