Chapitre VIII — Séries entières

Brook Taylor
(1685–1731)

Niels Abel
(1802–1829)

1 Définition, et rayon de convergence

1.1 Résultats de base

Définition 1 (Série entière)**.**

Exemple 1. Exemples basiques de séries entières.

Remarque. Séries entières lacunaires.


1802-1829

Définition 2 (Domaine de convergence)**.**

Remarque. Convention pour que 0 appartienne au domaine de convergence.

Lemme 3 (Lemme d'Abel)**.**

Définition-Proposition 4 (Rayon de convergence)**.**

Définition 5 (Disque ouvert, intervalle ouvert de convergence)**.**

Remarque. Cas extrêmes.

Proposition 6 (Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} n^\alpha z^n$)**.**

Remarque. Si $|z| = R$, tout peut se produire.

1.2 Comment déterminer le rayon de convergence

Un critère pratique : la règle de D'Alembert. ↘ II prop. 1

Remarque. Attention aux réciproques hâtives.

Exemple 2. Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{2n}$.

Remarque. On peut toujours se ramener au cas positif.

Remarque. Changer un nombre fini de termes de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ ne change pas le rayon de convergence.

Théorème 7 (Théorème de comparaison des séries entières)**.**

Exemple 3. Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \sin(n) z^n$.

Exemple 4. Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ où, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, le réel a_n égale le classement de l'AS Nancy Lorraine au terme de sa n^{e} saison d'existence.

1.3 Algèbre des séries entières

Proposition 8 (Rayon de convergence d'une somme)**.**

Définition 9 (Produit de Cauchy de deux séries entières)**.** ↘ II cor. 27

Théorème 10 (Rayon de convergence d'un produit de Cauchy)**.**

Remarque. On ne peut en dire plus.

Lemme 11 (Multiplier par n ne change pas le rayon de convergence)**.**

Corollaire 12 (Rayon de convergence d'une série entière dérivée ou primitive)**.**

Remarque. Inégalités strictes ou larges dans les énoncés.

2 Régularité de la somme d'une série entière

Proposition 13 (Convergence normale sur les compacts)**.**

Proposition 14 (Continuité selon la variable z)**.**

Théorème 15 (Théorème d'Abel radial)**.**

Démonstration (idée). On se ramène au cas $R = 1$.
L'objectif est de montrer la convergence uniforme sur $[0,1[$ ou $[0,1]$. Effectuer une transformation d'Abel avec le reste R_N de la série entière (d'abord avec des sommes à support fini). Choisir les deux suites à sommer et à « différentier » d'une part de sorte à faire apparaître $(x-1)$★, d'autre part pour que le « terme entre crochets » tende vers 0 indépendamment de x. Si ces contraintes sont respectées, on montre aisément que $|R_N(x)|$ est majoré par ε uniformément en x pour tout N assez grand. □

Remarque. Généralisation possible.

Corollaire 16 (Primitive d'une série entière)**.**

Exemple 5. Identité : $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. ↘ VII. ex. 7

Exemple 6. Identité : $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Exemple 7. Logarithme complexe. Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$. ♡

Corollaire 17 (Dérivée d'une série entière)**.**

Corollaire 18 (Existence de l'exponentielle)**.**

Exemple 8. Formule du binôme négatif : $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} x^n$. ♡

→ ex. 9

Corollaire 19 (Unicité)**.**

Proposition 20 (Unicité : assouplissement de l'hypothèse)**.**

Exemple 9. Prolongement de l'identité de l'exemple 8. ← ex. 8

Exemple 10. Suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} + 3u_{n+2} + 3u_{n+1} + u_n = 0$. 🗎 2.4

Exemple 11. Solution non triviale de l'équation différentielle : 🗎 2.3

$$\forall x \in]0,1[, \quad x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x) = 0.$$

Corollaire 21 (Fonctions paires, impaires)**.**

3 Fonctions développables en série entière

3.1 Généralités

Définition 22 (Développement en série entière)**.**

Remarque. Le rayon de convergence doit être non nul.

Proposition 23 (Développements en série entière usuels)**.**

Définition 24 (Série de Taylor)**.**

Proposition 25 (Une application développable en série entière est de classe C^∞)**.**

Exemple 12. La réciproque est fausse. ♡

Proposition 26 (Taylor avec reste intégral)**.**

3.2 Développer en série entière *en pratique*

Proposition 27 (Stabilité par somme, produit, dérivation, intégration)**.**

Pour démontrer qu'une application est développable en série entière en 0 : la méthode de l'équation différentielle. 3

Exemple 13. Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

— Fin du chapitre VIII —

Compléments et approfondissements

1. Les quantités les plus fréquemment dénombrées à l'aide des séries entières génératrices sont : les nombres de Catalan, les dérangements, les partitions d'un entier ou d'un ensemble. Il est attendu d'un élève de MP* qu'il sache dénombrer tout ou partie de ces quantités à l'aide des séries entières.
2. Il est très important de savoir démontrer la formule intégrale de Cauchy et de comprendre ses implications : contrôle des coefficients d'une somme de série entière S (et donc de ses dérivées) à l'aide de S. Chose loin d'être vérifiée pour les fonctions quelconques, où au contraire c'est la taille de la dérivée qui permet de contrôler la taille d'une fonction, *via* les accroissements finis ! On doit être familier des principales conséquences : théorème de Liouville et condition nécessaire sur $S^{(n)}(0)$ pour être la somme d'une série entière. Il y en a cependant bien d'autres.
3. Les comportements sur le cercle d'incertitude sont potentiellement subtils et on peut vous mettre à l'épreuve de façon variée : conditions suffisantes pour avoir continuité (ou convergence) en un point du bord, équivalents asymptotiques en un point où il y a justement divergence, etc. Il est bon d'avoir une idée des différentes parades à ces problèmes subtils (la démonstration du théorème d'Abel radial est à cet égard une source d'inspiration riche).

FIGURE 1 – Développements en série entière en 0.

Développements en série entière en 0 usuels, à connaître par cœur					
$f(x) =$	D_f	DSE(0)	R_f	CV	Démonstration
e^x	$\mathbb{C}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	$\mathbb{C}$	Définition
$\cos(x)$	$\mathbb{C}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{C}$	Combinaison linéaire
$\sin(x)$	$\mathbb{C}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{C}$	Combinaison linéaire
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{C}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{C}$	Combinaison linéaire
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{C}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{C}$	Combinaison linéaire
$\frac{1}{1-x}$	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1	B(0,1)	Série géométrique
$\ln(1+x)$	$]-1,+\infty[$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	1	$]-1,1]$	Primitive
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$[-1,1]$	Primitive
$(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$	$]-1,+\infty[$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1	$]-1,1[$	Équation différentielle
$(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$	$\mathbb{C}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	$+\infty$	$\mathbb{C}$	Binôme de Newton

Développements non usuels, mais très utiles ET À DÉMONTRER QUAND ON LES UTILISE						
$f(x) =$	D_f	DSE(0)	R_f	CV	Démonstration	Importance
$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$]-1,1[$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$]-1,1[$	Primitive ou paquets	★★
$\frac{x}{(1-x)^2}$	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$	1	B(0,1)	Dérivée	★★★
$\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$	1	B(0,1)	Dérivée	★★★
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$	1	$]-1,1[$	$\alpha = -\frac{1}{2}$ dans $(1+x)^\alpha$	★★
$\arcsin(x)$	$[-1,1]$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$[-1,1]$	Primitive	★
$\arccos(x)$	$[-1,1]$	$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$[-1,1]$	Primitive	★

Table des matières