Du cours aux exercices (Savoir-faire à vérifier)

Chapitre V — Réduction des endomorphismes

Les principaux acquis à vérifier sont :

Sous-espaces stables et polynômes d'endomorphismes.

✓ 1. Montrer que des sous-espaces vectoriels sont en somme directe, sont supplémentaires. (🗎) ☐

✓ 2. Montrer qu'un sous-espace vectoriel est stable par un endomorphisme, cas simples. ☐

✓ 3. Écrire la matrice d'un endomorphisme induit, ou d'un endomorphisme dans une base adaptée à une décomposition en somme directe de sous-espaces stables. ☐

✓ 4. Calculer une puissance de matrice. (🗎 **C**) ☐

★ 5. Résoudre une équation polynomiale entre matrices en passant par les endomorphismes canoniquement associés et leurs sous-espaces propres, quand ils sont diagonalisables et que les sous-espaces propres sont des droites. (🗎 **C**) ☐

★ 6. Utiliser le lemme des noyaux pour expliciter les éléments d'un espace vectoriel. ☐

★ 7. Utiliser des bases adaptées à des décompositions en sommes directes pour obtenir une matrice réduite simple d'un endomorphisme (hors cas de diagonalisation ou trigonalisation). (🗎 **C**) ☐

☢ 8. Résoudre une équation polynomiale entre matrices en dehors des cas mentionnés ci-dessus. ☐

Réduction des endomorphismes.

✓ 1. Montrer qu'une matrice est diagonalisable, et la diagonaliser. (🗎) ☐

✓ 2. Interpréter une relation entre puissances d'un endomorphisme, ou d'une matrice, en termes de polynôme annulateur, et en déduire des propriétés relatives à la réduction. (🗎) ☐

✓ 3. Trigonaliser une matrice. (🗎 **C**) ☐

✓ 4. Calculer le polynôme minimal d'une matrice simple. ☐

★ 5. Déterminer les éléments propres d'un endomorphisme abstrait. (🗎) ☐

★ 6. Utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange en algèbre linéaire. (🗎) ☐

★ 7. Utiliser la trigonalisation diagonale par blocs ou la décomposition de Dunford. (🗎) ☐

L'icône « (🗎) » signifie que les documents *Méthodes* donnent des compléments sur ces savoir-faire.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices exerçant à ce savoir-faire.

Sous-espaces stables et polynômes d'endomorphismes

✓ Montrer que des sous-espaces vectoriels sont en somme directe, sont supplémentaires.

Exemples.

1. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(2) = 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On définit les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :
$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,0,-1,0)\right), \quad G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y = z+t = 0\right\},$$
$$H = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -y = z = 2t\right\}.$$
Montrer : $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \oplus H$.
3. Montrer que $F = \{f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \lim\limits_{\pm\infty} f = 0\}$, $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left\{x \mapsto e^{\lambda x}\right\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*}\right)$ et $H = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\cos)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ en somme directe.

✓ Montrer qu'un sous-espace vectoriel est stable par un endomorphisme, cas simples.

Exemples.

1. Montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y+z = 0\}$ est stable par :
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+2y+z, 2y, -4y) \end{cases}.$$
2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP' + X^2P'' \end{cases}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f.

✓ Écrire la matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée à une décomposition en somme directe de sous-espaces stables.

Exemple. On pose :
$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y = 0\right\}, \quad G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,0,-1)\right),$$
et on considère l'application linéaire $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (3x-5y+z, x-3y+z, -2x+y) \end{cases}$.

1. Montrer que F et G sont stables par f, et écrire la matrice de l'endomorphisme induit par f sur F, dans la base de votre choix (même question avec G).
2. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$, et écrire la matrice de f dans une base adaptée à F et G.

✓ Calculer une puissance de matrice.

Exemples.

1. Soient :
$$A = \begin{pmatrix} -11 & 12 & 24 \\ -6 & 7 & 12 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calculer les puissances entières positives de A, B et C.

2. Soit $A = PTP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -29 & -6 & 42 \\ 44 & 13 & -52 \\ -11 & -3 & 14 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que les valeurs propres de A sont 4, 1 et -7, puis justifier que A est diagonalisable.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Construire explicitement un polynôme P de degré 2 tel que : $P(-7) = (-7)^n$, $P(1) = 1$, $P(4) = 4^n$, et en déduire : $P(A) = A^n$. Donner les coefficients de A^n.

★ Résoudre une équation polynomiale entre matrices (cas simplifié).

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la seule matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = A$ est $M = A$.

★ Utiliser le lemme des noyaux pour expliciter les éléments d'un espace vectoriel.

Exemples.

1. Trouver les applications $y : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et telles que : $\tan \cdot (\tan \cdot y')' = y$.
2. Trouver les suites réelles $(u_n)_{n \geqslant 0}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - u_{n+2} - 8u_{n+1} + 12u_n = 0$.
3. Trouver les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation différentielle : $\forall x \in \mathbb{R}$, $y''(x) + (2x+1)y'(x) + (x^2 + x - 1)y(x) = 0$.

★ Réduire un endomorphisme à l'aide d'un polynôme annulateur (cas non diagonalisable).

Exemple. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $f^3 - f^2 + f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et : $f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

☢ Résoudre une équation polynomiale entre matrices (cas difficile).

Exemples.

1. Résoudre l'équation : $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Résoudre l'équation : $M^2 = \begin{pmatrix} -2 & -12 & -8 \\ 44 & 264 & 176 \\ 2 & 12 & 8 \end{pmatrix}$, d'inconnue $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Résoudre l'équation : $M^2 = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 3 \\ -20 & -22 & -6 \\ 40 & 44 & 12 \end{pmatrix}$, d'inconnue $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Réduction des endomorphismes

✓ Montrer qu'une matrice est diagonalisable, et la diagonaliser.

Exemples. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}23&-25&25\\5&-7&5\\-15&15&-17\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$
$$D=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}2&5&5\\5&2&5\\5&5&2\end{pmatrix}.$$

✓ Utiliser un polynôme annulateur pour la réduction.

Exemple. Soit $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice inversible telle que : $A^2(A^2-\mathrm{I}_3)(A-2\mathrm{I}_3)^2 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$, et : $\mathrm{tr}(A)=2$. Montrer que A est diagonalisable.

✓ Trianguler une matrice.

Exemple. Trianguler la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&3&1\end{pmatrix}$.

✓ Calculer le polynôme minimal d'une matrice simple.

Exemples. Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}-4&1&9\\-1&-2&-11\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&3&-7\\2&6&-14\\1&3&-7\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&-1&1&0\\2&-3&7&1\\2&-5&9&1\\-16&33&-58&-6\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}.$$

★ Étudier la diagonalisation d'un endomorphisme abstrait.

Exemples.

1. Déterminer les éléments propres de $\psi : \begin{cases}\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X]\\ P & \mapsto & P''-2P'\end{cases}$.
2. Étudier si $\varphi : \begin{cases}\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\\ M & \mapsto & M+\mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n\end{cases}$ est diagonalisable.

★ Étudier les polynômes interpolateurs de Lagrange en algèbre linéaire.

Exemples.

1. Soit $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$. Calculer A^{-2023} sans calculer de matrice de passage.
2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(K)$. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes. Montrer que toute solution de l'équation : $M^2=A$, d'inconnue $M \in \mathrm{M}_n(K)$, est un polynôme en A.

3. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, telles que : $A^2 = B^3$. Montrer que A et B commutent.

★ Utiliser la trigonalisation diagonale par blocs ou la décomposition de Dunford.

Exemples.

1. Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A + A^2 + A^3$ est diagonalisable et que χ_A est premier avec $3X^2 + 2X + 1$. Montrer que A est aussi diagonalisable.
2. Soit $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ une matrice inversible telle que : $\chi_A = (X - \lambda)(X - \mu)^2$, avec λ et μ des complexes distincts. Montrer que l'équation : $M^3 = A$, d'inconnue $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$, admet au moins une solution.

Sous-espaces stables et polynômes d'endomorphismes

✓ Montrer que des sous-espaces vectoriels sont en somme directe, sont supplémentaires. ☐

Réponse.

1. Si $P \in F \cap G$, alors P a trois racines (puisque $P(0) = P(1) = P(2) = 0$) alors qu'il est de degré inférieur ou égal à 2 : ce n'est possible que si $P = 0$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$, donc F et G sont en somme directe. Ensuite, on détermine la dimension de F et G en déterminant une base de ces sous-espaces : un polynôme de F a pour racines 0 et 1, donc est divisible par X et $X-1$; pour des raisons de degré, on en déduit que $P \in F$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P = \alpha X(X-1)$. Ainsi $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X(X-1))$ est de dimension 1. De même, $P \in G$ si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ tel que $P = (X-2)(\alpha X + \beta) = \alpha(X-2)X + \beta X$. Ainsi $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((X-2)X, (X-2))$ est de dimension 2. En résumé : $\dim(F) + \dim(G) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$, donc F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

2. *Méthode avec les bases.* Comme on est en dimension finie, il suffit de vérifier que la concaténation de bases de F, G et H donne une base de $\mathbb{R}^4$. On montre que :

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,-1,0,0),(0,0,1,-1)) \text{ et : } H = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((2,-2,2,1)).$$

La famille $\mathcal{B} = ((1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,-1),(2,-2,2,1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$, puisque son déterminant dans la base canonique est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

On en déduit immédiatement que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}^4$.

Méthode sans les bases. Montrons d'abord que la somme est directe : soient $(\lambda,0,-\lambda,0) \in F$, $(x,-x,z,-z) \in G$ et $(2t,-2t,2t,t) \in H$ tels que $(\lambda,0,-\lambda,0)+(x,-x,z,-z)+(2t,-2t,2t,t) = (0,0,0,0)$. En identifiant coordonnée par coordonnée, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + x + 2t & = & 0 \\ -x - 2t & = & 0 \\ -\lambda + z + 2t & = & 0 \\ -z + t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + x + 2t & = & 0 \\ -x - 2t & = & 0 \\ x + z + 4t & = & 0 \\ -z + t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + x + 2t & = & 0 \\ -x - 2t & = & 0 \\ z + 2t & = & 0 \\ -z + t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + x + 2t & = & 0 \\ -x - 2t & = & 0 \\ z + 2t & = & 0 \\ 3t & = & 0 \end{array}\right.$$

ce dont on déduit aisément $\lambda = x = z = t = 0$. Donc tous les vecteurs en présence sont nuls, et la somme est bien directe. Par conséquent : $\dim(F \oplus G \oplus H) = \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) = 1 + 2 + 1 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, donc : $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}^4$.

Cette méthode paraît plus longue et inférieure à celle avec les bases, et donc à oublier. Elle est pourtant à retenir : si les sous-espaces vectoriels sont en somme directe mais ne sont pas de somme égale à $\mathbb{R}^4$, alors la méthode avec les bases est vouée à l'échec.

3. Pas de recours à la dimension ou à une base ici, puisque F et G sont de dimension infinie (pourquoi ?). On doit revenir à la définition d'une somme directe. Soit, donc, $(f,g,h) \in F \times G \times H$ tel que $f+g+h = 0$; montrons que $f = g = h = 0$. On a $g = -f-h$, or f et h sont bornées (dans le cas de f ce n'est pas clair, mais c'est un exercice classique de 1^re année *faisant usage de la continuité* : nous allons le démontrer à la fin), donc g est bornée : impossible sauf si $g = 0$. On déduit que $h = -f$, donc h tend vers 0 en $+\infty$, ce qui n'est possible que si $h = 0$ (car le cosinus n'a pas de limite en $+\infty$). Par suite $f = 0$, donc $f = g = h = 0$: la somme est bien directe.

Prouvons qu'effectivement f est bornée : comme $\lim\limits_{\pm\infty} f = 0$, par définition de la limite (avec $\varepsilon = 1$) il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $|x| \geqslant A$, on ait : $|f(x)| \leqslant 1$. De plus f est continue sur le segment $[-A,A]$, donc d'après le théorème des bornes atteintes il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [-A,A]$ on ait : $|f(x)| \leqslant M$. Par conséquent, f est bornée sur $\mathbb{R}$ par $\max(1,M)$.

✓ Montrer qu'un sous-espace vectoriel est stable par un endomorphisme, cas simples. ☐

Réponse.

1. *Avec une base de F.* Comme F est de dimension finie, la stabilité de F par f équivaut à la stabilité d'une base de F par f. Or $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}0{,}0),(0{,}1,-2)\right)$ (vérification facile), et on a : $f(1{,}0{,}0) = (2{,}0{,}0) = 2(1{,}0{,}0) \in F$ et $f(0{,}1,-2) = (0{,}2,-4) = 2(0{,}1,-2) \in F$. Ainsi $f(F) \subseteq F$.

   Sans une base de F. On doit montrer que pour tout $(x,y,z) \in F$, on a $f(x,y,z) \in F$. On doit donc vérifier que les coordonnées de $f(x,y,z)$ vérifient l'équation $2y+z=0$, sachant que (x,y,z) la vérifie. Or : $f(x,y,z) = (2x+2y+z, 2y, -4y)$, et on a bien $2\cdot(2y)+(-4y)=0$. Donc F est stable par f.
2. Il suffit de vérifier la stabilité sur la base $(1,X,\dots,X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Or pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on a $f(X^i) = i^2X^i \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $f(\mathbb{R}_n[X]) \subseteq \mathbb{R}_n[X]$.

✓ Écrire la matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée à une décomposition en somme directe de sous-espaces stables. ☐

Réponse.

1. Pour montrer que G est stable par f, il suffit de démontrer de démontrer que $(1{,}0,-1)$ est un vecteur propre de f (vu que G est une droite). Or : $f(1{,}0,-1) = (2{,}0,-2) = 2(1{,}0,-1)$ et $(1{,}0,-1) \neq (0{,}0{,}0)$, d'où le résultat (c'est un vecteur propre associé à la valeur propre 2).

   Pour la stabilité par f de F, il y a deux façons de procéder : avec ou sans base de F.

   Sans base de F. On peut montrer que pour tout $(x,y,z) \in F$, on a $f(x,y,z) \in F$. On note que F est l'ensemble des triplets de $\mathbb{R}^3$ dont les deux premières coordonnées sont égales ; la stabilité revient donc à démontrer que pour tout $(x,x,z) \in \mathbb{R}^3$, les deux coordonnées de $f(x,x,z)$ sont égales. Or : $f(x,x,z) = (-2x+z, -2x+z, -x)$, donc $f(x,x,z) \in F$. Donc f laisse stable F.

   Avec base de F. On montre facilement que $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1{,}1{,}0),(0{,}0{,}1)\right)$ par une résolution explicite de $x-y=0$. Pour montrer que F est stable par f, il suffit de montrer que $f(1{,}1{,}0) \in F$ et $f(0{,}0{,}1) \in F$. Or : $f(1{,}1{,}0) = (-2,-2,-1) = -2(1{,}1{,}0) - (0{,}0{,}1) \in F$ et : $f(0{,}0{,}1) = (1{,}1{,}0) \in F$. D'où le résultat.

   Écrivons la matrice de l'endomorphisme induit par f sur F dans la base $((1{,}1{,}0),(0{,}0{,}1))$ de F. D'après la décomposition effectuée ci-dessus, on a : $\mathrm{M}_{((1,1,0),(0,0,1))}(f_F) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour G, on a directement : $\mathrm{M}_{(1,0,-1)}(f_G) = (2)$.
2. Pour montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la concaténation d'une base de F et d'une base de G donne une base de $\mathbb{R}^3$. Nous en avons exhibé ci-dessus, et on a : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, donc la famille $\mathcal{B} = ((1{,}1{,}0),(0{,}0{,}1),(1{,}0,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à F et G.

   D'après la question précédente, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{((1,1,0),(0,0,1))}(f_F) & 0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{1,2}(\mathbb{R})} & \mathrm{M}_{(1,0,-1)}(f_G) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Comme prévu, la matrice est diagonale par blocs.

✓ Calculer une puissance de matrice. ☐

Réponse. Nous varions les méthodes afin de toutes les illustrer (division euclidienne par un polynôme annulateur, réduction, polynômes interpolateurs de Lagrange). Nous vous invitons à procéder différemment du corrigé ci-dessous afin de comparer les mérites de chaque méthode et vous les approprier.

1. *Calcul de A^n.* Déterminons les valeurs propres de A en calculant son polynôme caractéristique. On a :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+11 & -12 & -24 \\ 6 & X-7 & -12 \\ 2 & -2 & X-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & -12 & 0 \\ X-1 & X-7 & 2-2X \\ 0 & -2 & X-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (C_1 \leftarrow C_1 + C_2) \\ (C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2) \end{matrix}$$
$$= (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -12 & 0 \\ 1 & X-7 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -12 & 0 \\ 0 & X+5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$
$$= (X-1)^2 \begin{vmatrix} X+5 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1).$$

On en déduit que 1 et -1 sont les valeurs propres de A. Après calculs, on trouve :

$$\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A + \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Par conséquent, si l'on pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors d'après la formule du changement de base on a : $A = PDP^{-1}$. On calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3 & 6 \\ -3/2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, et on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 6(-1)^n - 5 & 6(1-(-1)^n) & 12(1-(-1)^n) \\ 3((-1)^n - 1) & 4 - 3(-1)^n & 6(1-(-1)^n) \\ (-1)^n - 1 & 1 - (-1)^n & 3 - 2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Calcul de B^n. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_B est un polynôme annulateur de B. Calculons-le :

$$\chi_B = \begin{vmatrix} X+2 & 1 & -1 \\ -6 & X-4 & 0 \\ 2 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & 0 & -X \\ 0 & X-1 & 3(X-1) \\ 2 & 1 & X-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (L_1 \leftarrow L_1 - L_3) \\ (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3) \end{matrix}$$
$$= X(X-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & X-1 \end{vmatrix}$$
$$= X(X-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & X+1 \end{vmatrix} (C_3 \leftarrow C_3 + C_1)$$
$$= X(X-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & X+1 \end{vmatrix} = X(X-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & X-2 \end{vmatrix},$$

donc $\chi_B = X(X-1)(X-2)$. Faisons la division euclidienne de X^n par χ_B : il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $X^n = \chi_B Q + R$ $(*)$ où $\deg(R) < \deg(\chi_B) = 3$. Par conséquent, il existe $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $R = a_n X^2 + b_n X + c_n$. En évaluant $(*)$ en B, il vient : $B^n = \chi_B(B)Q(B) + R(B) = a_n B^2 + b_n B + c_n \mathrm{I}_3$. Il reste à calculer B^2, a_n, b_n et c_n pour en déduire B^n. Or, évaluer $(*)$ en 0 donne (si $n \geqslant 1$) l'égalité $c_n = 0$. Ensuite, l'évaluer en 1 et 2 donne le système :

$$\begin{cases} 1 & = & a_n + b_n, \\ 2^n & = & 4a_n + 2b_n. \end{cases}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ donnent directement : $a_n = \frac{2^n-2}{2} = 2^{n-1} - 1$, et $b_n = -\frac{2^n-4}{2} = 2 - 2^{n-1}$. On a donc :

$$B^n = a_nB^2 + b_nB = \begin{pmatrix} -2^n & -2^n+1 & -2^n+3 \\ 3\cdot 2^n & 3\cdot 2^n - 2 & 3\cdot 2^n - 6 \\ -2^n & -2^n+1 & -2^n+3 \end{pmatrix}.$$

Calcul de C^n. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\chi_C = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)\left(X^2-1\right) = (X-1)^2(X+1),$$

donc $\chi_C = (X-1)^2(X+1)$. Notez bien la présence d'une racine double. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, c'est un polynôme annulateur. Par conséquent, si $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ sont tels que $X^n = Q\chi_C + a_nX^2 + b_nX + c_n$ $(*)$ (leur existence vient du théorème de division euclidienne), alors : $C^n = a_nC^2 + b_nC + c_n\mathrm{I}_3$. Il reste à calculer C^2, et à déterminer a_n, b_n et c_n en résolvant le système :

$$\begin{cases} 1 & = & a_n + b_n + c_n \\ n & = & 2a_n + b_n \\ (-1)^n & = & a_n - b_n + c_n \end{cases}$$

(la deuxième équation fut obtenue en dérivant $(*)$, et en évaluant l'égalité obtenue en 1 : comme 1 est une racine double, on a $(\chi_C Q)'(1) = 0$). On trouve :

$$\begin{cases} a_n & = & \frac{2n-1+(-1)^n}{4}, \\ b_n & = & \frac{1-(-1)^n}{2}, \\ c_n & = & \frac{3+(-1)^n-2n}{4}. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$C^n = a_nC^2 + b_nC + c_n\mathrm{I}_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2n+1-(-1)^n & 2n-1+(-1)^n \\ 0 & 2(1+(-1)^n) & 2(1-(-1)^n) \\ 0 & 2(1-(-1)^n) & 2(1+(-1)^n) \end{pmatrix}.$$

2. Posons $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $T = \begin{pmatrix} 2 & 0_{\mathrm{M}_{1,2}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})} & B \end{pmatrix}$, donc : $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0_{\mathrm{M}_{1,2}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})} & B^n \end{pmatrix}$. Or $B = \mathrm{I}_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux matrices commutent, donc d'après la formule du binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}$, $B^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k = \mathrm{I}_2 + nN = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n+n+2 & 2^n+n-1 & 2^n-2n-1 \\ 2^n-n-1 & 2^n-n+2 & 2^n+2n-1 \\ 2^n-1 & 2^n-1 & 2^n+2 \end{pmatrix}.$$

3. (a) On peut trouver les valeurs propres de A grâce à un calcul de polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_A = \begin{vmatrix} X+29 & 6 & -42 \\ -44 & X-13 & 52 \\ 11 & 3 & X-14 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} X+7 & 0 & -2X-14 \\ 0 & X-1 & 4X-4 \\ 11 & 3 & X-14 \end{vmatrix} \begin{matrix} (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3) \\ (L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3) \\ \end{matrix} \\ &= (X+7)(X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 11 & 3 & X-14 \end{vmatrix} \\ &= (X+7)(X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 11 & 3 & X-4 \end{vmatrix} (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1 - 4C_2) \\ &= (X+7)(X-1)(X-4), \end{aligned}$$

On en déduit d'une part que le spectre de A est : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-7{,}1{,}4\}$, et d'autre part que A est diagonalisable, puisque son polynôme caractéristique est scindé et à racines simples.

(b) Soit (L_0, L_1, L_2) la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associée aux réels -7, 1 et 4. On a par définition :

$$L_0 = \frac{(X-1)(X-4)}{(-7-1)(-7-4)} = \frac{X^2-5X+4}{88}, \quad L_1 = \frac{(X+7)(X-4)}{(1+7)(1-4)} = -\frac{X^2+3X-28}{24},$$

et :

$$L_2 = \frac{(X+7)(X-1)}{(4+7)(4-1)} = \frac{X^2+6X-7}{33}.$$

On sait alors que l'unique polynôme P de degré au plus 2 et vérifiant : $P(-7) = (-7)^n$, $P(1) = 1$, $P(4) = 4^n$, s'écrit ainsi :

$$P = (-7)^n L_0 + L_1 + 4^n L_2 = \left(\frac{(-7)^n}{88} - \frac{1}{24} + \frac{4^n}{33}\right) X^2 + \left(-\frac{5(-7)^n}{88} - \frac{1}{8} + \frac{2\cdot 4^n}{11}\right) X + \frac{(-7)^n}{22} + \frac{7}{6} - \frac{7\cdot 4^n}{33}.$$

Pour abréger, nous notons a, b et c les coefficients ci-dessus, de sorte que : $P = aX^2 + bX + c$. Pour en déduire : $P(A) = A^n$, rappelons que d'après la question précédente, il existe $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = QDQ^{-1}$, avec : $D = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned}
P(A) = aA^2 + bA + c\mathrm{I}_3 &= aQD^2Q^{-1} + bQDQ^{-1} + cQQ^{-1} \\
&= Q\left(aD^2 + bD + c\mathrm{I}_3\right)Q^{-1} \\
&= Q\begin{pmatrix} a(-7)^2 + b(-7) + c & 0 & 0 \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c \end{pmatrix} Q^{-1} \\
&= Q\begin{pmatrix} P(-7) & 0 & 0 \\ 0 & P(1) & 0 \\ 0 & 0 & P(4) \end{pmatrix} Q^{-1} \\
&= Q\begin{pmatrix} (-7)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} Q^{-1} \\
&= A^n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. On obtient alors A^n en calculant $P(A)$ (il faut préalablement calculer A^2, et on remplace a, b et c par leurs expressions respectives à la fin du calcul) :

$$\begin{aligned}
A^n = P(A) = aA^2 + bA + c\mathrm{I}_3 &= a\begin{pmatrix} 115 & -30 & -318 \\ -132 & 61 & 444 \\ 33 & -15 & -110 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -29 & -6 & 42 \\ 44 & 13 & -52 \\ -11 & -3 & 14 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\cdot 4^n + 3(-7)^n & 2(1-4^n) & 2\left(4 - 4^n - 3(-7)^n\right) \\ 4\left(4^n - (-7)^n\right) & 4^{n+1} - 3 & 4\left(-3 + 4^n + 2(-7)^n\right) \\ -4^n + (-7)^n & 1 - 4^n & 4 - 4^n - 2(-7)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

★ Résoudre une équation polynomiale entre matrices (cas simplifié). ☐

Réponse. Commençons par réduire A et M pour se ramener à une équation ne faisant intervenir que des matrices diagonales. On commence évidemment par A qui est la seule matrice explicite.

On a $\chi_A = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, et la détermination des sous-espaces propres montre facilement qu'on a $\ker(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\ker(A + \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Par conséquent, la famille $\mathcal{B} =$

$\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Si l'on pose $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, alors la formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à A implique : $A=P\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}$. On a diagonalisé A.

Passons à la matrice M. Notons f_A et f_M les endomorphismes de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés à A et M respectivement. On remarque que la matrice A est un polynôme en M, donc A et M commutent et f_A et f_M aussi, donc les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Ainsi $\ker(A-\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ est stable par f_M, ce qui signifie que $f_M\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)\in\ker(A-\mathrm{I}_2)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$: il existe donc $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Le même raisonnement avec $f_M\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)\in\ker(A+\mathrm{I}_2)$ montre qu'il existe $\beta\in\mathbb{R}$ tel que : $f_M\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)=\beta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Ainsi on a : $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_M)=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$. Si on applique la formule du changement de base, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f_M)=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_M)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{\text{can}}).$$

Or $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f_M)=M$ par définition d'un endomorphisme canoniquement associé, et $P=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ avec les notations ci-dessus. Donc : $M=P\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}P^{-1}$.

En résumé, si $M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie : $M^3=A$, alors ce qui précède il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $M=P\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}P^{-1}$, si bien que : $M^3=P\begin{pmatrix}\alpha^3&0\\0&\beta^3\end{pmatrix}P^{-1}$. Comme $A=P\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}$, on en déduit, en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P :

$$M^3=A\iff P\begin{pmatrix}\alpha^3&0\\0&\beta^3\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}\iff\begin{pmatrix}\alpha^3&0\\0&\beta^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\iff\alpha^3=1\text{ et }\beta^3=-1.$$

Or $\alpha^3=1$ et $\beta^3=-1$, pour $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, ne sont possibles que si $\alpha=1$ et $\beta=-1$. En injectant ces expressions de α et β dans M, on trouve alors : $M=P\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}=A$. D'où le résultat (et réciproquement A convient).

★ Utiliser le lemme des noyaux pour expliciter les éléments d'un espace vectoriel. ☐

Réponse.

1. Soient $E=\mathrm{C}^\infty\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\mathbb{R}\right)$ et s l'application $y\mapsto\tan\cdot y'$. On vérifie aisément que s est un endomorphisme de E, et que l'ensemble des solutions de : $\tan\cdot(\tan\cdot y')'=y$, est exactement : $\ker(s^2-\mathrm{Id}_E)$. Par le lemme des noyaux : $\ker(s^2-\mathrm{Id}_E)=\ker(s-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(s+\mathrm{Id}_E)$. Il suffit donc de déterminer ces deux noyaux pour expliciter les solutions de l'équation différentielle de la question. Or cela revient à résoudre deux équations différentielles linéaires du premier ordre, et on sait faire :

$$\ker(s-\mathrm{Id}_E)=\left\{y\in E\mid y'=\frac{\cos}{\sin}y\right\}=\left\{x\mapsto\lambda e^{\ln(\sin(x))}\mid\lambda\in\mathbb{R}\right\}=\{x\mapsto\lambda\sin(x)\mid\lambda\in\mathbb{R}\},$$

et de même : $\ker(s+\mathrm{Id}_E)=\left\{x\mapsto\dfrac{\mu}{\sin(x)}\mid\mu\in\mathbb{R}\right\}$. On en déduit que l'ensemble $\ker(s^2-\mathrm{Id}_E)$ des solutions de : $\tan\cdot(\tan\cdot y')'=y$, est :

$$\left\{x\mapsto\lambda\sin(x)+\frac{\mu}{\sin(x)}\mid(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

2. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}-u_{n+2}-8u_{n+1}+12u_n=0$. On remarque si l'on introduit l'endomorphisme T de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ défini par $(u_n)_{n\geqslant 0}\mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$, alors : $E=\ker\left(T^3-T^2-8T+12\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\right)$. Or : $X^3-X^2-8X+12=(X-2)^2(X+3)$ (on le factorise d'abord en remarquant que 2 est racine « évidente », puis en faisant la division euclidienne de ce polynôme $X-2$; on sait ensuite facilement factoriser un polynôme du second degré), donc par le lemme des noyaux : $E=\ker\left((T-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})^2\right)\oplus\ker\left(T+3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\right)$. Pour déterminer ces deux noyaux, on remarque que l'on est dans une situation connue. En effet, si $u=(u_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors :

$$u\in\ker\left(T+3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\right)\iff T(u)=-3u\iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-3u_n,$$

si et seulement si u est une suite géométrique de raison -3. On a donc : $\ker\left(T+3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\right)=\mathrm{Vect}\left(\left((-3)^n\right)_{n\geqslant 0}\right)$. De même : $\ker\left((T-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})^2\right)$ est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-4u_{n+1}+4u_n=0$. L'équation caractéristique de cette relation est $(x-2)^2=0$, qui admet une unique racine double 2. On en déduit : $\ker\left((T-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})^2\right)=\mathrm{Vect}\left((2^n)_{n\geqslant 0},(n2^n)_{n\geqslant 0}\right)$. On conclut :

$$E=\mathrm{Vect}\left(\left((-3)^n\right)_{n\geqslant 0},(2^n)_{n\geqslant 0},(n2^n)_{n\geqslant 0}\right).$$

3. Soit $E=\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Il faut ici plus de nez pour trouver un endomorphisme f de E tel que l'ensemble des solutions de : $\forall x\in\mathbb{R},\ y''(x)+(2x+1)y'(x)+(x^2+x-1)y(x)=0$, soit de la forme $\ker(f^2+af+b\mathrm{Id}_E)$, avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Deux pistes néanmoins : l'expression de f fait figurer $y\mapsto(x\mapsto xy(x))$ (de sorte que f^2 fasse apparaître $x\mapsto x^2y(x)$), le terme en y de l'équation pouvant provenir simplement du terme $b\mathrm{Id}_E : y\mapsto by$ du noyau qu'on cherche à reconnaître. Mais f doit aussi dépendre de $y\mapsto y'$, afin que f^2 fasse apparaître une dérivée seconde. Toutes ces considérations conduisent à définir f comme l'application $y\mapsto(x\mapsto y'(x)+xy(x))$. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall y\in E,\ \forall x\in\mathbb{R},\quad f^2(y)(x)=f\left(f(y)\right)(x)&=f(y)'(x)+xf(y)(x)\\&=y''(x)+xy'(x)+y(x)+x\left(y'(x)+xy(x)\right)\\&=y''(x)+2xy'(x)+(x^2+1)y(x).\end{aligned}$$

Il devient alors assez clair que l'équation différentielle étudiée équivaut à : $f^2(y)+f(y)-2y=0_E$. On veut donc expliciter : $\ker(f^2+f-2\mathrm{Id}_E)$. Comme : $X^2+X-2=(X+2)(X-1)$, on a par le lemme des noyaux : $\ker(f^2+f-2\mathrm{Id}_E)=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Cela équivaut à la résolution de deux équations différentielles linéaires du premier ordre : on sait faire. Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $y\in E$. On a :

$$y\in\ker(f-\lambda\mathrm{Id}_E)\iff\forall x\in\mathbb{R},\ y'(x)=(\lambda-x)y(x)\iff\exists c\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=ce^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle de l'énoncé est donc :

$$\ker(f^2+f-2\mathrm{Id}_E)=\ker(f+2\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f-\mathrm{Id}_E)=\left\{x\mapsto ae^{-\frac{(2+x)^2}{2}}+be^{-\frac{(1-x)^2}{2}}\mid(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

★ Réduire un endomorphisme à l'aide d'un polynôme annulateur (cas non diagonalisable). ☐

Réponse. Remarquons que la première hypothèse sur f équivaut au fait que $X^3-X^2+X-1=(X-1)(X^2+1)$ soit un polynôme annulateur de f. Par le lemme des noyaux : $\mathbb{R}^3=\ker\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)\oplus\ker\left(f^2+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$. La seconde hypothèse équivaut au fait que : $\ker(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\neq\mathbb{R}^3$, de sorte que le second noyau ci-dessus ne soit pas réduit au vecteur nul.

Pour trouver une base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ dans laquelle la matrice de f est : $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$, remarquons que l'on devrait avoir : $f(\vec{e}_1)=\vec{e}_1$, $f(\vec{e}_2)=\vec{e}_3$ et $f(\vec{e}_3)=-\vec{e}_2$. La première égalité signifie qu'on doit prendre pour $\vec{e}_1$ un vecteur propre de f associé à 1 (et donc montrer qu'il en existe). Les deux dernières égalités disent d'une part que si l'on a déterminé $\vec{e}_2$, alors il suffit de poser $\vec{e}_3=f(\vec{e}_2)$ pour avoir le dernier vecteur, et d'autre part que $f^2(\vec{e}_2)=-\vec{e}_2$, c'est-à-dire : $\vec{e}_2\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Cette analyse étant achevée : montrons qu'il existe effectivement un vecteur propre de f associé à 1, puis vérifions qu'en prenant $\vec{e}_2\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$

non nul, alors $(\vec{e}_2, f(\vec{e}_2))$ est libre.

Démonstration que 1 *est valeur propre.* Comme χ_f est de degré 3 et unitaire, l'application polynomiale $x \mapsto \chi_f(x)$ a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$, donc par continuité elle s'annule au moins une fois en un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ (théorème des valeurs intermédiaires). Comme $\chi_f(\lambda) = 0$, c'est une valeur propre de f. Or les valeurs propres de f sont parmi les racines de ses polynômes annulateurs, donc λ est racine de $(X-1)(X^2+1)$: on doit avoir $\lambda = 1$. On a montré que 1 est valeur propre de f (et c'est même la seule, par ce même raisonnement). Notons $\vec{e}_1$ un vecteur propre de f associé à 1.

Prenons à présent $\vec{e}_2 \in \ker(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ non nul (il existe de tels vecteurs, comme on l'a justifié plus haut), et posons : $\vec{e}_3 = f(\vec{e}_2)$. Justifions que la famille $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$, qui est une famille de vecteurs de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, est libre : dans le cas contraire, $\vec{e}_2$ serait un vecteur propre de f (puisque $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3 = f(\vec{e}_2)$ seraient proportionnels), et comme 1 est l'unique valeur propre possible de f on aurait : $\vec{e}_2 \in \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\vec{0}\}$. C'est absurde puisque $\vec{e}_2$ est non nul. Ainsi la famille est bien libre : d'où le résultat.

Puisque $(\vec{e}_1)$ et $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont des familles libres de $\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ respectivement, qui sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ et de cardinal maximal : c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Conformément à l'analyse ci-dessus, la matrice de f dans cette base est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où le résultat.

Remarque. On pouvait aussi montrer que 1 est valeur propre en notant que $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ doit être de dimension paire. En effet, si l'on note g l'endomorphisme induit par f sur ce noyau, alors : $g^2 = -\mathrm{Id}_{\ker(f^2+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})}$, donc : $(\det(g))^2 = (-1)^{\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}))}$. Comme le membre de gauche est positif, le membre de droite doit l'être aussi, d'où la parité de la dimension. L'égalité : $\mathbb{R}^3 = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, impose alors que la dimension de $\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ soit impaire, et en particulier non nulle.

☢ Résoudre une équation polynomiale entre matrices (cas difficile). ☐

Réponse.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notons M une solution de $M^2 = A$. Comme $A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, on a $M^4 = A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. Ainsi M est nilpotente et son indice de nilpotence doit être inférieur à 2, donc : $M^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, mais c'est impossible vu que $M^2 = A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. Par l'absurde, il n'y a pas de solution à l'équation $M^2 = A$.
2. Commençons par réduire la matrice du membre de droite, que nous notons A. On remarque qu'elle est de rang 1, donc par le théorème du rang : $\dim(\ker(A)) = 2$. Ainsi 0 est valeur propre au moins double de A, et comme : $\mathrm{tr}(A) = 270$, on en déduit que la dernière valeur propre de A est 270 (et qu'elle est simple). La somme des dimensions des sous-espaces propres égale 3, donc A est diagonalisable. On peut si on le souhaite expliciter la diagonalisation. Nous vous laissons vérifier que l'on a : $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 22 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 270 \end{pmatrix}$. Voyons comment en déduire les solutions de : $M^2 = A$.
   Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, dont on suppose que : $M^2 = A$. Réduisons M à l'aide des sous-espaces propres de A. Notons f_M et f_A les endomorphismes de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés à M et A. Comme A est un polynôme en M, les matrices A et M commutent et donc f_A et f_M aussi. Les sous-espaces propres de f_A sont donc stables par f_M. Cela signifie que la matrice de f_M relativement à la base de vecteurs propres exhibée ci-dessus (dans les colonnes de P) est de la forme : $\begin{pmatrix} M' & 0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{1,2}(\mathbb{R})} & a \end{pmatrix}$, avec $M' \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Par la formule du changement de base : $M = P \begin{pmatrix} M' & 0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{1,2}(\mathbb{R})} & a \end{pmatrix} P^{-1}$. On

en déduit aisément que si $M^2 = A$ alors, après multiplication à gauche par P^{-1} et à droite par P :

$$\begin{pmatrix} M' & 0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{1,2}(\mathbb{R})} & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} & 0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{1,2}(\mathbb{R})} & 270 \end{pmatrix}.$$

Or : $\begin{pmatrix} M' & 0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{1,2}(\mathbb{R})} & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} M'^2 & 0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{1,2}(\mathbb{R})} & a^2 \end{pmatrix}$. L'égalité ci-dessus est donc vérifiée si et seulement si : $a^2 = 270$, et : $M'^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. Autrement dit : M' est une matrice d'ordre 2 nilpotente. Il est facile de se convaincre qu'une telle matrice est nécessairement de la forme : $\begin{pmatrix} b & -b \\ c & -c \end{pmatrix}$, avec $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ (d'abord noter qu'elle doit être de rang au plus 1, puis de trace nulle). On en déduit que si M est solution, alors il existe $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$M = P \begin{pmatrix} b & -b & 0 \\ c & -c & 0 \\ 0 & 0 & \pm 3\sqrt{30} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Réciproquement, toutes les matrices de cette forme conviennent (remonter les calculs).

3. Notons A la matrice du membre de droite et M une solution de $M^2 = A$. Réduisons A et M, en commençant bien entendu par A. On remarque qu'elle est de rang 1 et de trace nulle, donc suivant un raisonnement classique on a : $A^2 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$. Dans *Méthodes*, j'explique qu'une matrice nilpotente d'ordre 3 se triangule en formant une famille cyclique à partir d'un vecteur qui n'est pas dans $\ker(A)$, et qu'on complète ensuite avec un vecteur de $\ker(A)$ linéairement indépendant des vecteurs de cette famille. Prenons par exemple : $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui n'est clairement pas dans $\ker(A)$ vu que AE_3 est égal à la troisième colonne de A (qui est non nulle). Complétons la famille libre $(AE_3, E_3) = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ avec un vecteur de $\ker(A)$. On trouve après calculs : $\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}\right)$. Posons alors : $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$. La famille (AE_3, E_3, X) est de déterminant $18 \neq 0$ dans la base canonique, donc c'est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. La matrice de l'endomorphisme $X \mapsto AX$ dans cette base est : $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, par la formule du changement de base : $A = PTP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -6 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.
Passons à M. Notons f_M et f_A les endomorphismes de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés à M et A. Comme A est un polynôme en M, les matrices A et M commutent et donc f_A et f_M aussi. On en déduit que $\ker(A)$ est stable par f_M. C'est malheureusement trop peu instructif : on en déduit que la matrice de f_M dans la base (AE_3, E_3, X) est de la forme : $\begin{pmatrix} a & e & b \\ 0 & f & 0 \\ c & g & d \end{pmatrix}$. On peut faire mieux, en rappelant que $\mathrm{im}(A)$ est aussi stable par f_M ; or $\mathrm{im}(A)$ est de dimension 1, engendré par AE_3, donc $f_M(AE_3)$ est proportionnel à AE_3. Cela permet d'écrire la matrice de f_M dans la base (AE_3, E_3, X) sous la forme : $\begin{pmatrix} a & e & b \\ 0 & f & 0 \\ 0 & g & d \end{pmatrix}$. Pour simplifier encore plus ces coefficients : notons que $(f_M)^4 = (f_A)^2 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$, donc M est nilpotente et son polynôme caractéristique doit être égal à X^3. Mais, d'après l'expression ci-dessus, il est aussi égal à $(X-a)(X-f)(X-d)$ (faire le calcul en développant par rapport à la première colonne d'abord). Donc : $a = d = f = 0$. Tout cela montre, par la formule du changement de base, que l'on

a : $M = P\begin{pmatrix}0 & e & b\\0 & 0 & 0\\0 & g & 0\end{pmatrix}P^{-1}$. L'équation $M^2 = A$ équivaut alors à : $\begin{pmatrix}0 & e & b\\0 & 0 & 0\\0 & g & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, après multiplication par P^{-1} à gauche et par P à droite. Or : $\begin{pmatrix}0 & e & b\\0 & 0 & 0\\0 & g & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0 & bg & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, donc l'égalité précédente est vérifiée si et seulement si : $bg = 1$, si et seulement si b et g sont non nuls, et : $g = \frac{1}{b}$. Réciproquement, tous ces conditions, toute matrice M de la forme $M = P\begin{pmatrix}0 & e & b\\0 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{b} & 0\end{pmatrix}P^{-1}$ convient (remonter les calculs), ce qui fournit toutes les solutions de l'équation $M^2 = A$.

Réduction des endomorphismes

✓ Montrer qu'une matrice est diagonalisable, et la diagonaliser. ☐

Réponse. Observez la variété des arguments possibles pour trouver le spectre des matrices voire déterminer si elles sont diagonalisables.

1. On a :

$$\begin{aligned}
\chi_A = \begin{vmatrix}X & -1 & -1\\1 & X-1 & -1\\1 & -1 & X-2\end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix}1 & -1 & X-2\\1 & X-1 & -1\\X & -1 & -1\end{vmatrix} \quad (L_1 \leftrightarrow L_3)\\
&= -\begin{vmatrix}1 & -1 & X-2\\0 & X & 1-X\\0 & X-1 & -X^2+2X-1\end{vmatrix} \quad \begin{matrix}(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)\\(L_3 \leftarrow L_3 - XL_1)\end{matrix}\\
&= -\begin{vmatrix}X & 1-X\\X-1 & -(X-1)^2\end{vmatrix} \quad (\text{dév. / }1^{\text{re}}\text{ colonne})\\
&= (X-1)\begin{vmatrix}X & 1-X\\-1 & X-1\end{vmatrix} = (X-1)^2\begin{vmatrix}X & -1\\-1 & 1\end{vmatrix},
\end{aligned}$$

donc : $\chi_A = (X-1)^3$. Comme π_A divise χ_A, la matrice A est diagonalisable si et seulement si : $\pi_A = X - 1$ (critère polynomial de diagonalisation). Or $\pi_A \neq X - 1$ puisque A n'est pas la matrice identité ; on en déduit que A n'est pas diagonalisable.

2. On a :

$$\chi_B = \begin{vmatrix}X-23 & 25 & -25\\-5 & X+7 & -5\\15 & -15 & X+17\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}X+2 & 25 & 0\\X+2 & X+7 & X+2\\0 & -15 & X+2\end{vmatrix} = (X+2)^2\begin{vmatrix}1 & 25 & 0\\1 & X+7 & 1\\0 & -15 & 1\end{vmatrix}.$$

Le calcul du déterminant restant ne pose aucun problème. On trouve : $\chi_B = (X+2)^2(X-3)$, et pour sous-espaces propres :

$$\ker(B + 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}, \text{ et : } \ker(B - 3\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix}\right\},$$

donc la somme des dimensions des sous-espaces propres égale 3 et B est diagonalisable d'après le critère de diagonalisation. On a $B = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\0 & 1 & 1\\-1 & 0 & -3\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

3. La matrice $C + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ est de rang 2 et la matrice $C - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ de rang 1, donc par le théorème du rang $\dim(\ker(C + \mathrm{I}_3)) = 1$ et $\dim(\ker(C - \mathrm{I}_3)) = 2$. Cela fournit trois valeurs

propres en comptant les multiplicités, donc on les a toutes : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C) = \{1, -1\}$. Par ailleurs la somme des dimensions des sous-espaces propres égale 3, donc C est diagonalisable.

Plus tard, nous pourrons le déduire plus simplement du théorème spectral.

4. La matrice D est de rang 2 et la matrice $D + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de rang 2, donc d'après le théorème du rang on a $\dim(\ker(D)) = \dim(\ker(D + \mathrm{I}_3)) = 1$, donc 0 et -1 sont valeurs propres de multiplicité au moins 1. Soit λ la dernière valeur propre (éventuellement égale à 0 ou -1 également). Alors $\mathrm{tr}(D) = 0 = \lambda + 0 - 1$ donc $\lambda = 1$ est la troisième valeur propre de D. On en déduit que D admet trois valeurs propres distinctes, donc D est diagonalisable.

5. La matrice $E + 3\mathrm{I}_3$ est de rang 1, donc par le théorème du rang $\dim(\ker(E + 3\mathrm{I}_3)) = 2$. De plus la somme des coefficients de chaque ligne égale 12, donc 12 est valeur propre. Cela fournit trois valeurs propres en comptant les multiplicités, donc on les a toutes : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(E) = \{12, -3\}$. Par ailleurs la somme des dimensions des sous-espaces propres égale 3, donc E est diagonalisable.

   Plus tard, nous pourrons le déduire plus simplement du théorème spectral.

✓ Utiliser un polynôme annulateur pour la réduction. ☐

Réponse. Si $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible et vérifie $A^2(A^2 - \mathrm{I}_3)(A - 2\mathrm{I}_3)^2 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$, alors (en multipliant par A^{-1} à gauche deux fois), on a : $(A^2 - \mathrm{I}_3)(A - 2\mathrm{I}_3)^2 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$. On en déduit que $(X^2 - 1)(X - 2)^2 = (X - 1)(X + 1)(X - 2)^2$ est un polynôme annulateur de A. Ce n'est pas à racines simples, donc ce n'est pas suffisant pour montrer que A est diagonalisable. Toutefois, on déduit de ce polynôme annulateur que le spectre de A est inclus dans $\{-1,1,2\}$; de plus, $\mathrm{tr}(A) = 2$, mais la trace de A est aussi la somme des valeurs propres. Le seul moyen d'avoir une somme de trois réels dans $\{-1,1,2\}$ égale à 2 est que ces réels soient respectivement 1, -1 et 2. Ainsi A admet trois valeurs propres distinctes donc est diagonalisable.

✓ Trianguler une matrice. ☐

Réponse. On a clairement : $\chi_A = (X - 1)^3$, donc 1 est l'unique valeur propre de A. Par un argument très classique, on en déduit que A n'est pas diagonalisable. Triangulons-la. D'après le document *Méthodes*, en cas de valeur propre triple d'une matrice d'ordre 3, la dimension du sous-espace propre associé à 1 suffit à déterminer l'indice de nilpotence de $A - \mathrm{I}_3$ et à indiquer comment fabriquer une base de triangulation. Si tout ce qui suit vous paraît obscur, je vous invite à relire document susdit.

On trouve facilement : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, et dans ce cas $A - \mathrm{I}_3$ est d'indice de nilpotence maximal, c'est donc une matrice cyclique et nous pouvons produire une base cyclique à l'aide de n'importe quel vecteur qui n'est pas dans $\ker\left((A - \mathrm{I}_3)^2\right)$.

Prenons par exemple : $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, qui n'est pas dans $\ker\left((A - \mathrm{I}_3)^2\right)$ puisque : $(A - \mathrm{I}_3)^2 E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. La famille $((A - \mathrm{I}_3)^2 E_1, (A - \mathrm{I}_3)E_1, E_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et la matrice de $f_A : X \mapsto AX$ dans cette base est : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant la formule de changement de base entre la base canonique et la base (X_1, X_2, X_3), on en déduit : $A = PTP^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On a triangulé A.

Remarque. Inverser l'ordre des vecteurs de la base canonique suffit à trianguler A. Je l'ai volontairement ignoré pour illustrer une approche méthodique.

✓ Calculer le polynôme minimal d'une matrice simple. ☐

Réponse.

La matrice A. Développer par rapport à la dernière ligne donne rapidement : $\chi_A = (X-1)(X+3)^2$. On en déduit que π_A est soit égal à $(X-1)(X+3)$, soit égal à $(X-1)(X+3)^2$ (rappelons que π_A et χ_A ont exactement les mêmes racines : $X-1$ et $X+3$ figurent donc nécessairement parmi les facteurs irréductibles de π_A). Mais le calcul de $(A-\mathrm{I}_3)(A+3\mathrm{I}_3)$ donne une matrice non nulle, donc : $\pi_A = (X-1)(X+3)^2$.

La matrice B. On remarque que B est de rang 1 et de trace nulle, donc : $B^2 = \mathrm{tr}(B)B = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$ (il est très utile de savoir démontrer la première égalité, valable pour toute matrice de rang au plus 1 : exercice). On en déduit que X^2 est un polynôme annulateur de B, donc π_B divise X^2. Comme $B \neq 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$, on ne peut pas avoir : $\pi_B = X$. On a donc : $\pi_B = X^2$.

La matrice C. On trouve après calcul : $\chi_C = (X+1)^2(X-2)^2$. On en déduit que π_C est de la forme $(X+1)^a(X-2)^b$ avec $(a,b) \in \{1{,}2\}^2$. Calculer $(A+\mathrm{I}_3)^a(A-2\mathrm{I}_3)^b$ donne une matrice non nulle dès que $a=1$ ou $b=1$, donc : $\pi_C = (X+1)^2(X-2)^2$.

La matrice D. On reconnaît une matrice compagnon. On a donc : $\pi_D = X^4 - 4X^3 - 3X^2 - 2X - 1$ (c'est à savoir retrouver).

★ Étudier la diagonalisation d'un endomorphisme abstrait. ☐

Réponse.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $\psi(P) = \lambda P$ si et seulement si $P'' - 2P' - \lambda P = 0$. Or l'équation différentielle linéaire $y'' - 2y' - \lambda y = 0$ a pour équation caractéristique : $r^2 - 2r - \lambda = 0$, dont les solutions sont $1 + \sqrt{1+\lambda}$ et $1 - \sqrt{1+\lambda}$ si $\lambda > -1$, $1 + i\sqrt{-1-\lambda}$ et $1 - i\sqrt{-1-\lambda}$ si $\lambda < -1$, et enfin l'unique solution est 1 si $\lambda = -1$. On en déduit que si $\lambda > -1$, alors les solutions de cette équation sont de la forme $x \mapsto e^x\left(\alpha e^{\sqrt{1+\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{1+\lambda}x}\right)$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$; si $\lambda = -1$, les solutions sont de la forme $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^x$, et enfin si $\lambda < -1$ les solutions de cette équation sont de la forme $x \mapsto e^x\left(\alpha\cos\left(\sqrt{-1-\lambda}x\right) + \beta\sin\left(\sqrt{-1-\lambda}x\right)\right)$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Si $\lambda < -1$, il n'y a pas de solution polynomiale non nulle, parce que les solutions s'annulent une infinité de fois (pourquoi ?) ; si $\lambda = -1$, alors $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^x$ n'est pas polynomiale, parce que la croissance quand $x \to +\infty$ est trop rapide (comment le formaliser ?) ; si $\lambda > -1$, alors $x \mapsto e^x\left(\alpha e^{\sqrt{1+\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{1+\lambda}x}\right)$ n'est polynomiale que si $\lambda = 0$ et $\alpha = 0$.

   On en déduit que l'équation $y'' - 2y' - \lambda y = 0$ admet des solutions polynomiales non nulles si et seulement si $\lambda = 0$, et dans ce cas les solutions polynomiales non nulles sont de la forme $x \mapsto \beta$. Ainsi l'unique valeur propre de ψ est 0, et son sous-espace propre associé est $\mathbb{R}_0[X]$ (l'espace vectoriel des polynômes constants).

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\varphi(M) = \lambda M$ si et seulement si $M + \mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n = \lambda M$, si et seulement si : $(\lambda - 1)M = \mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n$. On fait une distinction de cas.

   Si $\lambda = 1$. Dans ce cas, $\varphi(M) = M$ si et seulement si $\mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$, si et seulement si $\mathrm{tr}(M) = 0$. On en déduit que 1 est valeur propre de M, et $\ker(\mathrm{tr})$ est son sous-espace propre associé. Notons que c'est un espace vectoriel de dimension $n^2 - 1$ d'après le théorème du rang (la trace a pour image $\mathbb{R}$, donc est de rang 1).

   Si $\lambda \neq 1$. Alors $M = \frac{\mathrm{tr}(M)}{\lambda - 1}\mathrm{I}_n$: on en déduit qu'une solution de $\varphi(M) = \lambda M$ est, dans ce cas, un multiple de la matrice identité. Réciproquement, si $M = \alpha\mathrm{I}_n$, alors $\varphi(M) = \lambda M$ si et seulement si $\alpha(\lambda-1)\mathrm{I}_n = \alpha n\mathrm{I}_n$ (on a $\mathrm{tr}(\mathrm{I}_n) = n$), si et seulement si $\alpha\,[\lambda - n - 1] = 0$, si et seulement si $\alpha = 0$ (ce qui équivaut à $M = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$) ou $\lambda = n+1$ (dans ce cas, l'équation $\varphi(\alpha\mathrm{I}_n) = (n+1)\alpha\mathrm{I}_n$ équivaut à $0 = 0$ et elle est donc vérifiée par toute matrice $\alpha\mathrm{I}_n$). On en déduit que si $\lambda \neq 1$, alors $\varphi(M) = \lambda M$ admet des solutions non nulles si et seulement si $\lambda = n+1$; ainsi $n+1$ est valeur propre de φ, et son sous-espace propre est engendré par I_n.

   En résumé : $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1, n+1\}$. On a $\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi - (n+1)\mathrm{Id})) = (n^2-1) + 1 = n^2$, donc φ est diagonalisable.

   Autre méthode court-circuit : une fois qu'on a établi que 1 est valeur propre et que son sous-espace propre est de dimension $n^2 - 1$, on sait qu'il suffit de trouver une seule valeur propre (s'il en existe) pour les avoir toutes. Or : $\varphi(\mathrm{I}_n) = (1+n)\mathrm{I}_n$, donc $1+n$ est valeur propre, et son sous-espace propre contient I_n (par des contraintes de dimension, c'est même engendré par I_n). La somme des dimensions des sous-espaces propres égale n^2, donc φ est diagonalisable.

★ Étudier les polynômes interpolateurs de Lagrange en algèbre linéaire. □

Réponse.

1. Comme A admet deux valeurs propres distinctes 3 et 1 (regarder la somme des coefficients de chaque ligne puis conclure avec la trace), la matrice A est diagonalisable. Soit $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que : $A = P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}P^{-1}$. On a : $A^{-2023} = P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^{-2023}\end{pmatrix}P^{-1}$. On nous demande cependant d'obtenir la valeur de cette exponentiation sans calculer de matrice de passage. Pour cela, introduisons un polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ dont l'image de 1 est 1 et l'image de 3 est 3^{-2023}. Par interpolation de Lagrange, on trouve que le polynôme :
$$Q = \frac{X-3}{-2} + 3^{-2023}\frac{X-1}{2} = \frac{3^{-2023}-1}{2}X + \frac{3-3^{-2023}}{2}$$
convient. On a alors, en reproduisant un calcul classique :
$$A^{-2023} = P\begin{pmatrix}Q(1) & 0\\ 0 & Q(3)\end{pmatrix}P^{-1} = Q\left(P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}P^{-1}\right) = Q(A) = \frac{3^{-2023}-1}{2}A + \frac{3-3^{-2023}}{2}\mathrm{I}_2.$$

2. Soit $M \in \mathrm{M}_n(K)$. On suppose : $M^2 = A$. Comme A admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, on peut diagonaliser A, et nous pouvons en déduire que M et A sont codiagonalisables. Notons f_M et f_A les endomorphismes de $\mathrm{M}_{n,1}(K)$ canoniquement associés à M et A respectivement. Comme A est un polynôme en M, les matrices A et M commutent et donc f_M et f_A aussi. On en déduit que les sous-espaces propres de A sont stables par f_M. Or les valeurs propres de A sont toutes simples par hypothèse, donc ses sous-espaces propres sont des droites : une droite stable étant engendrée par un vecteur propre, on en déduit que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, si l'on note X_i un vecteur propre de A associé à λ_i (qui engendre donc $\ker(A-\lambda_i\mathrm{I}_n)$), alors X_i est aussi un vecteur propre de f_M : il existe μ_i tel que : $f_M(X_i) = \mu_i X_i$. En appliquant la formule de changement de base entre la base canonique et la base commune de vecteurs propres $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on en déduit l'existence de $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que : $A = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$, et : $M = P\begin{pmatrix}\mu_1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mu_n\end{pmatrix}P^{-1}$.
Voyons comment en déduire que M est un polynôme en A : comme les λ_i sont tous distincts, par interpolation de Lagrange il existe $Q \in K[X]$ tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \mu_i$. On a alors :
$$Q(A) = P\begin{pmatrix}Q(\lambda_1) & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q(\lambda_n)\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}\mu_1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mu_n\end{pmatrix}P^{-1} = M,$$
d'où le résultat : M est un polynôme en A.

3. On note que B^3 est un polynôme en A^2, donc en A. Montrons que B est un polynôme en B^3, ce qui suffira à montrer que B est un polynôme en A (qui commute donc avec A). Pour cela : comme B est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $B = PDP^{-1}$. On a alors : $B^3 = PD^3P^{-1}$. Construisons un polynôme interpolateur tel que : $P(D^3) = D$. Pour cela, il suffit de noter que quand λ parcourt $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B)$, les λ^3 sont tous distincts par injectivité de l'application $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, donc par interpolation de Lagrange il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B)$, $Q(\lambda^3) = \lambda$. Comme les coefficients de D et D^3 sont respectivement les valeurs propres de B et les valeurs propres de B à la puissance 3, on a clairement : $Q(D^3) = D$. Or : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(B^3)^k = P(D^3)^kP^{-1}$, donc par linéarité on obtient : $Q(B^3) = PQ(D^3)P^{-1} = PDP^{-1} = B$. Ainsi B est un polynôme en B^3, et d'après ce qui fut dit plus haut cela suffit à démontrer que A et B commutent.

★ Utiliser la trigonalisation diagonale par blocs ou la décomposition de Dunford. ☐

Réponse.

1. Comme on est sur $\mathbb{C}$, on peut utiliser la décomposition de Dunford de A. Soit (D, N) cette décomposition. Comme D et N commutent, on a par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} A + A^2 + A^3 &= (D+N) + (D^2 + 2ND + N^2) + (D^3 + 3N^2D + 3ND^2 + N^3) \\ &= (D + D^2 + D^3) + N\underbrace{(\mathrm{I}_n + 2D + 3D^2 + N + 3ND + N^2)}_{=N'}. \end{aligned}$$

La première matrice de cette décomposition est diagonalisable, puisque D, D^2 et D^3 le sont dans une même base. En effet, si l'on introduit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D' \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que : $D = PD'P^{-1}$, alors : $D + D^2 + D^3 = P(D' + D'^2 + D'^3)P^{-1}$, et $D' + D'^2 + D'^3$ est diagonale : cela démontre la diagonalisabilité.

La seconde matrice de cette décomposition est nilpotente. En effet, le fait que N et D commutent assure que N et N' aussi, et donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(NN')^k = N^k(N')^k$; on obtient donc la matrice nulle dès que k est égal à l'indice de nilpotence de N.

Enfin, $D + D^2 + D^3$ et NN' commutent clairement parce que D et N commutent : la décomposition ci-dessus est donc la décomposition de Dunford de $A + A^2 + A^3$. Mais comme cette matrice est diagonalisable, sa partie nilpotente dans la décomposition de Dunford est nulle, donc : $NN' = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$. Si N' est inversible, cette égalité implique $N = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ et on en déduit que $A = D$ est diagonalisable : c'est ce que nous voulons justifier à présent.

Pour cela, notons que $(\mathrm{I}_n + 2D + 3D^2, N + 3ND + N^2)$ est la décomposition de Dunford de N' par un raisonnement proche de celui établi pour $A + A^2 + A^3$. On en déduit en particulier : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(N') = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{I}_n + 2D + 3D^2)$. Pour que N' soit inversible, il faut et il suffit que 0 ne soit pas dans son spectre, ce qui est vrai si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de $\mathrm{I}_n + 2D + 3D^2$. Or les valeurs propres de cette matrice sont de la forme $1 + 2\lambda + 3\lambda^2$ avec $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ (codiagonaliser les trois matrices pour le remarquer) et par hypothèse : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $1 + 2\lambda + 3\lambda^2 \neq 0$, d'où le résultat : N' est inversible, et multiplier par N'^{-1} l'égalité plus haut donne : $N = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$, puis A est diagonalisable. D'où le résultat.

2. Au vu des hypothèses, on sait qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{C}$ tels que : $A = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & a \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}P^{-1}$.

Introduisons des racines cubiques λ' de λ et μ' de μ. Construisons une racine cubique de $\begin{pmatrix} \mu & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ sous la forme : $T = \begin{pmatrix} \mu' & b \\ 0 & \mu' \end{pmatrix}$. Comme les matrices $\mu'\mathrm{I}_2$ et $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent, on a par la formule du binôme de Newton, après calculs : $T^3 = \begin{pmatrix} \mu & 3\mu'^2 b \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Or A est supposée inversible, donc ses valeurs propres sont non nulles, et on en déduit $\mu' \neq 0$. En posant : $b = \dfrac{a}{3\mu'^2}$, on a alors bien : $T^3 = \begin{pmatrix} \mu & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Il suffit alors de poser : $M = P\begin{pmatrix} \lambda' & 0 & 0 \\ 0 & \mu' & \frac{a}{3\mu'^2} \\ 0 & 0 & \mu' \end{pmatrix}P^{-1}$, pour avoir le résultat.