Chapitre V — Réduction des endomorphismes

Camille Jordan
(1838–1922)

Sir William Rowan Hamilton
(1805–1865)

Ferdinand Frobenius
(1849–1917)

D'un sibyllin morphisme ôtons les oripeaux
Par une fonction qui le caractérise :
Un polynôme ayant de singuliers zéros
Dévoile un spectre affable à qui le factorise.

De calculs on déduit, pivots après pivots,
Si l'application se diagonalise ;
La base de vecteurs qu'on trouve sans accrocs
Donne à l'endomorphisme une forme concise.

Des coefficients l'agencement obscur
Rend le moindre produit interminable et dur :
À notre entendement échappe sa puissance ;

Mais dès qu'on a trouvé chaque propre élément,
La matrice apparaît dans un dépouillement
Dont la diagonale extrait toute l'essence.
(Théophile de Viau)

Révisions attendues

1. Intégralité du cours d'algèbre linéaire de 1re année : méthode du pivot de Gauß, applications du théorème du rang, représentation matricielle des endomorphismes, indépendance linéaire, déterminant et sous-espaces vectoriels supplémentaires, projecteurs et symétries. Déterminant de Vandermonde. Formule du binôme. Matrices semblables, matrices équivalentes. Formules de changement de base. Complément possible : lire le document *Méthodes* d'algèbre linéaire de 1re année (uniquement disponible en ligne).
2. Révisions sur les polynômes (1re et 2e années) : racine, ordre de multiplicité, caractérisation avec les dérivées successives. Relations coefficients-racines. Division euclidienne des polynômes. Polynômes premiers entre eux, irréductibles. Théorème de Bézout. Polynômes interpolateurs de Lagrange. Lien avec le déterminant de Vandermonde.

Vos révisions sont insuffisantes si vous ne parvenez pas à faire ces exercices :

Exercice 1. Écrire la matrice de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, 2x-3y) \end{cases}$ dans la base $((1,1),(1,-1))$ de $\mathbb{R}^2$ (on admet que c'est une base).

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer si la famille $((a,1,1),(1,a,1),(1,1,a))$ est libre.

Exercice 3. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $f \circ f = 0_{\mathrm{L}(\mathbb{R}^2)}$ et $f \neq 0_{\mathrm{L}(\mathbb{R}^2)}$. Montrer que $\mathrm{im}(f) \subseteq \ker(f)$, puis qu'il y a égalité de ces deux sous-espaces.

Exercice 4. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $f \circ f = 0_{\mathrm{L}(\mathbb{R}^2)}$ et $f \neq 0_{\mathrm{L}(\mathbb{R}^2)}$. Soit $\vec{x} \notin \ker(f)$. Montrer que la famille $(f(\vec{x}), \vec{x})$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 5. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ b & a & -1 & 0 \\ b^2 & ab & a & -1 \\ b^3 & ab^2 & ab & a \end{pmatrix}$, et en déduire à quelle condition nécessaire et suffisante sur (a,b) c'est une matrice inversible.

Exercice 6. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$. Déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante sur (λ,μ) le polynôme $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ est divisible par $X^2 + 2$ (faire la division euclidienne).

Exercice 7. Écrire une relation de Bézout entre $X^3 - 3X^2 + 1$ et $X^2 + X - 2$.

Motivation

Principe de la réduction des endomorphismes et des matrices.

Notations. Dans tout ce cours, la lettre K désigne un corps. Sauf mention explicite du contraire, E est un K-espace vectoriel et n un entier naturel non nul lorsqu'on introduit $\mathrm{M}_n(K)$

Votre serviteur distingue les scalaires et les vecteurs en mettant des flèches sur ces derniers. Vous n'avez pas à suivre cette convention.

Les énoncés sur les endomorphismes sont valables pour les matrices, *via* un isomorphisme de K-algèbres entre $\mathrm{L}(E)$ et $\mathrm{M}_n(K)$.

1 Polynômes d'endomorphismes

Définition-Proposition 1 (Polynôme annulateur, polynôme minimal)**.**

Remarque. Lien entre polynôme minimal d'un endomorphisme et d'une matrice.

Remarque. Caractérisation du degré du polynôme minimal en termes de famille libre.

Exemple 1. Endomorphismes ayant un polynôme minimal de degré 1. ♡

Exemple 2. Polynôme minimal d'un projecteur, d'une symétrie. ♡

Exemple 3. Polynôme minimal de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 2 (Indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent)**.**

Exemple 4. Endomorphisme n'ayant pas de polynôme annulateur non nul.

Remarque. Le polynôme minimal n'est pas nécessairement irréductible.

Remarque. Le polynôme minimal d'une matrice est invariant par extension de corps.

2 Sous-espaces stables

2.1 Définitions

Définition 3 (Sous-espace stable, endomorphisme induit)**.**

Exemple 5. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par l'endomorphisme $d : P \mapsto P'$.

Proposition 4 (Image d'une base et stabilité)**.**

Définition 5 (Matrice par blocs)**.**

Proposition 6 (Traduction matricielle de la stabilité)**.** → prop. 33

Exemple 6. L'espace vectoriel $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ est stable par l'endomorphisme $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x - y + z, x + 4y + z, x + y + 2z) \end{cases}$.

Proposition 7 (Images et noyaux d'endomorphismes qui commutent)**.**

Corollaire 8 (Sous-espaces stables d'un polynôme d'endomorphisme)**.** → déf. 10

2.2 Les « meilleurs » sous-espaces stables : les sous-espaces propres

Proposition 9 (Droites stables).

Exemple 7. Endomorphismes laissant stable toute droite. ♡

Définition 10 (Sous-espaces propres, valeurs propres, vecteurs propres, spectre).

Remarque. Lien entre la définition géométrique et la définition matricielle.

Proposition 11 (Principe de conjugaison et éléments propres).

Exemple 8. Condition nécessaire et suffisante pour que : $0 \in \mathrm{Sp}_K(A)$. ♡

Exemple 9. Éléments propres de l'endomorphisme de dérivation $d : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$.

Remarque. Vecteurs propres d'une matrice visibles « à l'œil nu ».

Exemple 10. Valeur propre d'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$ dont la somme des coordonnées de chaque ligne donne le même nombre S. ♡

Définition 12 (Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable).

Proposition 13 (Lien entre la définition géométrique et la définition matricielle).

Remarque. Comment construire P telle que $A = PDP^{-1}$.

Remarque. Coefficients diagonaux d'une matrice diagonale semblable à A.

Définition-Proposition 14 (Polynôme caractéristique).

Proposition 15 (Valeurs propres et racines du polynôme caractéristique ou minimal).

Corollaire 16 (Le spectre d'une matrice est fini).

Remarque. Conséquences sur les valeurs propres d'une matrice semblable, transposée, complexe. Comportement du spectre par extension de corps.

Corollaire 17 (Expression de la trace et du déterminant avec les valeurs propres). → ex. 27

Exemple 11. Polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre 2.

Exemple 12. Polynôme caractéristique et sous-espaces propres d'une matrice compagnon. → ex. 16 ♡

Exemple 13. Valeurs propres d'un projecteur, d'une symétrie.

Méthode 1. Comment obtenir les éléments propres. Voir *Méthodes*, section 1. 1

Exemple 14. Valeurs propres de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 15. Matrices de trace nulle vérifiant : $M^3 - 4M^2 + 4M = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$.

Proposition 18 (Valeur propre d'une matrice triangulaire, d'une matrice nilpotente). → cor. 25

2.3 Autres liens entre polynômes et éléments propres

Proposition 19 (Polynômes d'endomorphismes et vecteurs propres).

Proposition 20 (Polynôme minimal, polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit).

Corollaire 21 (Dimension d'un sous-espace propre). → cor. 51

2.4 Espaces cycliques

Définition 22 (Espace cyclique, endomorphisme cyclique)**.**

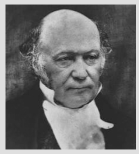
Remarque. Espaces cycliques et sous-espaces propres : mérites comparés.

Exemple 16. Matrice, polynôme caractéristique, polynôme minimal d'un endomorphisme cyclique.

← ex. 12
♡

Corollaire 23 (Théorème de Cayley-Hamilton)**.**

Démonstration (idée). Soient $f \in \mathrm{L}(E)$ et $\vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$. Introduire $d \in \mathbb{N}$ maximal tel que $\mathcal{F} = (f^i(\vec{x}))_{0 \leqslant i \leqslant d}$ soit libre, et noter que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est stable par f. Compléter $\mathcal{F}$ en une base de E, et écrire la matrice de f dans cette base. Conclure en utilisant le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon. □


1805 – 1865

Exemple 17. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 telle que $\det(A) \neq 0$.

Corollaire 24 (Décomposition en facteurs irréductibles du polynôme minimal)**.**

Corollaire 25 (Caractérisation spectrale des matrices nilpotentes de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$)**.**

← prop. 18

Démonstration (idée). Pour $(ii) \Rightarrow (iii)$: écrire χ_A sous forme scindée sur $\mathbb{C}$ (possible par le théorème fondamental de l'algèbre), de manière explicite grâce à l'hypothèse sur le spectre, et conclure grâce au théorème de Cayley-Hamilton. □

Remarque. Contre-exemple si $\mathrm{Sp}_K(A) = \{0\}$ avec $K \neq \mathbb{C}$.

Exemple 18. Matrice nilpotente d'indice de nilpotence maximal. ♡

2.5 Quelques applications des sous-espaces stables

Exemple 19 (guidé). Le centre de $\mathrm{GL}_n(K)$. ♡

Idée. Si $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ est dans le centre, alors $AMA^{-1} = M$ pour toute matrice inversible M. Pour toute droite D, trouver une matrice adéquate dont un sous-espace propre est D, et en déduire que l'endomorphisme canoniquement associé à A laisse stable toute droite. Conclure.

Exemple 20 (guidé). Soit $A = \begin{pmatrix} d_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & d_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, avec $d_1, \ldots, d_n$ distincts. Détermination des racines cubiques de A.

Idée. Soient $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que : $M^3 = A$, et (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que A et M commutent, et utiliser la stabilité des sous-espaces propres pour en déduire que pour tout i, il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}^3$ tel que : $g(E_1) = \alpha_i E_1$. Déterminer les α_i à l'aide de l'égalité $M^3 = A$.

3 Décompositions en sommes directes

3.1 Extension des résultats de première année

Définition 26 (Somme, somme directe de sous-espaces vectoriels).

Proposition 27 (Critère en dimension finie).

Proposition 28 (Base d'une somme directe).

Remarque. Somme directe obtenue par fractionnement d'une base.

Définition 29 (Base adaptée).

Mise en garde 1. Il n'y a pas de caractérisation avec l'intersection pour une somme de $k \geqslant 3$ sous-espaces vectoriels.

Proposition 30 (Associativité de $\oplus$).

Proposition 31 (Projecteurs associés à une décomposition en somme directe).

Corollaire 32 (Prolongement d'une application linéaire).

3.2 Traduction matricielle

Proposition 33 (Matrice dans une base adaptée à des sous-espaces stables).

Proposition 34 (Calcul avec des matrices par blocs).

Définition 35 (Matrices par blocs de transvection, de dilatation).

Corollaire 36 (Calcul de déterminants par blocs).

3.3 Lemme de décomposition des noyaux

Théorème 37 (« Lemme » des noyaux).

Corollaire 38 (Somme directe des sous-espaces propres).

Corollaire 39 (Vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes).

Remarque. Ce résultat permet de démontrer élégamment la liberté de certaines familles. ← ex. 9

Corollaire 40 (Décomposition de l'espace à l'aide d'un polynôme annulateur, du polynôme caractéristique ; définition des sous-espaces caractéristiques).

Corollaire 41 (Équations différentielles linéaires à coefficients constants). ↗ XI

4 Réduction des endomorphismes

Dans toute cette section, on suppose que E est de dimension FINIE non nulle.

4.1 Diagonalisation

Théorème 42 (Critère de diagonalisation)**.**

Remarque. Critère de diagonalisation pour une matrice.

Corollaire 43 (Cas particulier d'un polynôme caractéristique scindé à racines simples)**.**

Mise en garde 2. La réciproque du corollaire précédent est fausse.

LE CAS OÙ χ_A N'EST PAS À RACINES SIMPLES NE PERMET PAS DE CONCLURE !

Théorème 44 (Critère polynomial de diagonalisation)**.**

Remarque. Explicitation des projecteurs sur les sous-espaces propres.

Exemple 21. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$. ♡

Exemple 22. Projecteurs et symétries. Trace d'un projecteur. ♡

Exemple 23. Endomorphismes n'ayant qu'une seule valeur propre. Endomorphismes à la fois nilpotents et diagonalisables. ♡

Exemple 24. Condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathrm{M}_n(K)$ pour que $M \mapsto AM$ soit diagonalisable.

Exemple 25. Application. Suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} - 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2u_n = 0$. ← ex. 12

Méthode 2. Compléments sur le calcul des puissances : voir *Méthodes*, section 4. 4

Méthode 3. Le dernier exemple se généralise. Voir *Méthodes*, section 6.1.3. 6.1.3

Remarque. Anticipation sur le théorème spectral. ↗ XII

4.2 Codiagonalisation

Proposition 45 (Restriction d'un endomorphisme diagonalisable)**.**

Théorème 46 (Condition nécessaire et suffisante pour être codiagonalisable)**.**

Exemple 26. Somme et produit de deux endomorphismes diagonalisables.

Méthode 4. Interpolation de Lagrange et réduction. Voir *Méthodes*, section 7.

4.3 Trigonalisation et décomposition de Dunford

Définition 47 (Endomorphisme, matrice trigonalisable).

Remarque importante. Valeurs propres d'une matrice triangulable.

Théorème 48 (Critère de trigonalisation).

Corollaire 49 (Restriction d'un endomorphisme trigonalisable).

Corollaire 50 (Matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$).

Exemple 27. Trace et déterminant des puissances d'une matrice en fonction de ses valeurs propres. ← prop. 14

Proposition 51 (Dimension des sous-espaces caractéristiques). ← cor. 21

Proposition 52 (Triangulation d'une matrice nilpotente).

Corollaire 53 (Trigonalisation avec une matrice diagonale par blocs).

Corollaire 54 (Décomposition de Dunford).

Mise en garde 3. Décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Méthode 5. Sur la trigonalisation et la décomposition de Dunford en pratique. Voir *Méthodes*, section 3. 3

Remarque culturelle. On peut faire mieux : décomposition de Jordan.

— Fin du chapitre V —

Compléments et approfondissements

1. Pour aller plus loin que la trigonalisation proposée, il faut aller jusqu'à la décomposition de Jordan, qui revient à proposer les matrices triangulaires « les plus simples possibles » dans le corollaire 53. Cela nécessite cependant d'approfondir l'étude des endomorphismes nilpotents, de leurs noyaux itérés, et des sous-espaces cycliques (l'objet le plus subtil de cette liste).

2. En raisonnant comme dans la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton, et en répétant le procédé sur des sous-espaces supplémentaires adéquats (c'est l'étape la plus délicate : trouver un supplémentaire adéquat), on peut démontrer que toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs, dont les blocs sont des matrices compagnons, et de manière unique si l'on ajoute une contrainte de divisibilité entre les polynômes associés. C'est la *réduction de Frobenius*. Son intérêt n'est pas pour l'exponentiation (les réductions de ce cours sont plus adaptées dans ce cas-là), mais pour l'étude des polynômes annulateurs qui se « voient à l'œil nu » sur une telle réduction et pour étudier les propriétés invariantes par extension de corps (grâce à la propriété d'unicité). Enfin, cette réduction a l'avantage d'être possible sans la moindre hypothèse.

   Une telle réduction, lorsqu'elle apparaît dans un problème (éventuellement dans un cas particulier), est en général guidée. Mais si l'on maîtrise les propriétés des espaces cycliques et des matrices compagnons, on peut d'autant mieux exploiter les indications et voir où elles veulent en venir.

3. L'étude des matrices à coefficients entiers est potentiellement délicate puisqu'on perd la structure de corps de l'anneau des coefficients. Leur étude nécessite essentiellement deux compétences : 1° comme on peut se ramener à un corps en réduisant modulo p une telle matrice, il est bon dans ces cas-là de comprendre ce qui se conserve ou non par réduction modulo p (ordre de multiplicité des valeurs propres ? simplicité du polynôme caractéristique ou minimal ? inversibilité ? rang ? diagonalisabilité ? etc.), 2° les polynômes minimaux et caractéristiques sont dans ce cas-là à coefficients entiers (non trivialement pour le polynôme minimal), en particuliers à coefficients rationnels ; or on l'a vu, la réduction nécessite souvent de savoir les décomposer en facteurs irréductibles ; ainsi, savoir étudier les polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ ou $\mathbb{Q}[X]$ (et en particulier leur irréductibilité, leurs racines...) est lié de manière ténue à la réduction des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.

4. Cet item est soit de l'approfondissement excessivement poussé, soit de la culture scientifique. Comme l'algèbre linéaire est une théorie riche en résultats (j'évite de dire « achevée » pour ne pas froisser les âmes sensibles), les autres domaines des mathématiques essaient de s'y ramener dans la mesure du possible pour simplifier leur étude. C'est ainsi que la théorie des *représentations linéaires* permet d'étudier un groupe G en étudiant plutôt les morphismes $G \to \mathrm{GL}(E)$ (c'est une généralisation de la théorie des caractères, qui est insuffisante pour les groupes non commutatifs). On peut alors voir G comme un ensemble d'applications linéaires, dont la réduction nous renseigne sur les éléments de G. Cela sert aussi inversement à décomposer l'espace vectoriel E d'une manière analogue à celle obtenue *via* le lemme des noyaux (qui découle en fait d'un cas particulier de représentation $\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(E)$).

De nombreux approfondissements nécessitent d'aborder les chapitres VI (topologie), XII (espaces euclidiens) et XIII (calcul différentiel), et ne sont donc pas mentionnés ci-dessus.

Table des matières

Les systèmes couplés, comme les récurrences,
Semblent une bravade à notre invention :
Quand leur matrice, hélas ! croît en dimension,
On se perd aisément en calculs de puissances.

Taupin, ne perds point cœur ! Observant tes errances,
Un spectre a le remède à ton affliction.
Depuis sa base, claire est la solution :
« Regarde par-delà les troubles apparences.

Pour qu'un endomorphisme affleure sans apprêts,
D'un bon déterminant les racines extrais,
Et je serai visible à ton âme ingénue ;

Résolvant maint système avec l'appui de Gauß,
Une diagonale émerge du chaos :
Toute chose en son propre est sans mystère et nue. »
(Auguste de Villiers de l'Isle-Adam)