Du cours aux exercices (Savoir-faire à vérifier)

Chapitre IX — Séries entières

Les principaux acquis à vérifier sont :

Espaces probabilisés, probabilités conditionnelles

✓ 1. Définir une probabilité, une loi de probabilité de variable aléatoire par son germe.

✓ 2. Dans une expérience avec une chronologie claire, utiliser la formule des probabilités composées.

✓ 3. Reconnaître un contexte d'utilisation de la formule de Bayes.

✓ 4. Ramener une chaîne de Markov à une étude de suite matricielle.

★ 5. Pour calculer la probabilité d'une réunion d'évènements, bien choisir entre le théorème de continuité croissante, la σ-additivité, la formule de Moivre et l'indépendance des évènements.

★ 6. Pour calculer la probabilité d'une intersection d'évènements, bien choisir entre le théorème de continuité décroissante, la formule des probabilités composées, la formule de Moivre et l'indépendance des évènements.

☢ 7. Reconnaître le cadre d'utilisation du lemme de Borel-Cantelli ou de la loi du zéro-un de Borel.

Variables aléatoires discrètes

✓ 1. Reconnaître une loi de probabilité usuelle en identifiant une expérience type.

✓ 2. Reconnaître et utiliser l'inégalité de Markov ou de Bienaymé-Tchebychev.

✓ 3. Obtenir la loi d'un couple de variables aléatoires et en déduire les lois marginales.

✓ 4. Calculer $\mathrm{P}(X = n)$ à l'aide de $\mathrm{P}(X \geqslant n)$ ou $\mathrm{P}(X \leqslant n)$.

✓ 5. Déduire d'une série génératrice la loi de probabilité d'une variable aléatoire.

✓ 6. Calculer l'espérance, la variance d'une variable aléatoire, soit lorsqu'on connaît sa loi, soit à l'aide du théorème de transfert.

✓ 7. Savoir démontrer ou utiliser l'indépendance d'évènements ou de variables aléatoires.

★ 8. Étudier une variable aléatoire ou la probabilité d'un évènement en passant par des fonctions indicatrices adéquates, des sommes de variables usuelles simples.

L'icône « (🗎) » signifie que les documents *Méthodes* donnent des compléments sur ces savoir-faire.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices exerçant à ce savoir-faire.

Espaces probabilisés, probabilités conditionnelles.

✓ Définir une probabilité, une loi de probabilité de variable aléatoire par son germe.

Exemple. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante sur λ il existe une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{(n+1)2^n}$.

✓ Dans une expérience avec une chronologie claire, utiliser la formule des probabilités composées.

Exemple. Un sauteur en hauteur tente de franchir les hauteurs successives 1, 2, 3, ..., n, ... On suppose que la probabilité de succès à la hauteur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est $\frac{1}{n}$. Le sauteur est éliminé à son premier échec. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, déterminer la probabilité de l'évènement E_n : « le sauteur est éliminé à la n^{e} haie ». En déduire la probabilité qu'il échoue à un moment.

✓ Reconnaître un contexte d'utilisation de la formule de Bayes.

Exemple. En Ligue 1, le Racing Club de Strasbourg gagne 34 matchs sur 100, fait match nul 27 fois sur 100 et perd 39 matchs sur 100 (statistiques officielles). Lorsqu'il gagne, le professeur de mathématiques d'une certaine classe de MP* arrive irrité en cours le lendemain avec probabilité $\frac{1}{10}$. En cas de match nul, il est de mauvais poil avec probabilité $\frac{1}{4}$, et en cas de défaite il s'énerve avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Un lundi après-midi, lendemain de match, il arrive énervé. Avec quelle probabilité le Racing Club de Strasbourg a-t-il perdu la veille ?

✓ Ramener une chaîne de Markov à une étude de suite matricielle.

Exemples.

1. Un fumeur impénitent essaie d'arrêter de fumer. Chaque jour, il fume avec probabilité $\frac{3}{4}$ s'il n'a pas fumé la veille (il craque !), et avec probabilité $\frac{1}{4}$ s'il a fumé la veille (il culpabilise !). Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit F_n l'évènement : « il fume durant le n^{e} jour après sa résolution d'arrêter ». On admet que $\mathrm{P}(F_1) = 0$. Calculer $\mathrm{P}(F_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
2. Trois élèves de MP*, notés A, B et C, ont convenu qu'au lieu de tous travailler les devoirs maisons de mathématiques, un seul élève s'en charge et les deux autres recopient sa composition (convaincus que le professeur n'en saura rien). Seulement :
   — lorsque l'élève A a été en charge du n^{e} devoir maison, il refuse de s'en charger à nouveau pour le $(n+1)^{\text{e}}$ devoir maison : c'est donc B ou C qui s'en charge, le premier avec probabilité $\frac{2}{3}$ et le second avec probabilité $\frac{1}{3}$;
   — lorsque l'élève B a fait pour ses camarades le n^{e} devoir maison, n'importe quel élève (A, B ou C) peut être désigné pour faire le $(n+1)^{\text{e}}$ devoir maison, avec équiprobabilité ;
   — lorsque l'élève C a fait le n^{e} devoir maison, il se rend compte qu'il progresse et y prend goût, donc il se porte volontaire pour le devoir maison suivant.

   On suppose que l'élève B est le premier à s'être porté volontaire. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, calculer la probabilité pour que chaque élève fasse le n^{e} devoir maison.
3. Christian Renauld, Lionel Messire et Célian Baptiste font un « jeu » de survie. On suppose que chacun d'entre eux choisit au hasard (uniformément) une cible parmi les autres joueurs survivants, et lui tire dessus. Pour simplifier, les tirs des différents participants ont la même probabilité de succès $\frac{2}{3}$, et les succès des tirs sont indépendants les uns des autres. Tout le monde tire en même temps. On répète ce « jeu » jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un seul survivant, ou aucun.

   Déterminer la probabilité qu'après n tirs, il reste zéro, un, deux ou trois survivants. (Bonus : quel est le nombre moyen de tirs avant que la partie se termine ?).

★ Pour calculer la probabilité d'une réunion d'évènements, bien choisir entre le théorème de continuité croissante, la σ-additivité, la formule de Moivre et l'indépendance des évènements.

Exemple. Un joueur lance un dé équilibré à six faces une infinité de fois (si l'expérience ne paraît pas réalisable : dites-vous qu'il est en Enfer et joue pour tuer le temps). Les lancers sont indépendants les uns des autres.

1. Calculer la probabilité pour que le joueur fasse au moins une fois le numéro 5.
2. Calculer la probabilité pour que dans les dix premiers lancers, il apparaisse au moins un multiple de 2 ET au moins un multiple de 3.
3. Calculer la probabilité pour que le joueur fasse « 6 » pour la première fois après un nombre pair de lancers.

★ Pour calculer la probabilité d'une intersection d'évènements, bien choisir entre le théorème de continuité décroissante, la formule des probabilités composées, la formule de Moivre et l'indépendance des évènements.

Exemple. On reprend la même expérience que dans l'exemple ci-dessus.

1. Calculer la probabilité pour que tous les numéros obtenus, dans cette série infinie de lancers, soient des entiers pairs.
2. Calculer la probabilité pour qu'il n'apparaisse jamais deux fois de suite le même numéro.

☢ Reconnaître le cadre d'utilisation du lemme de Borel-Cantelli ou de la loi du zéro-un de Borel.

Exemple. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées, ayant un moment d'ordre 1. On suppose : $\mathrm{P}(X_1 \neq 0) > 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} X_n$ diverge grossièrement presque sûrement et que la suite $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers 0.

Variables aléatoires discrètes.

✓ Reconnaître une loi de probabilité usuelle en identifiant une expérience type.

Exemples. Dans chacune des situations suivantes, donner la loi de probabilité de la variable X et préciser les paramètres de cette loi. Ne rien cocher s'il ne s'agit pas d'une loi usuelle.

1. Après avoir numéroté ses doigts de 1 à 10, un élève de MP* en choisit un au hasard pour le tremper dans un pot de Nutella. On note X le numéro du doigt choisi.
   ☐ Uniforme $\mathcal{U}(\ )$ ☐ Bernoulli $\mathcal{B}(\ )$ ☐ Binomiale $\mathcal{B}(\ ,\ )$ ☐ Géométrique $\mathcal{G}(\ )$
2. On note X le nombre de garçons d'une famille de 4 enfants.
   ☐ Uniforme $\mathcal{U}(\ )$ ☐ Bernoulli $\mathcal{B}(\ )$ ☐ Binomiale $\mathcal{B}(\ ,\ )$ ☐ Géométrique $\mathcal{G}(\ )$
3. On note X le nombre de voyelles dans un mot constitué de 8 lettres distinctes choisies au hasard dans l'alphabet (le mot n'a donc pas nécessairement de sens).
   ☐ Uniforme $\mathcal{U}(\ )$ ☐ Bernoulli $\mathcal{B}(\ )$ ☐ Binomiale $\mathcal{B}(\ ,\ )$ ☐ Géométrique $\mathcal{G}(\ )$
4. On forme un jury de 6 personnes choisies au hasard dans un groupe composé de 5 hommes et 4 femmes. On note X le nombre de femmes dans le jury.
   ☐ Uniforme $\mathcal{U}(\ )$ ☐ Bernoulli $\mathcal{B}(\ )$ ☐ Binomiale $\mathcal{B}(\ ,\ )$ ☐ Géométrique $\mathcal{G}(\ )$
5. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On choisit un animal au hasard dans cet enclos et l'on note X le nombre de bosses de cet animal.
   ☐ Uniforme $\mathcal{U}(\ )$ ☐ Bernoulli $\mathcal{B}(\ )$ ☐ Binomiale $\mathcal{B}(\ ,\ )$ ☐ Géométrique $\mathcal{G}(\ )$

6. Laurent possède tous les exemplaires de Picsou Magazine du numéro 1 au numéro 500. Il n'y a qu'une chance sur mille de trouver un article de football dans chaque numéro. Hyacinthe décide de les lire dans l'ordre pour s'occuper pendant les cours de probabilités. On note X le numéro du premier exemplaire où il trouve une information footballistique (avec $X = 0$ s'il n'en trouve pas).
   ☐ Uniforme $\mathcal{U}(\ )$ ☐ Bernoulli $\mathcal{B}(\ )$ ☐ Binomiale $\mathcal{B}(\ ,\ )$ ☐ Géométrique $\mathcal{G}(\ )$
7. On range au hasard 9 clés dans 3 tiroirs. Soit X le nombre de clés dans le premier tiroir.
   ☐ Uniforme $\mathcal{U}(\ )$ ☐ Bernoulli $\mathcal{B}(\ )$ ☐ Binomiale $\mathcal{B}(\ ,\ )$ ☐ Géométrique $\mathcal{G}(\ )$
8. Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire successivement et sans remise 10 boules de l'urne. On note X le nombre de boules vertes obtenues.
   ☐ Uniforme $\mathcal{U}(\ )$ ☐ Bernoulli $\mathcal{B}(\ )$ ☐ Binomiale $\mathcal{B}(\ ,\ )$ ☐ Géométrique $\mathcal{G}(\ )$
9. Seul 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles et on note X de nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.
   ☐ Uniforme $\mathcal{U}(\ )$ ☐ Bernoulli $\mathcal{B}(\ )$ ☐ Binomiale $\mathcal{B}(\ ,\ )$ ☐ Géométrique $\mathcal{G}(\ )$

✓ Reconnaître et utiliser l'inégalité de Markov ou de Bienaymé-Tchebychev.

Exemple. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. Déterminer un entier n tel que la probabilité de l'évènement : « la proportion de boules rouges obtenues est comprise entre 0,35 et 0,45 » soit strictement supérieure à 0,95.

✓ Obtenir la loi d'un couple de variables aléatoires et en déduire les lois marginales.

Exemple. Une urne contient une boule blanche et n boules noires. On tire successivement, avec remise, une boule dans l'urne (avec équiprobabilité), jusqu'à tomber sur la boule blanche. On note N le nombre de tirages qui furent nécessaires, et on tire cette fois une boule dans une urne contenant N boules noires et une boule blanche. On note X la variable aléatoire valant 1 si cette boule est noire, tandis qu'elle vaut 0 sinon. Montrer :

$$\mathrm{P}(X=1) = 1 - \frac{(n+1)\ln(n+1)-n}{n^2}, \text{ et : } \mathrm{P}(X=0) = \frac{(n+1)\ln(n+1)-n}{n^2}.$$

✓ Calculer $\mathrm{P}(X = n)$ à l'aide de $\mathrm{P}(X \geqslant n)$ ou $\mathrm{P}(X \leqslant n)$.

Exemple. On lance trois dés à six faces et équilibrés. Soient X la variable aléatoire donnant le maximum des trois numéros obtenus, et Y celle donnant le minimum des trois numéros obtenus. Donner les lois de probabilité de X et Y.

✓ Déduire d'une série génératrice la loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Exemple. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes *indépendantes* suivant une même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose : $Z = X + Y$. Calculer la série génératrice de Z, et en déduire sa loi de probabilité.

✓ Calculer l'espérance, la variance d'une variable aléatoire, soit lorsqu'on connaît sa loi, soit à l'aide du théorème de transfert.

Exemples.

1. On admet qu'il existe une variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{P}(X = n) = \dfrac{n-1}{2^n}$. Calculer son espérance.
2. Calculer $\mathrm{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$ lorsque $X \sim \mathcal{G}(p)$ ou $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

3. On propose le jeu suivant : on choisit un entier k, et on lance une pièce équilibrée jusqu'à tomber sur face : on note N la variable aléatoire donnant le nombre de lancers qui furent nécessaires. Le gain de ce jeu est alors 2^k, auquel on soustrait $10|k - N|$ (plus on est loin du résultat, et plus on perd de l'argent).

   Pour un entier k fixé, donner l'espérance du gain. Est-ce que ce jeu est rentable ?

★ Démontrer ou utiliser l'indépendance d'évènements ou de variables aléatoires dans un calcul.

Exemple. On lance deux dés équilibrés à six faces, et on note X et Y les variables aléatoires donnant les résultats de ces deux lancers.

1. Déterminer si les évènements « X pair » et $(X + Y = 12)$ sont indépendants.
2. Déterminer si les évènements « X pair » et « $X + Y$ pair » sont indépendants.
3. On pose $Z_1 = \max(X, Y)$ et $Z_2 = \min(X, Y)$. Déterminer si les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont indépendantes.

★ Étudier une variable aléatoire ou la probabilité d'un évènement en passant par des fonctions indicatrices adéquates.

Exemples.

1. Hyacinthe Guénoux s'entraîne au football et tire au but une infinité de fois. Les tirs sont supposés indépendants les uns des autres. On note p sa probabilité de marquer à chaque tir et pour tout entier $r \geqslant 1$, on note X_r la variable aléatoire donnant le nombre de tirs nécessaires pour que Hyacinthe atteigne son r^{e} but. Donner l'espérance et la variance de X_r pour tout $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On lance n fois un dé équilibré à six faces et on note X le nombre de numéros différents obtenus. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Soient A et B deux évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Montrer : $|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}$, et donner le cas d'égalité.
4. Soit X une variable aléatoire réelle discrète ayant un moment d'ordre 2. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a : $\mathrm{P}(X \geqslant \mathrm{E}(X) + \lambda) \leqslant \dfrac{\mathrm{V}(X)}{\mathrm{V}(X) + \lambda^2}$ (inégalité de Cantelli).

Espaces probabilisés, probabilités conditionnelles.

✓ Définir une probabilité, une loi de probabilité de variable aléatoire par son germe. ☐

Réponse. Il existe une telle probabilité P à la condition nécessaire et suffisante que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\lambda}{(n+1)2^n} \geqslant 0$, et : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda}{(n+1)2^n} = 1$. La première condition impose $\lambda \geqslant 0$, et pour la seconde on calcule d'abord la somme, en remarquant qu'il apparaît là une somme de série entière usuelle : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda}{(n+1)2^n} = 2\lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} = -2\lambda \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2\ln(2)\lambda$. Par conséquent, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda}{(n+1)2^n} = 1$ si et seulement si $\lambda = \frac{1}{2\ln(2)}$ (et c'est bien positif), et on en déduit qu'il existe une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(\{n\}) = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}\ln(2)}$.

✓ Dans une expérience avec une chronologie claire, utiliser la formule des probabilités composées. ☐

Réponse. Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note S_k l'évènement : « le k^{e} saut est un succès », de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a : $E_n = S_1 \cap \cdots \cap S_{n-1} \cap \overline{S_n}$. Alors, d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathrm{P}(E_n) = \mathrm{P}(S_1 \cap \cdots \cap S_{n-1} \cap \overline{S_n}) = \mathrm{P}(S_1) \times \mathrm{P}_{S_1}(S_2) \times \cdots \times \mathrm{P}_{S_1 \cap \cdots \cap S_{n-2}}(S_{n-1}) \times \mathrm{P}_{S_1 \cap \cdots \cap S_{n-1}}(\overline{S_n}).$$

Ce qui nous donne, d'après les données de l'énoncé :

$$\mathrm{P}(E_n) = 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n-1} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}.$$

La probabilité que le coureur échoue un jour est $\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} E_n\right)$. Tous ces évènements étant incompatibles, la propriété de σ-additivité implique :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{0!} - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 1,$$

en tant que somme télescopique. Le coureur est donc quasi-certain de finir par échouer.

✓ Reconnaître un contexte d'utilisation de la formule de Bayes. ☐

Réponse. Définissons les évènements G : « le RCS a gagné », N : « le RCS a fait match nul » et P : « le RCS a perdu ». Notons aussi E : « le professeur s'énerve ». La probabilité cherchée est $\mathrm{P}_E(P)$. D'après la formule de Bayes et celle des probabilités totales, appliquée au système complet d'évènements (G, N, P), on a :

$$\mathrm{P}_E(P) = \mathrm{P}_P(E)\frac{\mathrm{P}(P)}{\mathrm{P}(E)} = \mathrm{P}_P(E)\frac{\mathrm{P}(P)}{\mathrm{P}_G(E)\mathrm{P}(G) + \mathrm{P}_N(E)\mathrm{P}(N) + \mathrm{P}_P(E)\mathrm{P}(P)}.$$

D'après les données du problème, on en déduit :

$$\mathrm{P}_E(P) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{39}{100}}{\frac{34}{100}\frac{1}{10} + \frac{27}{100}\frac{1}{4} + \frac{39}{100}\frac{1}{2}} = \frac{390}{593} \approx 0{,}66.$$

✓ Ramener une chaîne de Markov à une étude de suite matricielle. ☐

Réponse.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, le système $(F_n, \overline{F_n})$ est un système complet d'évènements. En appliquant la formule des probabilités totales, on obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathrm{P}(F_{n+1}) = \mathrm{P}_{F_n}(F_{n+1})\mathrm{P}(F_n) + \mathrm{P}_{\overline{F_n}}(F_{n+1})\mathrm{P}(\overline{F_n}).$$

En utilisant les données de l'énoncé, cela devient : $\mathrm{P}(F_{n+1}) = \frac{1}{4}\mathrm{P}(F_n) + \frac{3}{4}\mathrm{P}(\overline{F_n})$. Or $\mathrm{P}(\overline{F_n}) = 1 - \mathrm{P}(F_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathrm{P}(F_{n+1}) = \frac{1}{4}\mathrm{P}(F_n) + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{P}(F_n) = -\frac{1}{2}\mathrm{P}(F_n) + \frac{3}{4}.$$

Ainsi $(\mathrm{P}(F_n))_{n \geqslant 0}$ est une suite arithmético-géométrique. On rappelle que pour la déterminer, on trouve d'abord le réel λ tel que : $\lambda = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{4}$; après résolution : $\lambda = \frac{1}{2}$. Alors, la suite $\left(\mathrm{P}(F_n) - \frac{1}{2}\right)_{n \geqslant 0}$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathrm{P}(F_{n+1}) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\mathrm{P}(F_n) + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\mathrm{P}(F_n) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{P}(F_n) - \frac{1}{2}\right).$$

On en déduit que la suite $\left(\mathrm{P}(F_n) - \frac{1}{2}\right)_{n \geqslant 0}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{P}(F_n) - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\mathrm{P}(F_1) - \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$. En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathrm{P}(F_n) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Quand $n \to +\infty$, la probabilité de fumer lors du n^{e} jour est asymptotiquement égale à $\frac{1}{2}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note A_n l'évènement : « A fait le n^{e} devoir », et on note semblablement B_n et C_n. On pose aussi, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_n = \mathrm{P}(A_n)$, $b_n = \mathrm{P}(B_n)$, $c_n = \mathrm{P}(C_n)$ et $X_n^\top = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ (j'écris un vecteur ligne par bête souci de place). Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La formule des probabilités totales, avec le système complet d'évènements (A_n, B_n, C_n) implique :

$$\mathrm{P}(A_{n+1}) = \mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathrm{P}(B_n)\mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathrm{P}(C_n)\mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{\mathrm{P}(B_n)}{3},$$

c'est-à-dire : $a_{n+1} = \frac{b_n}{3}$. De même : $b_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{3}$, $c_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{3} + c_n$. Matriciellement, ces trois égalités équivalent à : $X_{n+1} = AX_n$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $X_n = A^{n-1}X_1$, avec $X_1^\top = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ par hypothèse de l'énoncé. Le calcul des puissances de A est facile : on a $\chi_A = (X-1)(X-2/3)(X+1/3)$, qui est scindé et à racines simples, donc A est diagonalisable. Après diagonalisation explicite, on trouve pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$X_n = A^{n-1}X_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1/3)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & (2/3)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2^{n-1}+(-1)^n}{3^n} \\ \frac{2^n-(-1)^n}{3^n} \\ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Comme $X_n^\top = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$, on en déduit, par identification des coefficients :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3^n}, \quad b_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3^n}, \quad c_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

On remarque que $c_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, tandis que les deux autres probabilités convergent vers 0 : c'est assez évident, puisque C se chargera de tous les devoirs maisons dès lors qu'il s'y coltinera une première fois.

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La famille $(\mathrm{Z}_n, \mathrm{U}_n, \mathrm{D}_n, \mathrm{T}_n)$ est un système complet d'évènements. Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}_{n+1}) = \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{T}_{n+1} \cap \mathrm{Z}_n)}_{=0} + \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{T}_{n+1} \cap \mathrm{U}_n)}_{=0} + \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{T}_{n+1} \cap \mathrm{D}_n)}_{=0} + \mathrm{P}(\mathrm{T}_{n+1} \cap \mathrm{T}_n).$$

En effet, il est impossible d'augmenter le nombre de participants à chaque tir. Ensuite, en passant au conditionnement :

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{T}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{T}_n}(\mathrm{T}_{n+1}).$$

Or, pour qu'il y ait encore trois survivants après $n+1$ tirs, sachant que nous en avons trois après n tirs, il faut que tout le monde rate son tir (peu importe quelle cible est choisie par chaque joueur). Comme chaque tir est raté avec probabilité $\frac{1}{3}$, et que chaque tir est indépendant, on en déduit : $\mathrm{P}(\mathrm{T}_{n+1}) = \frac{1}{3^3}\mathrm{P}(\mathrm{T}_n)$.
De même, on trouve :

$$\mathrm{P}(\mathrm{D}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{D}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{D}_n}(\mathrm{D}_{n+1}) + \mathrm{P}(\mathrm{T}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{T}_n}(\mathrm{D}_{n+1}).$$

S'il reste deux joueurs en lice (D_n réalisé), il en reste deux après leurs $(n+1)^{\text{es}}$ tirs (D_{n+1} se réalise) si et seulement si les deux ratent leurs tirs, ce qui arrive avec probabilité $\mathrm{P}_{\mathrm{D}_n}(\mathrm{D}_{n+1}) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$. Pour passer de trois à deux joueurs, il y a plusieurs possibilités :

— deux joueurs ont la même cible, et au moins l'un des deux a réussi son tir, tandis que le joueur visé rate le sien (sinon il n'y aurait plus qu'un survivant) ;
— deux joueurs ont la même cible, puis ces deux joueurs ratent leurs tirs, tandis que le joueur visé réussit le sien ;
— tout le monde a une cible différente : en ce cas, il faut qu'un seul joueur ait visé juste, et que tous les autres aient raté (cela revient à compter un succès en trois épreuves de Bernoulli indépendantes).

Deux joueurs fixés ont probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ de choisir la même cible. Or il y a trois couples de deux joueurs à considérer ; il y a donc probabilité $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ que deux joueurs aient la même cible (notez qu'il est impossible que deux couples distincts de deux joueurs puissent choisir la même cible : si un joueur partage la même cible qu'un autre joueur, il s'agit nécessairement du troisième joueur en lice vu qu'on ne peut pas se viser soi-même, et donc ce troisième joueur ne partage pas de cible avec les autres ; ainsi on peut utiliser la σ-additivité). À l'inverse, il y a probabilité $\frac{1}{4}$ que tout le monde ait une cible différente. Après calculs dans chacun des cas (utiliser la formule des probabilités totales pour reconstituer la probabilité cherchée sans hypothèse sur les cibles choisies), on trouve alors : $\mathrm{P}_{\mathrm{T}_n}(\mathrm{D}_{n+1}) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{8}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{4} \times \binom{3}{1} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$. Au bout du compte, on a donc : $\mathrm{P}(\mathrm{D}_{n+1}) = \frac{1}{9}\mathrm{P}(\mathrm{D}_n) + \frac{1}{3}\mathrm{P}(\mathrm{T}_n)$.
Passons à la deuxième ligne :

$$\mathrm{P}(\mathrm{U}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{U}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{U}_n}(\mathrm{U}_{n+1}) + \mathrm{P}(\mathrm{D}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{D}_n}(\mathrm{U}_{n+1}) + \mathrm{P}(\mathrm{T}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{T}_n}(\mathrm{U}_{n+1}).$$

Si U_n est réalisé, alors par définition on voit que U_{n+1} aussi, donc : $\mathrm{P}_{\mathrm{U}_n}(\mathrm{U}_{n+1}) = 1$. Pour passer de deux joueurs (D_n réalisé) à un seul joueur, il faut et il suffit que l'un réussisse son tir et l'autre le rate, et il y a deux possibilités pour le choix du joueur qui réussit son tir. Donc : $\mathrm{P}_{\mathrm{D}_n}(\mathrm{U}_{n+1}) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.
Pour passer de trois joueurs à un seul, encore une fois, cela dépend des cibles choisies :

— si deux joueurs ont la même cible, il faut qu'au moins l'un des deux réussisse son tir, et que le joueur visé réussisse le sien aussi ;
— si tout le monde a une cible différente : il faut le succès de deux joueurs et l'échec du troisième (cela revient à compter deux succès en trois épreuves de Bernoulli indépendantes).

On en déduit, après calculs : $\mathrm{P}_{\mathrm{T}_n}(\mathrm{U}_{n+1}) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \binom{3}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$. Ainsi : $\mathrm{P}(\mathrm{U}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{U}_n) + \frac{4}{9}\mathrm{P}(\mathrm{D}_n) + \frac{5}{9}\mathrm{P}(\mathrm{T}_n)$.
Enfin :

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{Z}_n}(\mathrm{Z}_{n+1}) + \mathrm{P}(\mathrm{U}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{U}_n}(\mathrm{Z}_{n+1}) + \mathrm{P}(\mathrm{D}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{D}_n}(\mathrm{Z}_{n+1}) + \mathrm{P}(\mathrm{T}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{T}_n}(\mathrm{Z}_{n+1}).$$

On a clairement $\mathrm{P}_{\mathrm{Z}_n}(\mathrm{Z}_{n+1}) = 1$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{U}_n}(\mathrm{Z}_{n+1}) = 0$ (la partie s'arrête s'il ne reste qu'un survivant, donc leur nombre ne peut plus décroître).
Pour passer de deux joueurs à zéro, il suffit que les deux joueurs encore en lice réussissent leurs tirs, ce qui arrive avec probabilité $\mathrm{P}_{\mathrm{D}_n}(\mathrm{Z}_{n+1}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.
Pour passer de trois joueurs à zéro, il faut nécessairement que chaque joueur ait une cible différente (ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{4}$, on l'a justifié plus haut), et que tout le monde réussisse son tir. Donc : $\mathrm{P}_{\mathrm{T}_n}(\mathrm{Z}_{n+1}) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}$ (à noter qu'on pouvait aussi utiliser le fait d'avoir déjà déterminé toutes les autres probabilités conditionnelles que Z_{n+1}, et le fait que $(\mathrm{Z}_{n+1}, \mathrm{U}_{n+1}, \mathrm{D}_{n+1}, \mathrm{T}_{n+1})$ soit un système complet d'évènements, pour en déduire : $\mathrm{P}_{\mathrm{T}_n}(\mathrm{Z}_{n+1}) = 1 - (\mathrm{P}_{\mathrm{T}_n}(\mathrm{U}_{n+1}) + \mathrm{P}_{\mathrm{T}_n}(\mathrm{D}_{n+1}) + \mathrm{P}_{\mathrm{T}_n}(\mathrm{T}_{n+1})))$.
En conclusion : $\mathrm{P}(\mathrm{Z}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n) + \frac{4}{9}\mathrm{P}(\mathrm{D}_n) + \frac{2}{27}\mathrm{P}(\mathrm{T}_n)$.
Matriciellement, les quatre relations de récurrence obtenues donnent :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{Z}_{n+1}) \\ \mathrm{P}(\mathrm{U}_{n+1}) \\ \mathrm{P}(\mathrm{D}_{n+1}) \\ \mathrm{P}(\mathrm{T}_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{27} \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{27} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n) \\ \mathrm{P}(\mathrm{U}_n) \\ \mathrm{P}(\mathrm{D}_n) \\ \mathrm{P}(\mathrm{T}_n) \end{pmatrix}$$

d'où le système annoncé. Si l'on pose A la matrice carrée ci-dessus, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $X_{n+1} = AX_n$, et : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $X_n = A^{n-1}X_1$. On calcule les puissances de A *via* diagonalisation (les valeurs propres sont sur la diagonale, elles sont donc faciles à obtenir et on a même deux vecteurs propres : les deux premiers vecteurs de la base canonique), et on trouve pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{27^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{9^n}\right) & \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{9^{n-1}}\right) + \frac{2}{27^n} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{9^n}\right) & \frac{1}{4}\left(3 - \frac{1}{9^{n-1}}\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{27^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9^n} & \frac{9}{2}\left(\frac{1}{9^n} - \frac{1}{27^n}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{27^{n-1}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $X_1^\top = \begin{pmatrix} \frac{2}{27} & \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$ d'après les calculs faits plus haut (prendre $n = 1$, et utiliser le fait qu'en début de partie, il y ait trois joueurs en lice), on en déduit $X_n = A^{n-1}X_1$ pour tout entier $n \geqslant 1$, et donc :

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{9^{n-1}}\right) + \frac{2}{27^n},\ \mathrm{P}(\mathrm{U}_n) = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{1}{9^{n-1}}\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{27^n},\ \mathrm{P}(\mathrm{D}_n) = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{9^n} - \frac{1}{27^n}\right),\ \mathrm{P}(\mathrm{T}_n) = \frac{1}{27^n}.$$

On note, entre autres choses (grâce au théorème de continuité croissante), qu'il y a probabilité $\frac{1}{4}$ que le jeu de survie se termine sans survivant, probabilité $\frac{3}{4}$ qu'il se termine avec un survivant, et donc probabilité nulle qu'il dure éternellement.
Pour la question bonus, nous vous laissons démontrer que si X est la variable aléatoire donnant le nombre de tirs avant que la partie s'arrête, alors sa loi est donnée par $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{P}(X = n) = \frac{36}{9^n} - \frac{91}{27^n}$, tandis que l'espérance de X égale $\frac{297}{208} \approx 1{,}43$.

★ Pour calculer la probabilité d'une réunion d'évènements, bien choisir entre le théorème de continuité croissante, la σ-additivité, la formule de Moivre et l'indépendance des évènements. ☐

Réponse.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, notons A_n l'évènement : « le n^{e} lancer donne le numéro 5 ». Le joueur fait au moins une fois le numéro 5 si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que A_n se réalise, donc la probabilité cherchée est : $\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$. D'après le théorème de continuité croissante, on a :

$\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{N\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n\right)$. Calculons donc la probabilité que l'évènement $\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n$ se réalise (qui se réalise si et seulement s'il existe $n \in [\![1, N]\!]$ tel que A_n se réalise, c'est-à-dire : si et seulement si le numéro 5 apparaît dans les N premiers lancers). Pour cela, il est plus facile de s'intéresser à la probabilité de l'évènement complémentaire $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n} = \bigcap\limits_{n=1}^{N} \overline{A_n}$, qui est l'évènement : « le numéro 5 n'apparaît jamais dans les N premiers lancers ». Comme il a probabilité $\frac{5}{6}$ de ne pas apparaître à chaque lancer, l'indépendance des lancers donne : $\mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{N} \overline{A_n}\right) = \prod\limits_{n=1}^{N} \mathrm{P}(\bar{A_n}) = \left(\frac{5}{6}\right)^N$. On a donc :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(1 - \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} \overline{A_n}\right)\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N\right) = 1.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ Notons B_n et C_n les évènements respectifs : « avoir un multiple de 2 au n^{e} lancer » (c'est-à-dire : 2, 4 ou 6) et « avoir un multiple de 3 au n^{e} lancer » (c'est-à-dire : 3 ou 6). La probabilité cherchée est alors : $\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{10} B_n \cap \bigcup\limits_{n=1}^{10} C_n\right)$. Il y a beaucoup trop de résultats dans $\bigcup\limits_{n=1}^{10} B_n \cap \bigcup\limits_{n=1}^{10} C_n$, et nous diminuons la difficulté en passant au complémentaire, puis en utilisant la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{10} B_n \cap \bigcup_{n=1}^{10} C_n\right) &= 1 - \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{10} \overline{B_n} \cup \bigcap_{n=1}^{10} \overline{C_n}\right)\\ &= 1 - \left(\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{10} \overline{B_n}\right) + \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{10} \overline{C_n}\right) - \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{10} \overline{B_n} \cap \bigcap_{n=1}^{10} \overline{C_n}\right)\right).\end{aligned}$$

Il est plus facile de calculer ces probabilités : $\overline{B_n}$ est l'évènement « ne pas avoir un multiple de 2 au n^{e} lancer » (c'est-à-dire : avoir 1, 3 ou 5), et c'est un évènement de probabilité $\frac{1}{2}$. Comme les lancers sont indépendants, on en déduit : $\mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{10} \overline{B_n}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$. Par un argument analogue : $\mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{10} \overline{C_n}\right) = \left(\frac{4}{6}\right)^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$. Enfin, on note que l'évènement $B_n \cap C_n$ se réalise si et seulement si le n^{e} lancer donne 1 ou 5 (les seuls numéros entre 1 et 6 à ne pas être un multiple de 2 ni de 3), donc il se réalise avec probabilité $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Par indépendance des lancers, on a donc : $\mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{10} \overline{B_n} \cap \bigcap\limits_{n=1}^{10} \overline{C_n}\right) = \prod\limits_{n=1}^{10} \mathrm{P}\left(\overline{B_n} \cap \overline{C_n}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$.
En conclusion : $\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{10} B_n \cap \bigcup\limits_{n=1}^{10} C_n\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} - \left(\frac{2}{3}\right)^{10} + \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \approx 0{,}98$.

3. Si, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note D_n l'évènement : « le premier numéro 6 est obtenu au n^{e} lancer », alors la probabilité cherchée est $\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} D_{2n}\right)$. Ces évènements sont clairement incompatibles (on ne peut pas avoir son *premier* numéro 6 à deux lancers différents), donc par σ-additivité : $\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} D_{2n}\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(D_{2n})$. Il reste à calculer $\mathrm{P}(D_{2n})$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Pour cela, on note que D_{2n} se réalise si et seulement nous avons d'abord $2n-1$ fois un numéro différent de 6 (ce qui se produit avec probabilité $\frac{5}{6}$), puis le numéro 6 au $2n^{\text{e}}$ lancer (ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{6}$). Les lancers étant indépendants les uns des autres, on en déduit : $\mathrm{P}(D_{2n}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-1} \times \frac{1}{6}$ (on pourrait aussi obtenir cette probabilité en introduisant une variable aléatoire de loi géométrique, de paramètre $\frac{1}{6}$). En conclusion :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_{2n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(D_{2n}) = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-1} \overset{[n'=n-1]}{=} \frac{5}{6^2}\sum_{n'=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n'} = \frac{5}{6^2} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{11}.$$

On note que contrairement à l'intuition, on n'obtient pas $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire autant de chance que le premier numéro 6 soit après un nombre pair ou impair de lancers). Ce biais est lié au fait que le *premier* lancer soit un nombre impair de lancers ; or, si nous avons 6 au premier lancer, l'évènement

$\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_{2n}$ n'a « même pas eu sa chance » de se voir être réalisé, ce qui donne un (léger) avantage aux nombres impairs de lancers.

★ Pour calculer la probabilité d'une intersection d'évènements, bien choisir entre le théorème de continuité décroissante, la formule des probabilités composées, la formule de Moivre et l'indépendance des évènements. ☐

Réponse.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, notons A_n l'évènement : « le n^{e} numéro obtenu est un entier pair ». La probabilité cherchée est alors : $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$. D'après le théorème de continuité décroissante, on a : $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)$. Or il est clair que A_n a probabilité $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ d'advenir pour tout n, et les lancers étant indépendants, on a pour tout entier $N \geqslant 1$, $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^N$. Donc : $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^N = 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, notons B_n l'évènement : « le n^{e} numéro obtenu est différent du $(n-1)^{\text{e}}$ ». La probabilité cherchée est alors : $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} B_n\right)$. D'après le théorème de continuité décroissante, on a : $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=2}^{N} B_n\right)$. Pour calculer cette probabilité, il n'est pas clair qu'on puisse parler d'indépendance des évènements : *a priori*, B_n dépend du lancer précédent, et donc éventuellement de B_{n-1}. En revanche on peut utiliser la formule des probabilités composées, pour écrire : $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=2}^{N} B_n\right) = \mathrm{P}(B_2) \prod_{n=3}^{N} \mathrm{P}_{\left(\bigcap_{i=2}^{n-1} B_i\right)}(B_n)$. Ensuite, à chaque étape, pour que B_n se réalise sachant $\bigcap_{i=2}^{n-1} B_i$, il faut simplement « éviter » la valeur du $(n-1)^{\text{e}}$ lancer, ce qui laisse cinq possibilités sur six. On en déduit :
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=2}^{N} B_n\right) = \mathrm{P}(B_2) \prod_{n=3}^{N} \mathrm{P}_{\left(\bigcap_{i=2}^{n-1} B_i\right)}(B_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{N-1}.$$
En conclusion : $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-1} = 0$.

☢ Reconnaître le cadre d'utilisation du lemme de Borel-Cantelli ou de la loi du zéro-un de Borel. ☐

Réponse. On va utiliser l'hypothèse sur $\mathrm{P}(X_1 \neq 0) > 0$ pour montrer l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que : $\mathrm{P}\left(\limsup\left(X_n > \varepsilon\right)\right) = 1$, ce qui suffirait à montrer la divergence grossière presque sûrement (en effet, s'il existe une infinité d'entiers n tels que : $X_n > \varepsilon$, alors il existe en particulier une suite extraite qui ne converge pas vers 0 et donc $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers 0, presque sûrement). Nous allons le déduire de la loi du zéro-un de Borel (qu'il faut bien sûr savoir redémontrer si l'on veut s'en servir).

Comme X_1 prend des valeurs strictement positives presque sûrement (par hypothèse de l'énoncé), il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\mathrm{P}(X_1 > \varepsilon) > 0$. Comme les X_n ont même loi, on a aussi : $\mathrm{P}(X_n > \varepsilon) = \mathrm{P}(X_1 > \varepsilon)$, pour un tel choix de ε. On en déduit : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_n > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_1 > \varepsilon) = +\infty$. Comme, de plus, les évènements $(X_n > \varepsilon)$ sont tous indépendants (par indépendance des variables aléatoires X_n), la loi du zéro-un de Borel affirme : $\mathrm{P}\left(\limsup\left(X_n > \varepsilon\right)\right) = 1$, d'où le résultat.

Pour la seconde partie de la question : l'évènement A : « la suite $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 » s'écrit : $A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{n\geqslant N} \left(\frac{X_n}{n} < \frac{1}{k}\right)$, par définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{k}$ pour tout k (ce qui démontre d'ailleurs que c'est effectivement un évènement). Pour montrer que A est un évènement presque sûr, il suffit donc de démontrer que chacun des évènements $\bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{n \geqslant N} \left(\frac{X_n}{n} < \frac{1}{k}\right)$ est presque sûr. Or son complémentaire est négligeable, puisque : $\overline{\bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{n \geqslant N} \left(\frac{X_n}{n} < \frac{1}{k}\right)} = \limsup_n \left(\frac{X_n}{n} \geqslant \frac{1}{k}\right)$, et la série $\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{P}\left(X_n \geqslant \frac{n}{k}\right) = \sum_{n \geqslant 1} \mathrm{P}\left(kX_1 \geqslant n\right)$ converge puisque l'hypothèse d'espérance finie sur X_1 assure qu'il en est de même de $\lfloor kX_1 \rfloor$ par comparaison, or :

$$\mathrm{E}\left(\lfloor kX_1 \rfloor\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}\left(\lfloor kX_1 \rfloor \geqslant n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}\left(kX_1 \geqslant n\right),$$

donc la finitude de cette espérance implique la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{P}\left(kX_1 \geqslant n\right)$. Par le lemme de Borel-Cantelli : $\mathrm{P}\left(\overline{\bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{n \geqslant N} \left(\frac{X_n}{n} < \frac{1}{k}\right)}\right) = \mathrm{P}\left(\limsup_n \left(\frac{X_n}{n} \geqslant \frac{1}{k}\right)\right) = 0$, et donc en repassant au complémentaire : l'évènement A est une intersection dénombrable d'évènements presque sûrs : il est presque sûr également.

Variables aléatoires discrètes.

✓ Reconnaître une loi de probabilité usuelle en identifiant une expérience type. ☐

Réponse.

1. On a $X \sim \mathcal{U}\left(\frac{1}{10}\right)$.
2. On a $X \sim \mathcal{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$ (en supposant qu'avoir un garçon ou une fille est équiprobable).
3. On a $X \sim \mathcal{B}\left(8, \frac{3}{13}\right)$ (je compte y comme une voyelle, il y en a donc 6).
4. On a $X \sim \mathcal{B}\left(6, \frac{4}{9}\right)$.
5. Cette variable aléatoire n'est pas usuelle.
6. Cette variable aléatoire n'est pas usuelle, sauf si on considère que le nombre d'exemplaires est si grand qu'on peut l'approcher par l'infini. En ce cas, on a $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{1000}\right)$.
7. On a $X \sim \mathcal{B}\left(9, \frac{1}{3}\right)$.
8. Cette variable aléatoire n'est pas usuelle. (C'est en fait une variable de loi hypergéométrique de paramètre 10, $\frac{3}{7}$ et 14.)
9. On a $X \sim \mathcal{B}\left(100, \frac{1}{100}\right)$. L'approximation $X \sim \mathcal{P}(1)$ serait aussi pertinente.

✓ Reconnaître et utiliser l'inégalité de Markov ou de Bienaymé-Tchebychev. ☐

Réponse. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges obtenues dans l'expérience ; on a $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{5}\right)$, et on nous demande de résoudre l'inégalité :

$$\mathrm{P}\left(0{,}35 \leqslant \frac{X}{n} \leqslant 0{,}45\right) > \frac{95}{100} = \frac{19}{20}.$$

Notons que $\mathrm{E}(X) = \frac{2n}{5} = 0{,}4n$, donc la probabilité du membre de gauche est aussi égale à $\mathrm{P}\left(-0{,}5 \leqslant \frac{X-\mathrm{E}(X)}{n} \leqslant 0{,}5\right)$, et il s'agit donc de résoudre :

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right)\right| < \frac{1}{20}\right) > \frac{19}{20} \Leftrightarrow 1 - \mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right)\right| \geqslant \frac{1}{20}\right) > \frac{19}{20} \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right)\right| \geqslant \frac{1}{20}\right) < \frac{1}{20}.$$

Or l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que :

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right)\right| \geqslant \frac{1}{20}\right) \leqslant \frac{\mathrm{V}\left(\frac{X}{n}\right)}{(1/20)^2} = \frac{400\mathrm{V}(X)}{n^2} = \frac{400}{n^2} \cdot n \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{96}{n}.$$

Par conséquent, pour répondre à la question il suffit de trouver $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que : $\frac{96}{n} < \frac{1}{20}$. L'entier $n = 96 \times 20 + 1 = 1921$ convient.

✓ Obtenir la loi d'un couple de variables aléatoires et en déduire les lois marginales. ☐

Réponse. La loi conjointe de N et X est facile à obtenir. En effet, N suit une loi de probabilité géométrique de paramètre $\frac{1}{n+1}$. Attention à ne pas dire que X suit une loi de Bernoulli : le nombre de boules au deuxième tirage peut changer à chaque expérience, donc le paramètre n'est pas constant. Par contre, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la loi conditionnelle de X SACHANT $(N = k)$ est une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$ (puisque le succès, « tirer une boule noire », arrive avec probabilité $\frac{k}{k+1}$ s'il y a k boules noires et $k+1$ boules en tout). On en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathrm{P}(N = k, X = 1) = \mathrm{P}(N = k)\mathrm{P}_{(N=k)}(X = 1) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{k-1} \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1}\right),$$

et de même : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{P}(N = k, X = 0) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{k-1} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{k+1}$. On en déduit la loi de X grâce à la formule des probabilités totales, utilisée avec le système complet d'évènements $((N = k))_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$. On a $X(\Omega) = \{0,1\}$, donc il suffit de calculer $\mathrm{P}(X = 1)$ pour obtenir $\mathrm{P}(X = 0)$ par passage au complémentaire. On obtient dans le premier cas :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X = 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(N = k, X = 1) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-1} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k+1}}{k+1}\right).\end{aligned}$$

Nous avons là deux développements en série entière usuels. On sait en effet que pour tout $x \in]-1,1[$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x^{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} - x = -\ln(1-x) - x.$$

En posant $x = \frac{n}{n+1} \in]0,1[$, on a donc :

$$\mathrm{P}(X = 1) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{1 - \frac{n}{n+1}} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \left(-\ln\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) - \frac{n}{n+1}\right)\right) = 1 + \frac{n+1}{n^2}\ln\left(\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n}.$$

C'est-à-dire : $\mathrm{P}(X = 1) = 1 - \frac{(n+1)\ln(n+1) - n}{n^2}$. L'égalité $\mathrm{P}(X = 0) = 1 - \mathrm{P}(X = 1)$ nous permet alors de conclure :

$$\mathrm{P}(X = 1) = 1 - \frac{(n+1)\ln(n+1) - n}{n^2}, \text{ et : } \mathrm{P}(X = 0) = \frac{(n+1)\ln(n+1) - n}{n^2}.$$

✓ Calculer $\mathrm{P}(X = n)$ à l'aide de $\mathrm{P}(X \geqslant n)$ ou $\mathrm{P}(X \leqslant n)$. ☐

Réponse. On a clairement $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$. Ensuite, soit $k \in [\![1,6]\!]$. Il est plus facile de calculer $\mathrm{P}(X \leqslant k)$ plutôt que $\mathrm{P}(X = k)$ directement ; en effet, si l'on note D_1, D_2 et D_3 les résultats des trois dés, alors $X = \max(D_1, D_2, D_3)$, et $(X \leqslant k)$ se réalise si et seulement si D_1, D_2 et D_3 sont tous inférieurs ou égaux à k. L'indépendance des lancers permet alors d'en déduire :

$$\mathrm{P}(X \leqslant k) = \mathrm{P}(D_1 \leqslant k, D_2 \leqslant k, D_3 \leqslant k) = \mathrm{P}(D_1 \leqslant k)\mathrm{P}(D_2 \leqslant k)\mathrm{P}(D_3 \leqslant k).$$

Or les lois de probabilité de D_1, D_2 et D_3 sont uniformes de paramètre 6, donc les trois probabilités ci-dessus sont égales à $\frac{\mathrm{card}([\![1,k]\!])}{6} = \frac{k}{6}$. Ainsi : $\mathrm{P}(X \leqslant k) = \left(\frac{k}{6}\right)^3$. Le résultat vaut aussi si $k = 0$, ce qui évitera une distinction de cas fastidieuse ci-dessous.

Il reste à remarquer que $(X = k) = (X \leqslant k) \setminus (X \leqslant k-1)$, de sorte que :

$$\forall k \in [\![1,6]\!], \quad \mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(X \leqslant k) - \mathrm{P}(X \leqslant k-1) = \left(\frac{k}{6}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^3.$$

Pour Y on procède de même, mais en remarquant cette fois-ci que $(Y \geqslant k) = (D_1 \geqslant k) \cap (D_2 \geqslant k) \cap (D_3 \geqslant k)$ (se convaincre que $(Y \leqslant k)$ ne s'exprime pas facilement à l'aide de D_1, D_2 et D_3), si bien que :

$$\mathrm{P}(Y \geqslant k) = \left(\frac{\operatorname{card}([\![k,6]\!])}{6}\right)^3 = \left(\frac{6-(k-1)}{6}\right)^3.$$

Il reste à remarquer que $(Y = k) = (Y \geqslant k) \setminus (Y \geqslant k+1)$, de sorte que :

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1,6]\!], \quad \mathrm{P}(Y = k) = \mathrm{P}(Y \geqslant k) - \mathrm{P}(Y \geqslant k+1) &= \left(\frac{6-(k-1)}{6}\right)^3 - \left(\frac{6-(k+1-1)}{6}\right)^3 \\ &= \left(\frac{7-k}{6}\right)^3 - \left(\frac{6-k}{6}\right)^3.\end{aligned}$$

✓ Déduire d'une série génératrice la loi de probabilité d'une variable aléatoire. ☐

Réponse. Puisque Z est la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a : $G_Z = G_X \cdot G_Y$. Or $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$, donc leurs fonctions génératrices sont les mêmes, égales à $t \mapsto \dfrac{t}{2-t}$. On en déduit :

$$\forall t \in]-2,2[, \quad G_Z(t) = \frac{t^2}{(2-t)^2} = \frac{t^2}{4\left(1-\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{t^2}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{t}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}t^{n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{2^n}t^n,$$

en développant en série entière la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, comme rappelé à plusieurs reprises dans le document *Méthodes* et ailleurs. On en déduit que la loi de probabilité de Z est donnée par : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{P}(Z = n) = \dfrac{n-1}{2^n}$ et $\mathrm{P}(Z = 0) = 0$.

✓ Calculer l'espérance, la variance d'une variable aléatoire, soit lorsqu'on connaît sa loi, soit à l'aide du théorème de transfert. ☐

Réponse.

1. Tout d'abord, notons que l'existence d'une telle variable aléatoire est avérée. Il suffit, pour cela, de noter que $\dfrac{n-1}{2^n} \geqslant 0$ pour tout entier naturel non nul n, et qu'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{2^n} = 1$. On le démontre en dérivant la somme de la série géométrique, et en l'évaluant en $\dfrac{1}{2}$: écrire les détails. On peut définir une loi de probabilité de variable aléatoire par son germe dès que ces deux conditions sont requises, d'où l'existence de X.

   La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$ est de rayon de convergence 1, donc sa série dérivée (deux fois) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2}$ est aussi de rayon de convergence 1. On en déduit d'une part que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n(n-1)}{2^n}$ converge (on a en effet $\frac{1}{2} \in]-1,1[$), et de plus, en dérivant deux fois :

   $$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

   On en déduit :

   $$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{2^n} = \frac{1}{4}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 4.$$

2. Comme $\frac{1}{X+1}$ est positive dans les deux cas, son espérance peut être calculée directement. On a, par le théorème de transfert : $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \frac{1}{x+1}\mathrm{P}(X=x)$. Supposons $X \sim \mathcal{G}(p)$. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\mathrm{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(1-p)^{n-1}}{n+1} &= p(1-p)^{-2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^{n+1}}{n+1}\\ &= p(1-p)^{-2}\left(-\ln(1-(1-p))-(1-p)\right)\\ &= p(1-p)^{-2}\left(-\ln(p)-(1-p)\right).\end{aligned}$$

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors :

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\mathrm{P}(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}}{n+1}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n+1)!} = e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{n!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right).$$

3. Soit G le gain du joueur. Au vu des données de l'énoncé, on a $G = 2^k - 10\cdot|k-N|$. Donc, par linéarité de l'espérance : $\mathrm{E}(G) = 2^k - 10\mathrm{E}(|k-N|)$ (cette espérance existe car $|k-N|$ est positif). Or cette dernière espérance est celle d'une fonction de N, et on va donc la calculer avec le théorème de transfert. Notons qu'on a : $N \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$. D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(|k-N|) &= \sum_{n=1}^{+\infty}|k-n|\mathrm{P}(N=n)\\ &= \sum_{n=1}^{k-1}(k-n)\mathrm{P}(N=n) + \sum_{n=k+1}^{+\infty}(n-k)\mathrm{P}(N=n)\\ &= k\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{k-1}\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{n'=0}^{+\infty}\frac{n'+1}{2^{n'+k+1}} && (n' = n-(k+1))\\ &= k\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right) - \sum_{n=1}^{k-1}\frac{n}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2^n}\end{aligned}$$

Nous savons calculer ces sommes *via* dérivation de sommes géométriques. Nous devons simplement faire attention parce qu'elles ne vont pas toutes de 0 à l'infini.
La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$ est de rayon de convergence 1, donc sa somme est de classe C^∞ et dérivable terme à terme sur $]-1,1[$. En le faisant, on obtient : $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Notons que la somme de gauche peut aussi s'écrire : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$. En posant $x=\frac{1}{2}$, on en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2^n} = 4.$$

De même (mais sans avoir besoin d'invoquer des séries entières, vu que la somme est finie), on dérive la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\quad \sum_{n=0}^{k-1} x^n = \frac{1-x^k}{1-x},$$

et on pose $x = \frac{1}{2}$, pour obtenir : $\displaystyle\sum_{n=1}^{k-1}\frac{n}{2^n} = 2 - \frac{1+k}{2^{k-1}}$. En conclusion :

$$\mathrm{E}(|k-N|) = k\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right) - \left(2-\frac{k+1}{2^{k-1}}\right) + \frac{1}{2^{k-1}} = k-2+\frac{1}{2^{k-2}}.$$

Notons que même si ce n'était pas évident *a priori*, toutes les expressions trouvées valent aussi pour $k=1$. Le gain moyen est alors : $\mathrm{E}(G) = 2^k - 10\left(k-2+\frac{1}{2^{k-2}}\right)$. C'est positif dès que $k \geqslant 5$.

✓ Démontrer ou utiliser l'indépendance d'évènements ou de variables aléatoires dans un calcul. ☐

Réponse. Par hypothèse, on a : $X \sim \mathcal{U}(6)$, et : $Y \sim \mathcal{U}(6)$.

1. Intuitivement, ils ne sont pas indépendants : si l'on sait que X est pair, alors la probabilité que X soit égal à 6 devient plus élevée, et donc la probabilité que $X+Y$ soit égal à 12 aussi.
   Formalisons. Posons $\mathscr{P} = \{2{,}4{,}6\}$, et calculons $\mathrm{P}(X+Y=12)\mathrm{P}(X \in \mathscr{P})$ et $\mathrm{P}((X+Y=12) \cap (X \in \mathscr{P}))$. On a $\mathrm{P}(X+Y=12) = \mathrm{P}(X=6, Y=6) = \mathrm{P}(X=6)\mathrm{P}(Y=6)$ (car X et Y sont *a priori* indépendants), donc $\mathrm{P}(X+Y=12) = \frac{1}{6^2}$. De plus : $\mathrm{P}(X \in \mathscr{P}) = \frac{\operatorname{card}(\mathscr{P})}{6} = \frac{1}{2}$ (puisqu'il s'agit d'une loi de probabilité uniforme de paramètre 6). On a donc :
$$\mathrm{P}(X+Y=12)\mathrm{P}(X \in \mathscr{P}) = \frac{1}{2 \cdot 6^2} = \frac{1}{72}.$$
   Par contre :
$$\mathrm{P}((X+Y=12) \cap (X \in \mathscr{P})) = \mathrm{P}(X=6 \cap Y=6 \cap (X \in \mathscr{P})) = \mathrm{P}(X=6 \cap Y=6) = \mathrm{P}(X=6)\mathrm{P}(Y=6)$$
   (si $X=6$, alors X est nécessairement pair, donc cet évènement est redondant), donc :
$$\mathrm{P}((X+Y=12) \cap (X \in \mathscr{P})) = \frac{1}{6^2} \neq \mathrm{P}(X+Y=12)\mathrm{P}(X \in \mathscr{P}).$$
   En conclusion, les évènements $(X \in \mathscr{P})$ et $(X+Y=12)$ ne sont pas indépendants.
2. On a $\mathrm{P}(X \in \mathscr{P}) = \frac{1}{2}$, comme on l'a vu. Pour que $X+Y$ soit pair, il suffit que X et Y aient même parité : il y a pour cela une chance sur deux (formalisez-le, avec la formule des probabilités totales par exemple, en utilisant pour système complet d'évènements $((X \in \mathscr{P}), (X \notin \mathscr{P}))$), donc $\mathrm{P}(X+Y \in \mathscr{P}) = \frac{1}{2}$. Ainsi :
$$\mathrm{P}(X \in \mathscr{P})\mathrm{P}(X+Y \in \mathscr{P}) = \frac{1}{2^2}.$$
   Pour calculer $\mathrm{P}((X \in \mathscr{P}) \cap (X+Y \in \mathscr{P}))$, on remarque que :
$$(X \in \mathscr{P}) \cap (X+Y \in \mathscr{P}) = (X \in \mathscr{P}) \cap (Y \in \mathscr{P}).$$
   En effet, $Y = (Y+X) - X$, donc $X+Y$ et X sont pairs si et seulement si X et Y sont pairs. Comme X et Y sont indépendantes, on en déduit : $\mathrm{P}((X \in \mathscr{P}) \cap (X+Y \in \mathscr{P})) = \mathrm{P}(X \in \mathscr{P})\mathrm{P}(Y \in \mathscr{P}) = \frac{1}{2^2}$. Ainsi :
$$\mathrm{P}(X \in \mathscr{P})\mathrm{P}(X+Y \in \mathscr{P}) = \mathrm{P}((X \in \mathscr{P}) \cap (X+Y \in \mathscr{P})),$$
   donc les évènements $(X \in \mathscr{P})$ et $(X+Y \in \mathscr{P})$ sont indépendants.
   Cela peut paraître contre-intuitif, dans la mesure où la parité de X influe implicitement sur celle de $X+Y$. L'indépendance ne tient qu'au fait qu'il y a autant d'entiers pairs et impairs dans $[\![1{,}6]\!]$, de sorte qu'au fond, rien ne change pour Y : que l'on sache la parité de X ou non, il y a toujours la moitié exactement des résultats possibles pour Y qui réalise l'évènement voulu. La conclusion de cette question aurait été différente si X et Y avaient été à valeurs dans $[\![1{,}7]\!]$, par exemple.
3. Comme on doit avoir $Z_1 \geqslant Z_2$ nécessairement, elles ne sont intuitivement pas indépendantes. Montrons-le : par l'argument qu'on vient de donner, on a : $\mathrm{P}(Z_1=1, Z_2=2) = 0$. Or on a : $\mathrm{P}(Z_1=1)\mathrm{P}(Z_2=2) \neq 0$: en effet, $\mathrm{P}(Z_1=1) = \mathrm{P}(X=1, Y=1) = \mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=1) = \frac{1}{6^2}$ (car X et Y sont indépendantes), et comme $(X=2, Y=2)$ implique $(Z_2=2)$ on a : $\mathrm{P}(Z_2=2) \geqslant \mathrm{P}(X=2, Y=2) = \frac{1}{6^2}$, donc finalement : $\mathrm{P}(Z_1=1)\mathrm{P}(Z_2=2) \geqslant \frac{1}{6^4} > 0$. L'égalité $\mathrm{P}(Z_1=1, Z_2=2) = \mathrm{P}(Z_1=1)\mathrm{P}(Z_2=2)$ est donc fausse, ce qui prouve que Z_1 et Z_2 ne sont pas indépendantes.
   Remarque. On peut calculer $\mathrm{P}(Z_1=k, Z_2=\ell)$ et $\mathrm{P}(Z_1=k)\mathrm{P}(Z_2=\ell)$ pour tous k et ℓ : c'est un bon exercice. En reprenant le raisonnement du *Savoir-faire* précédent, mais avec deux dés au lieu de trois, on trouve facilement :
$$\forall k \in [\![1{,}6]\!], \quad \mathrm{P}(Z_1=k) = \left(\frac{k}{6}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^2, \quad \mathrm{P}(Z_2=k) = \left(\frac{7-k}{6}\right)^2 - \left(\frac{6-k}{6}\right)^2$$

La loi conjointe de Z_1 et Z_2 est relativement facile à calculer : pour que $(Z_1 = k, Z_2 = \ell)$ se réalise, une condition nécessaire est $k \geqslant \ell$ (vu que $Z_1 \geqslant Z_2$) ; ensuite, il faut et il suffit d'avoir $X = k$ et $Y = \ell$ ou inversement (le cas d'égalité $k = \ell$ donne un résultat légèrement différent, car il n'y a pas à considérer « ou inversement »). Or :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,6]\!]^2, \quad \mathrm{P}(X = k, Y = \ell) = \mathrm{P}(X = k)\mathrm{P}(Y = \ell) = \frac{1}{6^2}$$

(on utilise l'indépendance de X et Y, et le fait que ce soient des variables aléatoires de loi uniforme). Donc :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,6]\!]^2, \quad \mathrm{P}(Z_1 = k, Z_2 = \ell) = \begin{cases} \frac{1}{18} & \text{si } k > \ell, \\ \frac{1}{36} & \text{si } k = \ell, \\ 0 & \text{si } k < \ell. \end{cases}$$

★ Étudier une variable aléatoire ou la probabilité d'un évènement en passant par des fonctions indicatrices adéquates, des sommes de variables usuelles simples. ☐

Réponse.

1. Soit $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a : $X_r = X_1 + \sum_{i=1}^{r-1} (X_{i+1} - X_i)$, et les variables aléatoires X_1 et $X_{i+1} - X_i$, pour $i \in [\![1, r-1]\!]$ forment une famille de variables aléatoires indépendantes (puisque $X_{i+1} - X_i$ ne concerne que les tirs entre le i^{e} et le $(i+1)^{\mathrm{e}}$ but : il faudrait le formaliser, idéalement en introduisant des variables aléatoires de Bernoulli correspondant à l'observation de buts à chaque tir : ce qui n'est pas difficile mais un peu technique à écrire), et elles suivent toutes une loi géométrique de paramètre p. On connaît donc leurs espérances et variances.

   Par linéarité de l'espérance, on en déduit : $\mathrm{E}(X_r) = \mathrm{E}(X_1) + \sum_{i=1}^{r-1} \mathrm{E}(X_{i+1} - X_i) = \dfrac{r}{p}$. Pour la variance, l'indépendance permet d'écrire : $\mathrm{V}(X_r) = \mathrm{V}(X_1) + \sum_{i=1}^{r-1} \mathrm{V}(X_{i+1} - X_i) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.

   Remarque. La variable aléatoire X_r suit une loi de Pascal de paramètre (r, p).

2. Pour tout $i \in [\![1,6]\!]$, on note A_i l'évènement : « la face i est apparue au moins une fois ». On note que $\mathrm{P}(A_i) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A_i}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, donc : $\mathbb{1}_{A_i} \sim \mathcal{B}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$, pour tout $i \in [\![1,6]\!]$. Or : $X = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{1}_{A_i}$, donc par linéarité de l'espérance : $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} \mathrm{E}(\mathbb{1}_{A_i}) = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$. Pour la variance, il faut un peu plus travailler car les A_i ne sont pas tous indépendants (le calcul de covariance qui va suivre le prouvera d'ailleurs). On a :

$$\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{6} \mathrm{V}(\mathbb{1}_{A_i}) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}) = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}).$$

   Soient i et j distincts dans $[\![1,6]\!]$. Calculons $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j})$. On a :

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}) = \mathrm{E}(\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{A_j}) - \mathrm{E}(\mathbb{1}_{A_i})\mathrm{E}(\mathbb{1}_{A_j}) = \mathrm{E}(\mathbb{1}_{A_i \cap A_j}) - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^2.$$

   Déterminons l'espérance de $\mathbb{1}_{A_i \cap A_j}$, qui suit une loi de Bernoulli, en déterminant la probabilité qu'elle soit égale à 1. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) &= \mathrm{P}(A_i) + \mathrm{P}(A_j) - \mathrm{P}(A_i \cup A_j) \\ &= \mathrm{P}(A_i) + \mathrm{P}(A_j) - \left(1 - \mathrm{P}(\overline{A_i \cup A_j})\right) \\ &= \mathrm{P}(A_i) + \mathrm{P}(A_j) + \mathrm{P}(\overline{A_i} \cap \overline{A_j}) - 1. \end{aligned}$$

Toutes ces probabilités sont simplifiables. Les deux premières ont été calculées plus haut. La troisième se calcule semblablement (c'est la probabilité que les numéros i et j ne sortent pas en n lancers : cela se produit avec probabilité $\left(\frac{4}{6}\right)^n$). On en déduit :

$$\mathrm{E}\left(\mathbb{1}_{A_i \cap A_j}\right) = \mathrm{P}(A_i \cap A_j) = 2\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) + \left(\frac{4}{6}\right)^n - 1 = 1 - \frac{2 \cdot 5^n - 4^n}{6^n}.$$

On a tout ce qu'il faut pour en déduire la covariance de $\mathbb{1}_{A_i}$ et $\mathbb{1}_{A_j}$, puis la variance de X :

$$\mathrm{V}(X) = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n + 2\binom{6}{2}\left(1 - \frac{2 \cdot 5^n - 4^n}{6^n} - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^2\right).$$

On peut (un peu) mieux présenter ce résultat :

$$\mathrm{V}(X) = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n + 30\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\right).$$

3. On a : $|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| = |\mathrm{E}(\mathbb{1}_{A\cap B}) - \mathrm{E}(\mathbb{1}_A)\mathrm{E}(\mathbb{1}_B)| = |\mathrm{E}(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B) - \mathrm{E}(\mathbb{1}_A)\mathrm{E}(\mathbb{1}_B)| = |\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)|$, donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (appliquée à la forme bilinéaire symétrique positive Cov) on a : $|\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)| \leqslant \sigma(\mathbb{1}_A)\sigma(\mathbb{1}_B)$. Or : $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(\mathrm{P}(A))$, donc : $\mathrm{V}(\mathbb{1}_A) = \mathrm{P}(A)(1 - \mathrm{P}(A)) \leqslant \frac{1}{4}$ (cette dernière majoration provient du fait que $x \mapsto x(1-x)$ admette $\frac{1}{4}$ comme maximum sur $[0,1]$). De même pour la variance de $\mathbb{1}_B$, et on en déduit : $|\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)| \leqslant \sqrt{\frac{1}{4^2}} = \frac{1}{4}$, d'où le résultat.

   Pour le cas d'égalité : on note déjà qu'il faut avoir $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$ (c'est le réel où le maximum de $x \mapsto x(1-x)$ est atteint), et ensuite : le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz est obtenu si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathbb{1}_A = \lambda\mathbb{1}_B + \mu$ ou $\mathbb{1}_B = \lambda\mathbb{1}_A + \mu$ presque sûrement. Comme une fonction indicatrice ne prend que les valeurs 1 et 0, une telle relation ne peut être que de la forme : $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$, ou : $\mathbb{1}_A = 1 - \mathbb{1}_B$, ou : $\mathbb{1}_A = 1$, ou : $\mathbb{1}_A = 0$ (et de même avec $\mathbb{1}_B$), toutes ces égalités étant « presque sûres ». Ces dernières égalités sont impossibles puisque $\mathrm{P}(A) \notin \{0,1\}$. Donc seules les deux premières égalités sont à retenir ; dans le premier cas, cela équivaut à l'égalité : $A = B \cup N$, avec N un évènement négligeable. Dans le second cas : $A = \overline{B} \cup N$, avec N un évènement négligeable.

   En résumé : le cas d'égalité est vérifié si et seulement si $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$ et A est égal à B ou $\bar{B}$ à un évènement négligeable près.

4. Soit $\lambda > 0$. On doit montrer : $\mathrm{P}(X \geqslant \mathrm{E}(X) + \lambda) \leqslant 1 - \dfrac{\lambda^2}{\mathrm{V}(X) + \lambda^2}$, ce qui équivaut à : $(\mathrm{V}(X) + \lambda^2)\,\mathrm{P}(X < \mathrm{E}(X) + \lambda) \geqslant \lambda^2$. Pour comparer des objets de même nature, écrivons la probabilité demandée comme une espérance. Ainsi on doit montrer : $(\mathrm{V}(X) + \lambda^2)\,\mathrm{E}\left(\mathbb{1}_{(X<\mathrm{E}(X)+\lambda)}\right) \geqslant \lambda^2$.

   La forme de l'inégalité demandée pourrait faire penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (une variance étant au fond une somme). Pour cela : cherchons une variable aléatoire Y dont l'espérance au carré est exactement $\mathrm{V}(X) + \lambda^2$. Il est naturel de la chercher comme une fonction affine de X (par exemple). Si on pose $Y = aX + b$ et qu'on cherche à quelle condition on a : $\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{V}(X) + \lambda^2$, on observe que $Y = X - \mathrm{E}(X) - \lambda$ convient.

   Ainsi on veut montrer, avec cette nouvelle notation, l'inégalité : $\mathrm{E}(Y^2)\mathrm{E}\left(\mathbb{1}_{(X<\mathrm{E}(X)+\lambda)}\right) \geqslant \lambda^2$. Voyons si elle peut découler de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; appliquée à Y et $\mathbb{1}_{(X<\mathrm{E}(X)+\lambda)} = \mathbb{1}_{(Y<0)}$, elle donne : $\left(\mathrm{E}\left(Y\mathbb{1}_{(Y<0)}\right)\right)^2 \leqslant \mathrm{E}(Y^2)\mathrm{E}\left(\mathbb{1}_{(Y<0)}\right)$. Or : $Y\mathbb{1}_{(Y<0)} \leqslant Y$ (en effet si Y est positive alors le premier membre est nul et l'inégalité est vérifiée ; sinon, l'inégalité est triviale). Par croissance de l'espérance on a : $\mathrm{E}\left(Y\mathbb{1}_{(Y<0)}\right) \leqslant \mathrm{E}(Y) = -\lambda < 0$, donc en élevant au carré l'inégalité se renverse et on a : $\lambda^2 \leqslant \left(\mathrm{E}\left(Y\mathbb{1}_{(Y<0)}\right)\right)^2 \leqslant \mathrm{E}(Y^2)\mathrm{E}\left(\mathbb{1}_{(Y<0)}\right)$. D'après ce qui précède, cette inégalité est exactement équivalente au résultat voulu, ce qui conclut.