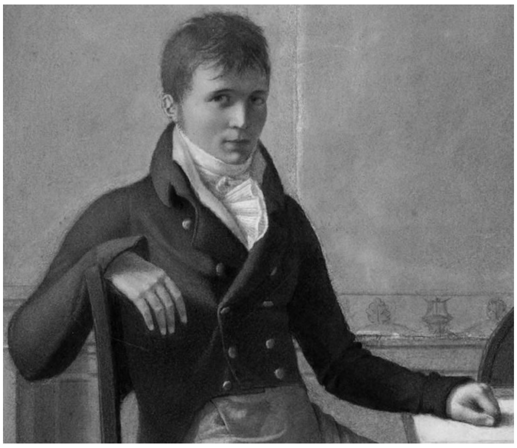
Chapitre IX — Probabilités discrètes

Jacques Bernoulli
(1654–1705)



Siméon Denis Poisson
(1781–1840)

Andreï Markov
(1856–1922)

La Physique et ses lois, sont-ce vaine promesse
Gonflant nos cœurs ardents de mille vanités ?
De la main d'un soûlard quelques dés sont jetés
Et leurs bonds ahuris bravent notre sagesse.

Fondons notre savoir dessus cette détresse,
Le désordre a ses lois : les probabilités.
Ah, ah ! Dieux ! Vos desseins nous sont certe occultés,
Leur issue implacable est surtout leur faiblesse.

Grâce au joug qui vous force à répéter vos choix,
Je note leur fréquence, et devine vos lois
Dès lors qu'elles se font selon un très grand nombre :

Mais même en éclairant nos confus avenirs,
Les probabilités ont aussi leur part d'ombre
Et poussent encor plus que les dieux aux soupirs.
(Théodore Agrippa d'Aubigné)

Révisions attendues

1. Probabilités de 1re année : formule des probabilités composées, de Bayes, des probabilités totales. Variables aléatoires : lois usuelles (uniforme, de Bernoulli, binomiale), espérance, variance. Ne pas négliger le calcul des espérances et variances des variables aléatoires de lois usuelles.
2. Dénombrement de base : revoir la définition combinatoire des coefficients binomiaux, du nombre d'arrangements, de la factorielle, etc.
3. Séries entières. Calcul de sommes.
4. Diagonalisation des matrices, application au calcul des puissances.

Vos révisions sont insuffisantes si vous ne parvenez pas à faire ces exercices :

Exercice 1. Dans une course de huit chevaux, dénombrer :

— le nombre de classements possibles de ces huit chevaux ;

— le nombre de podiums possibles, sans tenir compte du classement ;

— le nombre de podiums possibles, en tenant compte du classement.

Exercice 2. Christian Renauld et Lionel Messire jouent au dé. Christian utilise un dé équilibré à six faces, mais Lionel triche en utilisant un dé équilibré à douze faces (un dodécaèdre). Calculer la probabilité que Christian Renauld fasse le nombre le plus élevé, et la probabilité qu'il y ait match nul.

Exercice 3. Christian Renauld lance un dé équilibré à six faces. On note N le résultat qu'il obtient. Éternellement jaloux de son rival, Lionel Messire lance à son tour un dé équilibré à six faces, et ne s'arrête que lorsqu'il obtient un nombre supérieur ou égal à N. Pour tout $k \in [\![1,6]\!]$, calculer la probabilité conditionnelle que Lionel Messire s'arrête après trois lancers de dé sachant $(N = k)$, et en déduire la probabilité que Lionel Messire s'arrête après trois lancers de dé.

Exercice 4. Soit $p \in]0,1[$. Simplifier les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k p^k (1-p)^{n-k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) p^k (1-p)^{n-k}$.

Exercice 5. Soit $p \in]0,1[$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n p^n$, et plus généralement $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Calculer les puissances de $M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M^n$, où la limite est prise coordonnée par coordonnée.

1 Le formalisme de la théorie des probabilités

1.1 Espaces probabilisables et variables aléatoires discrètes

Définition 1 (Tribu).

Exemple 1. Deux univers associés au lancer répété d'une pièce.

Exemple 2. La tribu borélienne de $[0,1]$.

Remarque. Expliciter Ω n'est pas toujours possible ni utile.

Proposition 2 (Stabilité d'une tribu par les opérations ensemblistes).

Définition 3 (Extension du vocabulaire de 1re année).

Définition 4 (Variable aléatoire discrète, réelle).

Notations.

Remarque. La famille $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.

Proposition 5 (Espace vectoriel des variables aléatoires réelles).

Dans tout le reste de ce cours, toutes les variables aléatoires rencontrées sont supposées discrètes (cette dernière propriété étant donc implicite).

1.2 Probabilités

Définition 6 (Probabilité).

Exemple 3. Probabilité uniforme sur $[0,1]$.

Définition 7 (Ensembles négligeables et presque sûrs, systèmes quasi-complets).

Exemple 4. Tirer uniformément au hasard 0 dans $[0,1]$ est un évènement négligeable.

1.3 Construction de probabilités : théorèmes d'existence

Proposition 8 (Correspondance entre probabilités et distributions de probabilités).

Remarque. Si $S = \sum_{n \in \Omega} p_n > 0$.

Exemple 5. Loi dzêta.

Exemple 6. Il n'y a pas de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$.

Remarque. La correspondance est fausse dans le cas indénombrable.

Exercice 7. Supposons par l'absurde que la probabilité uniforme sur $([-1,2], \mathcal{B}([-1,2]))$ se prolonge en une probabilité sur $([-1,2], \mathcal{P}([-1,2]))$, toujours invariante par translation (cela pourrait découler de sa définition mais je simplifie l'énoncé pour ne pas déborder du programme). Soit S un système complet de représentants du groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

1. Justifier qu'on peut choisir S de sorte que : $S \subseteq [0,1]$.
2. Justifier que la réunion $A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (S + r)$ est incluse dans $[-1,2]$ et disjointe (on a par définition : $S + r = \{s + r \mid s \in S\}$). En déduire : $\mathrm{P}(S) = 0$, puis : $\mathrm{P}(A) = 0$.
3. Montrer : $[0,1] \subseteq A$ (*pour tout $x \in [0,1]$, introduire $y \in S$ tel que $x \sim y$ et utiliser le fait que x soit dans $S + (x - y)$*). Conclure.

Théorème 9 (Théorème de Kolmogorov).

Exemple 7. Probabilité sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ modélisant le lancer infini d'une pièce non équilibrée.

1.4 Lois de probabilité de variables aléatoires

Définition 10 (Loi de probabilité)**.**

Proposition 11 (Une distribution de probabilités définit une loi de variable aléatoire)**.**

Proposition 12 (Fonction de deux variables aléatoires de même loi)**.**

Définition 13 (Fonction de répartition)**.**

Proposition 14 (Propriétés de base d'une fonction de répartition)**.**

Exemple 8. Maximum d'un lancer de deux dés équilibrés à six faces.

1.5 Formules de base

Proposition 15 (Propriétés de base)**.** *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* A *et* B *deux évènements de* $\mathcal{A}$*. La probabilité* P *vérifie les identités suivantes :*

— $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$ *;*

— $\mathrm{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathrm{P}(A)$ *;*

— $\mathrm{P}(A \setminus B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$ *;*

— $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$ *(formule de Moivre) ;*

— *si* $A \subseteq B$*, alors* $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$ *(croissance).*

Théorème 16 (Théorème de continuité monotone)**.**

Remarque. Pourquoi parler de « continuité » ?

Exemple 9. Un étudiant lorrain fictif dénommé Hyacinthe Guénoux cherche à irriter son professeur de PSI* en prononçant « n factorielle » à chaque cours. Lors du k^{e} cours de l'année, ce professeur est tenté de le renvoyer de cours pour ses hardiesses répétées, et s'exécute avec probabilité $1 - \dfrac{1}{k!}$. On fait l'hypothèse simplificatrice qu'il y a une infinité de cours. On cherche la probabilité que Hyacinthe ne se fasse jamais renvoyer.

Corollaire 17 (Sous-additivité)**.**

Corollaire 18 (Réunion d'évènements négligeables, intersection d'évènements presque sûrs)**.**

2 Nouvelles lois usuelles

2.1 Loi géométrique

Modèle.

Définition 19 (Loi géométrique)**.**

Exemple 10. Laurent Guilbert, supporter fictif de l'AS Nancy Lorraine, s'est lancé dans un défi avec ses camarades : il ne se rasera plus jusqu'au jour où l'AS Nancy Lorraine gagnera un match de football en championnat. Or la probabilité que l'AS Nancy Lorraine gagne un match de football est approximativement égale à $\frac{1}{15}$ (selon des statistiques officielles très légèrement modifiées par votre serviteur). On veut déterminer à partir de combien de matchs la probabilité que Laurent soit rasé dépasse 0,9.

Proposition 20 (Loi sans mémoire)**.**

2.2 Loi de Poisson

Modèle.

Proposition 21 (Approximation de la loi binomiale)**.**

Définition 22 (Loi de Poisson)**.**

Remarque culturelle. Convergence en loi.

3 Probabilités conditionnelles et indépendance

3.1 Définition, et les trois formules majeures

Définition 23 (Probabilité conditionnelle, loi conditionnelle)**.**

Proposition 24 (Formule des probabilité composées, des probabilités totales, de Bayes)**.**

Remarque. Usage pratique de la formule des probabilités totales.

Exemple 11. Lionel Messire, un joueur fictif de l'En Avant Montvendre (club de football de District Drôme Ardèche, proche de la fameuse ville de Barcelonne) se rend une fois par semaine dans un des trois lieux suivants :

— à une œuvre caritative C, pour brouiller les pistes ;

— chez son médecin M, pour recevoir des ordonnances « spéciales » ;

— chez son notaire N, pour lui demander comment frauder le fisc.

À cause de son investissement sportif, il ne peut faire qu'une seule de ces visites dans la semaine.

Un huissier le suit de près et se rend successivement chez N, M ou C, mais arrive toujours trop tard. Toutefois son flair progresse, et il remarque que :

— lorsque Lionel Messire se présente à une œuvre de charité C, il choisit, la semaine suivante, d'aller chez M ou N avec équiprobabilité ;

— lorsque Lionel Messire se dope chez M, il choisit, la semaine suivante, d'aller chez C avec probabilité $\frac{1}{2}$, chez M avec probabilité $\frac{1}{4}$ et chez N avec probabilité $\frac{1}{4}$;

— lorsque Lionel Messire fraude chez N, il choisit, la semaine suivante, d'aller chez C ou M avec équiprobabilité.

Ce même huissier pense de plus que, pour sa première visite, Lionel Messire est allé chez M avec probabilité $m_0 = \frac{2}{3}$ et chez N avec probabilité $n_0 = \frac{1}{3}$.

Où l'huissier doit-il se rendre pour avoir de grandes chances de l'y croiser ?

3.2 Indépendance

Définition 25 (Indépendance de deux évènements).

Définition 26 (Indépendance (mutuelle) de n évènements, indépendance deux à deux).

Proposition 27 (Stabilité par complémentaire de l'indépendance).

Exemple 12. Indépendance des multiples de nombres premiers pour la loi dzêta. Application : démonstration du produit eulérien. ♡

Proposition 28 (L'indépendance implique l'indépendance deux à deux).

Mise en garde 1. La réciproque est fausse.

3.3 Indépendance de variables aléatoires

Définition 29 (Vecteurs aléatoires, loi d'un couple de variables aléatoires).

Proposition 30 (Loi marginale à partir de la loi conjointe).

Exemple 13. Un insecte pond des œufs, dont le nombre N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque œuf a une probabilité p d'éclore (et l'éclosion d'un œuf est indépendante de celle des autres). On note X la variable aléatoire égale au nombre d'insectes nés : on cherche la loi et l'espérance de X. ♡

Définition 31 (Indépendance).

Remarque. Il suffit de vérifier que pour tout n, les variables $(X_0, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Théorème 32 (Lemme des coalitions).

Théorème 33 (Univers portant une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées).

Exemple 14. Rang d'apparition du r^{e} succès (loi de Pascal). ♡

4 Espérance et variance

4.1 Espérance

Définition 34 (Espérance).

Remarque. Utilisation des séries entières dans le calcul d'espérances.

Proposition 35 (Espérance des variables aléatoires de lois usuelles).

Proposition 36 (Linéarité, positivité et croissance).

Remarque. La variable $X - \mathrm{E}(X)$ est centrée.

Exemple 15. Nombre moyen de points fixes d'une permutation de S_n.

Exemple 16. Formule du crible de Poincaré (ou formule d'inclusion-exclusion de Moivre). ♡

Théorème 37 (Théorème de comparaison des espérances).

Théorème 38 (Théorème de transfert).

Proposition 39 (Expression alternative pour une variable aléatoire entière).

Proposition 40 (Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes).

4.2 Variance

Définition 41 (Variance et écart type).

Proposition 42 (Inclusion de L^2 dans L^1).

Proposition 43 (Relation de Huygens).

Proposition 44 (Variance des variables aléatoires de lois usuelles).

Proposition 45 (Variable de variance nulle).

Proposition 46 (Inégalité de Markov).

Corollaire 47 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

Remarque. Variante de cette inégalité.

4.3 Sommes de variables aléatoires et covariance

Définition 48 (Covariance).

Lemme 49 (Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas général).

Proposition 50 (Inégalité de Cauchy-Schwarz : espérance et covariance).

Proposition 51 (Propriétés de base de la covariance).

Proposition 52 (Variance d'une somme de variables aléatoires).

Exemple 17. Variance du nombre de points d'une permutation de S_n.

Corollaire 53 (Loi faible des grands nombres).

5 Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$

Définition 54 (Fonction génératrice)**.**

Remarque. Si X prend un nombre fini de valeurs.

Proposition 55 (Rayon de convergence et régularité de la fonction génératrice)**.**

Proposition 56 (La fonction génératrice caractérise la loi)**.**

Proposition 57 (Fonctions génératrices des variables aléatoires de lois usuelles)**.**

Remarque. Moments d'ordre k et fonction génératrice.

Proposition 58 (La dérivée en 1 d'une fonction génératrice décrit l'espérance)**.**

Proposition 59 (La dérivée seconde en 1 d'une fonction génératrice décrit la variance)**.**

Exemple 18. Application aux lois usuelles.

$X \sim$	$G'_X(t)$	$G''_X(t)$	$\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$	$\mathrm{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$
$\mathcal{U}(n)$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kt^{k-1}$	$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)t^{k-2}$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$
$\mathcal{B}(p)$	p	0	p	$0 + p - p^2 = p(1-p)$
$\mathcal{B}(n,p)$	$np(1-p+tp)^{n-1}$	$n(n-1)p^2(1-p+tp)^{n-2}$	np	$n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$
$\mathcal{G}(p)$	$\frac{p}{(1-tq)^2}$	$\frac{2pq}{(1-tq)^3}$	$\frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$	$\frac{2pq}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda e^{\lambda(t-1)}$	$\lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$	λ	$\lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Proposition 60 (Série génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes)**.**

Corollaire 61 (Somme de variables aléatoires indépendantes de lois usuelles)**.**

Remarque culturelle. Si X n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$: fonctions caractéristiques.

— Fin du chapitre IX —

FIGURE 1 – Lois usuelles. Récapitulatif.

Nom de la loi	Expression	Propriétés	Fonction génératrice	Situation concrète	Caractéristiques
Uniforme $\mathcal{U}(n)$ Loi finie à un paramètre n $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$	pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$	$\mathrm{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ $\mathrm{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$	$G_X(t) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} t^k$ $R = +\infty$	X représente le résultat d'un dé ou d'une boule numérotée dans une urne.	
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ Loi finie à un paramètre p $X(\Omega) = \{0,1\}$	$\mathrm{P}(X = 0) = 1 - p = q$ $\mathrm{P}(X = 1) = p$	$\mathrm{E}(X) = p$ $\mathrm{V}(X) = pq$	$G_X(t) = 1 - p + tp$ $R = +\infty$	Expérience à deux issues : probabilité p de succès ($X = 1$) avec probabilité p, et $q = 1 - p$ d'échec ($X = 0$).	
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ Loi finie à deux paramètres n, p $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$	$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$\mathrm{E}(X) = np$ $\mathrm{V}(X) = npq$	$G_X(t) = (1 - p + tp)^n$ $R = +\infty$	X est le nombre de succès après répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.	$\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par $\mathcal{P}(np)$ si $n > 20$, $p \leqslant 0{,}1$ et $np \leqslant 5$.
Géométrique $\mathcal{G}(p)$ Loi dénombrable à un paramètre p $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{P}(X = k) = pq^{k-1}$	$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$ $\mathrm{V}(X) = \frac{q}{p^2}$	$G_X(t) = \dfrac{pt}{1 - tq}$ $R = \frac{1}{q}$	X est le nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p jusqu'à l'apparition du premier succès.	Loi sans mémoire.
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ Loi dénombrable à un paramètre λ $X(\Omega) = \mathbb{N}$	$\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$\mathrm{E}(X) = \lambda$ $\mathrm{V}(X) = \lambda$	$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ $R = +\infty$	X représente le nombre de fois où un évènement donné se produit au cours d'un intervalle de temps donné ou dans un lieu donné.	Loi des évènements rares.

Table des matières

Table des figures