Du cours aux exercices (savoir-faire à vérifier)

Chapitre I — Intégration

Les principaux acquis à vérifier sont :

Intégrales généralisées.

✓ 1. Étudier l'intégrabilité d'une fonction, la nature d'une intégrale (quand on connaît une primitive ou grâce aux théorèmes de comparaison). (🗎 **C**) ☐

✓ 2. Déterminer la nature d'une intégrale voire la calculer avec un changement de variable. ☐

★ 3. Intégrer par parties pour le calcul intégral ou montrer la convergence d'une intégrale. (🗎 **C**) ☐

☢ 4. Donner la nature d'une intégrale qui échappe aux méthodes classiques. (🗎) ☐

Développements limités et asymptotiques, approximations d'intégrales.

★ 1. Utiliser le théorème d'intégration des relations de comparaison. ☐

☢ 2. Effectuer un développement limité ou asymptotique d'une intégrale dépendant d'une variable. (🗎) ☐

☢ 3. Approcher une intégrale par une somme, ou l'intégrande par densité, ou l'intervalle d'intégration par un segment, pour résoudre un problème. (🗎) ☐

Interversions de symboles.

✓ 1. Utiliser la continuité d'une intégrale à paramètre pour étendre son expression. ☐

★ 2. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\int_J f_n(t)\mathrm{d}t$ ou $\lim\limits_{x\to a}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ avec un théorème d'interversion. (🗎 **C**) ☐

★ 3. Démontrer la continuité ou dérivabilité d'une intégrale à paramètre, et donner sa dérivée le cas échéant. (🗎) ☐

L'icône « (🗎) » signifie que les documents *Méthodes* donnent des compléments sur ces savoir-faire.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices exerçant à ce savoir-faire.

Intégrales généralisées.

✓ Étudier l'intégrabilité d'une fonction, la nature d'une intégrale (quand on connaît une primitive ou grâce aux théorèmes de comparaison).

Exemples. Étudier la nature des intégrales :

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-\ln(t)}}$, (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}\mathrm{d}t$, (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)\mathrm{d}t$, (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}t$,

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}e^{\cos(\sqrt{t})}\mathrm{d}t$, (f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\ln(t)}}$, (g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|\ln(t)|}}$, (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

✓ Déterminer la nature d'une intégrale voire la calculer avec un changement de variable.

Exemples.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ en posant $u = \dfrac{1}{t}$ (on admet que l'intégrale converge).
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(e^t)\mathrm{d}t$ converge à l'aide d'un changement de variable adéquat.

★ Faire une intégration par parties avec une intégrale généralisée.

Exemple. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ converge en intégrant par parties.

☢ Donner la nature d'une intégrale qui échappe aux méthodes classiques.

Exemples.

1. Donner la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(x+\ln(x)\right)\mathrm{d}x$.
2. Donner la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t\cos(t)}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+t^2\sqrt{|\cos(t)|}\right)}$.
3. Donner la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$.

Développements limités et asymptotiques, approximations d'intégrales.

★ Utiliser le théorème d'intégration des relations de comparaison.

Exemples.

1. Montrer : $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner un équivalent quand $x \to +\infty$ de l'intégrale $\displaystyle\int_2^x \frac{\sqrt{t}}{(\ln(t))^k}\mathrm{d}t$.
3. Soit argch : $[1,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ la bijection réciproque de $\mathrm{ch}_{|\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to [1,+\infty[$. Donner un équivalent quand $x \to 1$ de $\mathrm{argch}(x)$.

☢ Effectuer un développement limité ou asymptotique d'une intégrale dépendant d'une variable.

Exemple. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)}{1+tx}\mathrm{d}x = \frac{\ln(t)}{t} + \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)$.

☢ Approcher une intégrale par une somme, ou l'intégrande par densité, ou l'intervalle d'intégration par un segment, pour résoudre un problème.

Exemples.

1. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues. On suppose g convexe. Montrer : $\displaystyle g\left(\int_0^1 f\right) \leqslant \int_0^1 g \circ f$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(nx - \lfloor nx \rfloor\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x$.

Interversions de symboles.

✓ Utiliser la continuité d'une intégrale à paramètre pour étendre une expression.

Exemple.

1. Montrer que l'application $\displaystyle g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+(xt)^2)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ différent de 1.
3. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.

★ Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_J f_n(t)\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\lim_{x\to a} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ avec un théorème d'interversion.

Exemples. Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^n}\mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \int_0^1 \frac{\sin(\sin(tx))}{\sin(tx)}\mathrm{d}t$.

★ Démontrer qu'une intégrale à paramètre est continue ou de classe C^1.

Exemples.

1. Montrer que $\displaystyle g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$ définit une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge absolument.
   (b) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\frac{x}{2} \cdot g(x)$.
   (c) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}$. On admet : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Intégrales généralisées.

✓ Étudier l'intégrabilité d'une fonction, la nature d'une intégrale (quand on connaît une primitive ou grâce aux théorèmes de comparaison). ☐

Réponse.

(a) Nature de $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-\ln(t)}}$. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{1-\ln(t)}}$ est continue et positive sur $[1, e[$, et :

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-\ln(t)}} = \left[-2\sqrt{1-\ln(t)}\right]_1^e = 2 - \lim_{t\to e} 2\sqrt{1-\ln(t)} = 2 < +\infty.$$

Donc l'intégrale converge.

(b) Nature $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}\mathrm{d}t$. On montre la convergence *absolue* ; l'application $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$, or : $\left|\dfrac{\sqrt{t}\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}\right| \leqslant \dfrac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)}$, et : $\dfrac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, donc :

$$\frac{\sqrt{t}\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)} = \underset{t\to 0}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

or $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$, donc $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}$ l'est également d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives. De plus :

$$\left|\frac{\sqrt{t}\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(t)t^{3/2}} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right),$$

et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}$ également. On en déduit que $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc en particulier l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}\mathrm{d}t$ converge.

(c) Nature de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)\mathrm{d}t$. Une primitive de tan sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ est $t \mapsto -\ln(\cos(t))$, qui tend vers $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}$, donc l'intégrale diverge. Une autre démonstration possible passe par le théorème de comparaison et l'équivalent : $\tan(t) = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-t} > 0$: l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\frac{\pi}{2}-t}$ diverge, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)\mathrm{d}t$ aussi.

(d) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}(t)-\cos(t)}{t^{5/2}}$ est continue et *positive* sur $]0,1]$, et au voisinage de 0 on a :

$$\frac{\mathrm{ch}(t)-\cos(t)}{t^{5/2}} = \frac{\cancel{1}+\dfrac{t^2}{2}-\cancel{1}+\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)}{t^{5/2}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}}\,;$$

or $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable sur $]0,1]$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)-\cos(t)}{t^{5/2}}\mathrm{d}t$ converge par comparaison.

(e) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}e^{\cos(\sqrt{t})}\mathrm{d}t$. Une primitive de $t \mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}e^{\cos(\sqrt{t})}$ est $t \mapsto -2e^{\cos(\sqrt{t})}$ qui n'a pas de limite en $+\infty$, donc l'intégrale diverge.

(f) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\ln(t)}}$. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\ln(t)}}$ est continue sur $]1, +\infty[$. On a : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\sqrt{\ln(t)}} = +\infty$ (croissances comparées), donc pour tout t suffisamment grand on a : $\dfrac{t}{\sqrt{\ln(t)}} \geqslant 1$, puis : $\dfrac{1}{\sqrt{\ln(t)}} \geqslant \dfrac{1}{t} > 0$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\ln(t)}}$ également par comparaison.

(g) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|\ln(t)|}}$. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{|\ln(t)|}}$ est continue sur $]0{,}1[$ et de limite nulle en 0, donc elle se prolonge par continuité sur $[0{,}1[$. De plus : $\dfrac{1}{\sqrt{|\ln(t)|}} \underset{t\to1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} > 0$, et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ converge parce que $\dfrac{1}{2} < 1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|\ln(t)|}}$ converge.

(h) Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. L'application $t \mapsto \dfrac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus : $\dfrac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}} > 0$, et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge parce que $\dfrac{1}{2} < 1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge.

De plus le théorème des croissances comparées implique : $\dfrac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge parce que $2 > 1$. Encore par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ convergent, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ aussi.

✓ Déterminer la nature d'une intégrale voire la calculer avec un changement de variable. ☐

Réponse.

1. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe C^1 et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Poser $u = \dfrac{1}{t}$ montre que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^0 \frac{-\ln(u)}{1+\frac{1}{u^2}} \frac{-\mathrm{d}u}{u^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u,$$

   donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0$.

   Remarque. L'intégrale converge car l'intégrande est continu sur $]0, +\infty[$, négligeable devant $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ au voisinage de 0 et devant $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ au voisinage de $+\infty$. Le lecteur en exercice complétera les détails.

2. Le changement de variable $u = e^t$ est licite, parce que l'application $t \mapsto e^t$ est de classe C^1 et strictement croissante de $[1, +\infty[$ dans $[e, +\infty[$. On a de plus : $\mathrm{d}u = e^t\mathrm{d}t$. Par conséquent, d'après la formule du changement de variable, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(e^t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(e^t)}{e^t} e^t\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ sont de même nature ; or la deuxième est convergente, nous l'avons vu dans le cours (exemple 8), donc la première également : d'où le résultat.

★ Faire une intégration par parties avec une intégrale généralisée. ☐

Réponse. Tout d'abord, $x \mapsto \cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $[\pi, +\infty[$. On intègre par parties, en intégrant le cosinus et en dérivant $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (qui est de dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$: l'intérêt de ce choix est de faire apparaître la fonction de Riemann $x \mapsto \frac{1}{x^2}$) ; le terme entre crochets $\left[\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{\pi}^{+\infty}$ est bien défini, parce que : $0 \leqslant \left|\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sin(0) = 0$.

On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle -\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ sont de même nature. Or l'intégrale du membre de droite est absolument convergente : son intégrande est continu, et clairement dominé par $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ qui est intégrable sur $[\pi, +\infty[$: d'où le résultat.

☢ Donner la nature d'une intégrale qui échappe aux méthodes classiques. ☐

Réponse.

1. Faisons le changement de variable : $u = x + \ln(x)$. Il est licite puisque l'application $\varphi : x \mapsto x + \ln(x)$ est de classe C^1 et strictement croissante, de $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$ (le vérifier !). On a : $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\varphi'(\varphi^{-1}(u))} = \frac{\mathrm{d}u}{1+\frac{1}{\varphi^{-1}(u)}}$, donc la formule du changement de variable implique que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(x + \ln(x))\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{1+\frac{1}{\varphi^{-1}(u)}}\mathrm{d}u$ sont de même nature. Faisons un développement asymptotique de l'intégrande de cette fonction. Comme $\frac{1}{\varphi^{-1}(u)} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut en principe faire un développement asymptotique de $\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi^{-1}(u)}}$, mais il est impossible de savoir jusqu'à quel ordre aller si l'on n'a pas une information plus fine sur le comportement asymptotique de φ^{-1} en l'infini. On va donc en donner un équivalent et même un peu mieux. Soit u au voisinage de $+\infty$. Par définition de φ^{-1}, on a : $u = \varphi^{-1}(u) + \ln\left(\varphi^{-1}(u)\right) \geqslant \varphi^{-1}(u)$, ce dont on déduit : $0 \leqslant \ln\left(\varphi^{-1}(u)\right) \leqslant \ln(u)$, donc en ré-exploitant l'égalité précédente on a : $\varphi^{-1}(u) = u + \underset{u\to+\infty}{O}(\ln(u))$. On en déduit :
$$\frac{\sin(u)}{1+\frac{1}{\varphi^{-1}(u)}} = \frac{\sin(u)}{1+\frac{1}{u\left(1+\underset{u\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(u)}{u}\right)\right)}} = \frac{\sin(u)}{1+\frac{1}{u}\left(1+\underset{u\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(u)}{u}\right)\right)} = \sin(u) - \frac{\sin(u)}{u} + \underset{u\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(u)}{u^2}\right).$$
On sait démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ converge *via* une intégration par parties, et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \underset{u\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(u)}{u^2}\right)\mathrm{d}u$ converge absolument en dominant l'intégrande par la fonction de Riemann $u \mapsto \dfrac{1}{u^{3/2}}$. Je ne détaille rien de tout cela, mais le lecteur en exercice s'assurera impérativement de savoir le faire. On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{1+\frac{1}{\varphi^{-1}(u)}}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature ; cette dernière diverge trivialement, puisqu'une primitive du sinus, à savoir $-\cos$, n'admet pas de limite en $+\infty$. Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{1+\frac{1}{\varphi^{-1}(u)}}\mathrm{d}u$ diverge, et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(x + \ln(x))\mathrm{d}x$ aussi.

2. Pour la première : l'idée est que chaque fois que le cosinus s'approche de -1 (autour des multiples impairs de π), l'intégrande explose puisqu'il devient de l'ordre de grandeur de e^t. Or le cosinus s'approche de -1 trop souvent, et sur des intervalles de longueur trop grande (ci-dessous nous prendrons $\left[(2n+1)\pi - \frac{\pi}{3}, (2n+1)\pi + \frac{\pi}{3}\right]$ comme tels intervalles, puisque le cosinus y est compris entre -1 et $-\frac{1}{2}$: c'est en cela qu'il est « proche » de -1 sur un intervalle « trop grand », c'est-à-dire de longueur constante et non nulle), pour que ce soit anecdotique. Formalisons. Comme l'intégrande est positif (et continu, cela va de soi : je mets l'accent sur la positivité), on peut passer par un calcul direct de

l'intégrale pour démontrer sa convergence :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\cos(t)}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} e^{-t\cos(t)}\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{(2n+1)\pi-\frac{\pi}{3}}^{(2n+1)\pi+\frac{\pi}{3}} e^{-t\cos(t)}\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{(2n+1)\pi-\frac{\pi}{3}}^{(2n+1)\pi+\frac{\pi}{3}} e^{t}\mathrm{d}t$$
$$\geqslant \frac{2\pi}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(2n+1)\pi-\frac{\pi}{3}}$$
$$= +\infty,$$

puisqu'on a évidemment affaire à une somme de série grossièrement divergente. Ceci démontre : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t\cos(t)}\mathrm{d}t = +\infty$, et l'intégrale diverge donc.

Passons à l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+t^2\sqrt{|\cos(t)|}\right)}$, dont l'intégrande est là encore continu et positif. Ici la nature de l'intégrale est moins évidente : quand le cosinus s'annule, l'intégrande est approximativement égal à $\frac{1}{t}$ (ce qui nous donne un intégrande non intégrable), alors que lorsque le cosinus vaut 1 ou -1 l'intégrande est approximativement égal à $\frac{1}{t^3}$ (qui est intégrable). Qui gagne ? Voyons cela. On se ramène aux intervalles $[n\pi,(n+1)\pi]$ pour tenir compte du caractère périodique des annulations (ou des valeurs ± 1 prises) :

$$\int_\pi^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+t^2\sqrt{|\cos(t)|}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+t^2\sqrt{|\cos(t)|}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{(u+n\pi)\left(1+(u+n\pi)^2\sqrt{|\cos(u)|}\right)}.$$

Notons f l'intégrande. On a :

$$\int_0^\pi f(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\mathrm{d}u + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-v)\mathrm{d}v = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(u)+f(\pi-u)\right)\mathrm{d}u.$$

La réduction à l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ a été faite pour utiliser la concavité du cosinus sur cet intervalle, qui implique : $\forall u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(u)\geqslant 1-\frac{2u}{\pi}\geqslant 0$ (le graphe du cosinus est au-dessus de la corde joignant $(0,\cos(0))$ et $\left(\frac{\pi}{2},\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. En fait, l'inégalité vaut même sur $[0,\pi]$ avec les valeurs absolues, comme une analyse approfondie le démontrerait. Bref. On en déduit :

$$\int_\pi^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+t^2\sqrt{|\cos(t)|}\right)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+(u+n\pi)^2\sqrt{1-\frac{2u}{\pi}}}+\frac{1}{1+(\pi-u+n\pi)^2\sqrt{1-\frac{2u}{\pi}}}\right)\mathrm{d}u$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(n\pi)^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-\frac{2u}{\pi}}}$$
$$= \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} < +\infty.$$

On a montré que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+t^2\sqrt{|\cos(t)|}\right)}$ converge.

3. Remarquons d'abord que $t\mapsto\dfrac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}$ est continue sur $[\pi,+\infty[$. Cette fois-ci l'intégrande n'est pas positif : on prend garde à ne pas manipuler *a priori* l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$. Néanmoins on va tout de même remarquer que cette intégrale est une série alternée déguisée, vérifiant le critère spécial (à cause du signe alterné du sinus et de la décroissance de l'application $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{\ln(t)}}$). Soit $N\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. On a :

$$\int_\pi^{N\pi}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N-1}\underbrace{\left((-1)^3\right)^n}_{=(-1)^n}\int_0^\pi\frac{(\sin(u))^3}{\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\mathrm{d}u.$$

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \int_0^\pi \frac{(\sin(u))^3}{\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\mathrm{d}u$ vérifie le critère spécial des séries alternées : le sinus est positif sur $[0,\pi]$ et le logarithme l'est sur $[1,+\infty[$ (donc $u \mapsto \ln(u+n\pi)$ l'est sur $[0,\pi]$ dès que $n \geqslant 1$). Par croissance de l'intégrale : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\int_0^\pi \frac{(\sin(u))^3}{\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\mathrm{d}u \geqslant 0$. De plus la valeur absolue du terme général de cette série alternée décroît, puisque le logarithme est une fonction croissante, ce qui implique : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\int_0^\pi \frac{(\sin(u))^3}{\sqrt{\ln(u+(n+1)\pi)}}\mathrm{d}u \leqslant \int_0^\pi \frac{(\sin(u))^3}{\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\mathrm{d}u$. Enfin, la convergence vers 0 découle de l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad 0 \leqslant \int_0^\pi \frac{(\sin(u))^3}{\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\mathrm{d}u \leqslant \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\ln(n\pi)}} = \frac{\pi}{\sqrt{\ln(n\pi)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et du théorème des gendarmes. Ainsi, par le critère spécial, la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \int_0^\pi \frac{(\sin(u))^3}{\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\mathrm{d}u$ converge et donc la suite $\left(\int_\pi^{N\pi} \frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t\right)_{N\geqslant 1}$ également, d'après l'égalité ci-dessus.

Pour en déduire que la nature de l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ est la même : soit $x \in [\pi,+\infty[$, et soit N_x le plus grand entier tel que : $N_x\pi \leqslant x$ (on a : $N_x = \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor$). Alors :

$$0 \leqslant \left|\int_\pi^x \frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t - \int_\pi^{N_x\pi} \frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{N_x\pi}^x \frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{N_x\pi}^x \frac{|\sin(t)|^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t \leqslant \frac{x-N_x\pi}{\sqrt{\ln(N_x\pi)}} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\ln(N_x\pi)}}.$$

Or : $\lim_{x\to+\infty} N_x\pi = +\infty$, donc par composition de limites : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{\sqrt{\ln(N_x\pi)}} = 0$. Par le théorème des gendarmes : $\lim_{x\to+\infty}\left(\int_\pi^x \frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t - \int_\pi^{N_x\pi} \frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t\right) = 0$. Or : $\lim_{x\to+\infty} \int_\pi^{N_x\pi} \frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ existe et est finie d'après ce qui précède, donc $\lim_{x\to+\infty} \int_\pi^x \frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ également, ce qui démontre que l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ converge : d'où le résultat.

Remarque. Une intégration par parties fonctionne aussi, péniblement. D'abord linéariser $\sin^3$.

Remarque. Sa convergence est extrêmement lente. Le critère des séries alternées implique en effet que l'on a : $\left|\int_{N\pi}^{+\infty} \frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\ln(N\pi)}}$ (majoration du reste par son premier terme). En particulier, pour avoir un reste inférieur à 10^{-1}, il faut : $N \geqslant \frac{1}{\pi}e^{100} \approx 8{,}5 \cdot 10^{42}$: autant dire que ce n'est pas sur votre calculatrice que vous allez pouvoir observer la convergence de cette intégrale !

Développements limités et asymptotiques, approximations d'intégrales.

★ Utiliser le théorème d'intégration des relations de comparaison. ☐

Réponse. À chaque fois l'idée est la même : trouver un équivalent à une fonction dont on sait calculer une primitive. Le cas le plus favorable est lorsqu'on parvient à reconnaître une fonction de la forme $f'g$ dans l'intégrale d'étude, de sorte que fg' soit négligeable devant $f'g$. Ainsi on peut écrire : $f'g \sim f'g + fg' = (fg)'$, et en intégrant on sait simplifier l'intégrale de $(fg)'$.

1. On a : $e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x^2} + \frac{e^{-x^2}}{2x^2} = -\frac{1}{2x}\cdot\left(-2xe^{-x^2}\right) + \left(\frac{1}{2x^2}\right)\cdot e^{-x^2} > 0$, et on reconnaît là la dérivée de l'application $x \mapsto -\frac{e^{-x^2}}{2x}$. Comme elle admet une limite finie (nulle) en $+\infty$, l'application $x \mapsto e^{-x^2} + \frac{e^{-x^2}}{2x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc d'après le théorème d'intégration des équivalents

on a :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty}\left(e^{-t^2}+\frac{e^{-t^2}}{2t^2}\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty} = \frac{e^{-x^2}}{2x},$$

d'où le résultat.

2. Soit $k\in\mathbb{N}$. On a : $\dfrac{\sqrt{x}}{(\ln(x))^k} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}}{(\ln(x))^k} - \dfrac{2}{3}\dfrac{k\sqrt{x}}{(\ln(x))^{k+1}}$: on reconnaît là la dérivée de l'application $x\mapsto \dfrac{2}{3}\dfrac{x^{3/2}}{(\ln(x))^k}$. Comme elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{(\ln(x))^k}-\frac{2}{3}\frac{k\sqrt{x}}{(\ln(x))^{k+1}}\right)\mathrm{d}x$ diverge et donc, par le théorème d'intégration des équivalents on a :

$$\int_2^x \frac{\sqrt{t}}{(\ln(t))^k}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_2^x\left(\frac{\sqrt{t}}{(\ln(t))^k}-\frac{2}{3}\frac{k\sqrt{t}}{(\ln(t))^{k+1}}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}\frac{t^{3/2}}{(\ln(t))^k}\right]_2^x = \frac{2x^{3/2}}{3(\ln(x))^k} - \frac{2\cdot 2^{3/2}}{3(\ln(2))^k} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x^{3/2}}{3(\ln(x))^k},$$

d'où le résultat. Cela montre en passant que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(\ln(x))^k}\mathrm{d}x$ diverge.

Remarque. Pour conjecturer les équivalents de sommes ou d'intégrales où il figure un logarithme, il est souvent pertinent de raisonner grâce à la croissance lente du logarithme : et d'écrire abusivement : $\ln(t)\approx\ln(x)$. Ici : $\displaystyle\int_2^x\frac{\sqrt{t}}{(\ln(t))^k}\mathrm{d}t \approx \int_2^x \frac{\sqrt{t}}{(\ln(x))^k}\mathrm{d}t \approx \frac{1}{(\ln(x))^k}\frac{x^{3/2}}{3/2}$. Le raisonnement est totalement faux, mais l'équivalent est correct : il ne reste qu'à montrer que les dérivées sont équivalentes et à utiliser le théorème d'intégration des équivalents, pour le formaliser.

3. On a : $\forall x\in[1,+\infty[$, $\mathrm{ch}'(x)=\mathrm{sh}(x)$, et le sinus hyperbolique est non nul sur $\mathbb{R}_+^*=\mathrm{argch}\,(]1,+\infty[)$, donc argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a pour tout $x\in]1,+\infty[$:

$$\mathrm{argch}'(x)=\frac{1}{\mathrm{ch}'(\mathrm{argch}(x))}=\frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))}=\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x))^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}},$$

donc : $\mathrm{argch}'(x)\underset{x\to1}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}}>0$, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$ converge (c'est une intégrale de Riemann d'exposant $\frac{1}{2}<1$), donc d'après le théorème d'intégration des équivalents :

$$\int_1^x \mathrm{argch}'(t)\mathrm{d}t \underset{x\to1}{\sim} \int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}\sqrt{t-1}} = \sqrt{2}\sqrt{x-1},$$

or : $\displaystyle\int_1^x \mathrm{argch}'(t)\mathrm{d}t = \mathrm{argch}(x)-\mathrm{argch}(1)=\mathrm{argch}(x)$, donc on a montré : $\mathrm{argch}(x)\underset{x\to1}{\sim}\sqrt{2(x-1)}$.

Remarque. Il est possible d'expliciter cette bijection réciproque. On a : $\forall x\in[1,+\infty[$, $\mathrm{argch}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ (exercice). On peut aussi retrouver cet équivalent parlant de là, en écrivant :

$$\ln(x+\sqrt{x^2-1})=\ln\left(1+\left(x-1+\sqrt{x^2-1}\right)\right)\underset{x\to1}{\sim} x-1+\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x-1}\underbrace{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}_{\underset{x\to1}{\longrightarrow}\sqrt{2}}.$$

☢ Effectuer un développement limité ou asymptotique d'une intégrale dépendant d'une variable. ☐

Réponse. Pour voir dans quelle direction partir : quand t est très grand, le dénominateur rend l'intégrande presque nul, sauf pour $x=0$; ainsi on s'attend à ce que seule la contribution de l'intégrale près de 0 compte, si bien que l'approximation $\cos(u)\approx\cos(0)=1$ ne devrait pas être abusive. Il s'agit à présent de quantifier l'écart produit par cette approximation :

$$\left|\int_0^1\frac{\cos(x)}{1+tx}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+tx}\right|=\int_0^1\frac{|\cos(x)-1|}{1+tx}\mathrm{d}x.$$

On majore la « différence petite » du numérateur avec l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. Comme la dérivée seconde du cosinus (qui est l'opposé de lui-même) est de valeur absolue majorée par 1, on a : $\forall u\in\mathbb{R}$, $|\cos(u)-1|\leqslant\frac{u^2}{2}$. Donc :

$$\forall t>0,\quad \left|\int_0^1\frac{\cos(x)}{1+tx}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+tx}\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+tx}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2t}\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{4t}.$$

Or : $\forall t > 0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+tx} = \frac{\ln(1+tx)}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$. D'où le résultat : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)}{1+tx}\mathrm{d}x = \frac{\ln(t)}{t} + \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)$.

☢ Approcher une intégrale par une somme, ou l'intégrande par densité, ou l'intervalle d'intégration par un segment, pour résoudre un problème. ☐

Réponse.

1. Les inégalités de convexité font intervenir des sommes. Il est donc naturel, pour obtenir le résultat voulu, d'appliquer une inégalité de convexité avec une somme de Riemann, puis de passer à la limite. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a, d'après l'inégalité de Jensen :
$$g\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} g\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$
Or le membre de droite est une somme de Riemann associée à $g \circ f$, dont le pas $\frac{1}{n}$ tend vers 0. Comme $g \circ f$ est continue sur [0,1], on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} g\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 g \circ f$.
De même : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f$, et comme g est continue sur $\mathbb{R}$ on en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = g\left(\int_0^1 f\right)$. Ainsi, passer à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus implique le résultat voulu : $\displaystyle g\left(\int_0^1 f\right) \leqslant \int_0^1 g \circ f$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, et que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|nx - \lfloor nx \rfloor| \leqslant 1$, le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives assure que $x \mapsto f(x)\,(nx - \lfloor nx \rfloor)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ également. Ainsi l'intégrale de l'énoncé est bien définie.
Il y a plusieurs façons de motiver les approximations que nous allons faire. Une façon parmi d'autres provient de la réflexion sur la provenance du facteur $\frac{1}{2}$: c'est l'intégrale de $x \mapsto nx - \lfloor nx \rfloor$ sur un intervalle de longueur $\frac{1}{2}$ (comme la fonction est $\frac{1}{n}$-périodique, vous pouvez faire le calcul sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, ce qui rend l'affaire triviale puisque la partie entière y est nulle). Seulement on ne peut pas écrire, en général, de chose du type : $\displaystyle\int fg = \int f \cdot \int g$ (ou $\displaystyle f \int g$, ou...), donc il ne semble pas possible « d'isoler » l'intégrale de $x \mapsto nx - \lfloor nx \rfloor$... Sauf si f est constante, puisque dans ce cas on peut sortir le facteur f de l'intégrale. Cela donne envie de se ramener au cas d'une fonction en escalier (qui n'est rien d'autre qu'une fonction constante par morceaux). Mais l'approximation par une fonction en escalier n'est possible que si l'on est sur un segment : c'est pourquoi nous allons nous y ramener. Pour abréger, ci-dessous nous noterons : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus I} = \int_{\mathbb{R}} - \int_I$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, il existe un segment $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ (qu'on prend non réduit à un point pour pouvoir diviser par $b - a$ ci-dessous) tel que : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus I} |f| \leqslant \varepsilon$. Ensuite, soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ telle que : $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$. On a à ce stade :
$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\,(nx - \lfloor nx \rfloor)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(nx - \lfloor nx \rfloor - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}\setminus I} f(x)\left(nx - \lfloor nx \rfloor - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_I f(x)\left(nx - \lfloor nx \rfloor - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}\setminus I} |f(x)|\left|nx - \lfloor nx \rfloor - \frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x + \left|\int_I f(x)\left(nx - \lfloor nx \rfloor - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\setminus I} |f(x)|\mathrm{d}x + \left|\int_I (f(x) - \varphi(x) + \varphi(x))\left(nx - \lfloor nx \rfloor - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_I |f(x) - \varphi(x)|\left|nx - \lfloor nx \rfloor - \frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left|\int_I \varphi(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right|\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\|f-\varphi\|_\infty(b-a)}{2}+\left|\int_I \varphi(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right|\\
&\leqslant \varepsilon+\left|\int_I \varphi(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right|.
\end{aligned}
$$

Il reste à montrer que cette intégrale est arbitrairement petite quand n est au voisinage de l'infini. Comme φ est une fonction en escalier, on peut l'écrire : $\varphi=\sum\limits_{i=1}^{p} c_i \mathbb{1}_{S_i}$ (quitte à ignorer des valeurs en des points isolés, qui n'ont pas d'effet sur la valeur de l'intégrale), où les S_i sont des intervalles partitionnant le segment I et les c_i des constantes complexes. Soit $i\in[\![1,p]\!]$. Si l'on note α_i et β_i les extrémités de S_i, on a :

$$
\begin{aligned}
&\int_I \mathbb{1}_{S_i}(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_{\alpha_i}^{\beta_i}(nx-\lfloor nx\rfloor)\,\mathrm{d}x-\frac{\beta_i-\alpha_i}{2}\\
&=\frac{1}{n}\int_{n\alpha_i}^{n\beta_i}(u-\lfloor u\rfloor)\,\mathrm{d}u-\frac{\beta_i-\alpha_i}{2}\\
&=\frac{1}{n}\left(\int_{n\alpha_i}^{n\alpha_i+\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}(u-\lfloor u\rfloor)\,\mathrm{d}u+\int_{n\alpha_i+\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}^{n\beta_i}(u-\lfloor u\rfloor)\,\mathrm{d}u\right)-\frac{\beta_i-\alpha_i}{2}.
\end{aligned}
$$

Comme $u\mapsto u-\lfloor u\rfloor$ est 1-périodique, on a :

$$
\begin{aligned}
\int_{n\alpha_i}^{n\alpha_i+\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}(u-\lfloor u\rfloor)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}(u-\lfloor u\rfloor)\,\mathrm{d}u&=\sum_{k=0}^{\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor-1}\int_k^{k+1}(u-\lfloor u\rfloor)\,\mathrm{d}u\\
&=\sum_{k=0}^{\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor-1}\left[\frac{(u-k)^2}{2}\right]_k^{k+1}\\
&=\sum_{k=0}^{\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor-1}\frac{1}{2}\\
&=\frac{\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}{2}.
\end{aligned}
$$

Or : $\left|\displaystyle\int_{n\alpha_i+\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}^{n\beta_i}(u-\lfloor u\rfloor)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \displaystyle\int_{n\alpha_i+\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}^{n\beta_i}|u-\lfloor u\rfloor|\,\mathrm{d}u \leqslant \dfrac{n(\beta_i-\alpha_i)-\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Donc :

$$
0\leqslant\left|\int_I \mathbb{1}_{S_i}(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\frac{\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}{2n}-\frac{\beta_i-\alpha_i}{2}\right|+\frac{1}{2n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,
$$

en utilisant le fait que $\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}x$ pour tout x (exercice facile). D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_I \mathbb{1}_{S_i}(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=0$. Par linéarité de l'intégrale, on a aussi : $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_I \varphi(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=0$. Donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geqslant N$, on ait : $\left|\displaystyle\int_I \varphi(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon$. Si l'on revient à nos premières majorations, pour tout entier $n\geqslant N$ on a donc : $\left|\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,(nx-\lfloor nx\rfloor)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 2\varepsilon$. Pour tout $\varepsilon>0$, on a montré l'existence d'un rang qui réalise cette majoration, d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,(nx-\lfloor nx\rfloor)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x$.

Interversions de symboles.

✓ Utiliser la continuité d'une intégrale à paramètre pour étendre une expression. ☐

Réponse. Posons : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ f(x,t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+xt^2)}$.

1. L'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. De plus : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ |f(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ et il est facile de montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $x \neq 1$. Une décomposition en éléments simples donne :

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2}{1+(xt)^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t &= \frac{1}{x^2-1}\left[x^2 \cdot \frac{1}{x}\arctan(xt) - \arctan(t)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{x^2-1}\cdot\frac{\pi}{2}(x-1) \\ &= \frac{\pi}{2(x+1)}. \end{aligned}$$

3. L'intégrale demandée est $g(1)$. Le calcul ci-dessus valait pour $x \neq 1$ uniquement (pourquoi ?). Mais on peut prendre la limite quand $x \to 1^+$, et par continuité : $g(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\pi}{2(x+1)} = \dfrac{\pi}{4}$.

★ Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_J f_n(t)\mathrm{d}t$ ou $\lim\limits_{x\to a}\displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ avec un théorème d'interversion. ☐

Réponse.

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}\mathrm{d}x$. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions sur $[0,1]$ de terme général $f_n : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{n}}$. Soit $x \in [0,1]$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{n}} = e^0 = 1$, donc $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers $f = 1$. Une étude de variations démontre que $\|f_n - f\|_\infty = \left|e^{-\frac{1}{n}} - 1\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers $f = 1$ (on peut aussi appliquer l'inégalité des accroissements finis à l'exponentielle entre $-\frac{x^2}{n}$ et 0 pour obtenir $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{n}$). D'après le théorème d'interversion limite et intégrale sur un segment, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}\mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1.$$

Nous pouvons aussi appliquer le théorème de convergence dominée, très simplement puisque : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\forall x \in [0,1]$, $\left|e^{-\frac{x^2}{n}}\right| \leqslant 1$, et $\varphi : x \mapsto 1$ est évidemment intégrable sur $[0,1]$ en tant qu'application continue sur un segment.

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^n}\mathrm{d}x$. Soit $(f_n)_{n\geqslant 4}$ la suite de fonctions sur $\mathbb{R}_+$ de terme général $f_n : x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^n}$. Alors $(f_n)_{n\geqslant 4}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

qui est continue par morceaux. De plus, pour tout $n \geqslant 4$ et tout $x \in [0,+\infty[$, on a : $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$, où $\varphi : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (pour $x \geqslant 1$, on obtient cette majoration en écrivant $1 + x^n \geqslant x^n \geqslant x^4$ pour tout $n \geqslant 4$; éliminer le 1 est superflu pour poursuivre).

L'intégrabilité sur [0,1] est vérifiée par continuité sur un segment, et celle sur $[1,+\infty[$ provient du fait que $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ soit une fonction de Riemann d'exposant $2>1$. Alors, d'après le théorème de convergence dominée : $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^n}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$. Pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, posons : $f_n(x)=\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}$. Étudions la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$. Soit $x\in]0,+\infty[$. L'équivalent classique $\sin(u)\underset{u\to 0}{\sim}u$ implique :

$$f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n\times\frac{x}{n}}{x(1+x^2)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{1+x^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{1+x^2}.$$

On en déduit que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $f:x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$. On applique alors le théorème de convergence dominée : la continuité par morceaux est évidente, et pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{n\times\frac{x}{n}}{x(1+x^2)}\leqslant\frac{1}{1+x^2}\quad\text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

où l'on a utilisé l'inégalité $|\sin(u)|\leqslant|u|$, valable pour tout $u\in\mathbb{R}$ et qu'on démontre à l'aide de l'inégalité des accroissements finis entre 0 et u. Or il est facile de montrer par le calcul direct que $\varphi:x\mapsto\dfrac{1}{1+x^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$, et qu'on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée, f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, de même que f, et :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_0^1\frac{\sin(\sin(tx))}{\sin(tx)}\mathrm{d}t$. Posons : $\forall(x,t)\in]0,1]^2$, $f(x,t)=\dfrac{\sin(\sin(tx))}{\sin(tx)}$. Comme $tx\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$, on a $\sin(tx)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$ et donc $\sin(\sin(tx))\underset{x\to 0}{\sim}\sin(tx)$. On en déduit facilement : $\forall t\in]0,1]$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x,t)=1$. De plus :

- l'application $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$ pour tout $x\in]0,1]$;
- l'application $\ell:t\mapsto 1$ est continue par morceaux sur $]0,1]$;
- pour tout $(x,t)\in]0,1]^2$ on a : $|f(x,t)|\leqslant 1$ (on utilise l'inégalité classique $|\sin(u)|\leqslant|u|$ obtenue avec l'inégalité des accroissements finis), et $t\mapsto 1$ est continue par morceaux et intégrable sur [0,1].

On en déduit, grâce au théorème de convergence dominée à paramètre continu, d'une part que $t\mapsto f(x,t)$ (pour tout $x\in]0,1]$) et ℓ sont intégrables sur $]0,1]$ (ce qu'on aurait pu démontrer facilement sans ce théorème), et d'autre part : $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_0^1\frac{\sin(\sin(tx))}{\sin(tx)}\mathrm{d}t=\int_0^1\ell(t)\mathrm{d}t=1$.

★ Démontrer qu'une intégrale à paramètre est continue ou de classe C^1. ☐

Réponse.

1. Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_+\times]0,+\infty[$, notons : $f(x,t)=\frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, l'application $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$: en effet, les relations $|f(x,t)|\leqslant\frac{1}{t^3}$ (pour t assez grand) et $f(x,t)\underset{t\to 0}{\sim}x$ assurent l'intégrabilité par comparaison. Pour tout $t\in]0,+\infty[$, l'application $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $x\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{\cos(xt)}{1+t^2}$, et l'application $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Enfin, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_+\times]0,+\infty[$ on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\frac{1}{1+t^2}=\varphi(t)\text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)},$$

et φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ (démonstration facile). D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, g est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

2. Posons : $\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $f(x,t)=e^{-itx}e^{-t^2}$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et on a $t^2|f(x,t)| = t^2 e^{-t^2} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des croissances comparées, donc : $|f(x,t)| = \underset{t\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $\pm\infty$ en tant que fonction de Riemann d'exposant $2 > 1$ (pour $-\infty$, il suffit par exemple de faire le changement de variable $u = -t$), par comparaison l'application $t \mapsto f(x,t)$ l'est également ; d'où la convergence absolue de $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

(b) Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres : pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente, et pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -ite^{-itx}e^{-t^2}$, et l'application $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$. Enfin, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = te^{-t^2}, (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

et l'application $t \mapsto te^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par un raisonnement analogue à celui de la question précédente (on compare à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $\pm\infty$). Donc, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\int_{\mathbb{R}} ite^{-itx}e^{-t^2}\mathrm{d}t$. Pour obtenir $-\frac{x}{2}g(x)$, on intègre par parties, en intégrant $t \mapsto te^{-t^2}$ (une primitive est $t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$) et en dérivant $t \mapsto ie^{-itx}$ (sa dérivée est $t \mapsto -i^2xe^{-itx} = xe^{-itx}$). Le terme entre crochets est bien défini, puisque $\left|-ie^{-itx}\frac{e^{-t^2}}{2}\right| = \frac{e^{-t^2}}{2} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, et on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -\left[-ie^{-itx}\frac{e^{-t^2}}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-itx} \times \left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)\mathrm{d}t = -\frac{x}{2}g(x).$$

(c) On résout l'équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par g, et on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$. Comme : $g(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$, on conclut.