Du cours aux exercices
Chapitre I — Intégration

1 Aide à la révision du cours

1.1 Intégration sur un intervalle quelconque

1.1.1 Définitions et propriétés de base

Motivation de cette partie

Nous définissons ce qu'est une intégrale sur un intervalle quelconque (intégrale *impropre*), là où les intégrales rencontrées jusqu'à présent étaient systématiquement sur des segments, et on donne les exemples de référence.

Définition 1 (Convergence d'une intégrale impropre).

✓
- Bien noter que la définition ne concerne pas les applications sur un segment. Pourquoi ?
- Montrer qu'une fonction constante non nulle n'est jamais d'intégrale convergente sur $[a,+\infty[$. L'interpréter graphiquement en termes d'aires. Regarder ce que cela donne pour des fonctions dont vous savez calculer des primitives : $\int_a^{+\infty}\cos$, $\int_a^{+\infty}e^x\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty}x^k\mathrm{d}x$, etc. À chaque fois, vous représenter graphiquement les aires correspondantes, pour forger votre intuition de ce qu'est une intégrale convergente ou non.
- Est-ce que le choix de c a une importance ? Peut-on remplacer « s'il existe $c\in]a,b[$ » par « pour tout $c\in]a,b[$ » ?

★
- Pourquoi la convergence d'une intégrale sur $]a,b[$ n'est pas définie à l'aide de limites ? Pour vous aiguiller dans votre réflexion : étudier la nature de $\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^0 x\mathrm{d}x$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}x$. Comparer avec $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^a x\mathrm{d}x$. Qu'en pensez-vous ? En déduire une subtilité dans la définition d'une intégrale convergente quand l'intervalle est $]-\infty,+\infty[$ (ou plus généralement de la forme $]a,b[$). Essayer de comprendre pourquoi la définition donnée est meilleure que, simplement, exiger la finitude de $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$ (indice : chercher des absurdités qui seraient facilement impliquées par certaines des propriétés de base de l'intégrale).
- Trouver une reformulation de la convergence sur $I=]a,b]$ de manière équivalente comme la convergence de l'intégrale d'une certaine fonction sur un intervalle semi-ouvert *à droite* ; cette correspondance assurerait que tout théorème démontré avec $I=[a,b[$ serait valable aussi avec $I=]a,b]$.

Remarque.
Remarque.

✓ Quel est l'intérêt de cette remarque ? Songez à celle analogue réalisée pour les séries, et à ce que vous en avez fait.

Interprétation géométrique.

✓
- Varier les exemples. Jouer sur le signe, pour voir si cette interprétation géométrique peut vous induire en erreur.
- Produire des démonstrations rigoureuses pour les exemples proposés.
- Et pour une intégrale sur $]0,1]$? Quelle est l'interprétation graphique ? Ne pas ignorer le cas où $f(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}\pm\infty$.

Définition-Proposition 2 (Intégrale de fonction positive).

↗ II déf. 12

✓
- Pour une fonction *négative*, que donne cet énoncé ?
- Donner un exemple de fonction réelle telle que $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f$ n'existe pas.
- Se convaincre de la pertinence de la convention $\int_\emptyset f=0$. Pourquoi la rappelé-je ?
- Si vous voulez comprendre quoi que ce soit à la démonstration : 1° revoir la définition de borne supérieure et ce qu'elle implique, 2° revoir la démonstration du théorème de la convergence monotone, qui fait le lien entre limite et borne supérieure, et comprendre pourquoi cela reste valable pour les fonctions, 3° revoir la notion de suite minimisante ou maximisante. Revoir, aussi, les propriétés de la borne supérieure DANS $[0,+\infty]$ (ce n'est pas la même chose que dans $\mathbb{R}$ ni même dans $\overline{\mathbb{R}}$: attention !).

★

- Trouver un énoncé qui ne nécessite pas de distinction de cas sur I, et soit valable aussi pour $I =]a,b[$.
- Montrer que les égalités avec des bornes supérieures sont fausses si l'on n'a pas une fonction positive (on reste dans le cas de f réelle). Vous trouverez déjà des contre-exemples avec un SEGMENT I.
- Vérifier les conventions de calcul dans $[0,+\infty]$ (et en particulier, la démonstration de l'identité $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ permet de comprendre pourquoi la convention $0 \times (+\infty) = 0$ est pertinente).
- La partie la plus subtile de la démonstration est, à mon avis, la preuve que $\int_a^b f \leqslant \sup\limits_{J\in\mathscr{J}} \int_J f$. Comprendre pourquoi j'ai procédé ainsi (pour cela : essayez de démontrer la majoration sans vous aider du cours), et dans quelles configurations semblables on peut avoir la même idée.
- Dans la démonstration de (b), j'obtiens directement tout l'énoncé d'un seul coup pour $I = [a,b[$ (l'équivalence, et l'égalité ensembliste). Est-ce possible d'en faire autant pour $I =]a,b[$? Pourquoi ne l'ai-je pas fait ?
- Dans la démonstration de (c), observer où interviennent les deux hypothèses sur la suite $(J_n)_{n\geqslant 0}$.
- Montrer que (c) reste vrai si on rajoute l'une des deux hypothèses suivantes : 1° l'intégrale $\int_I f$ converge, 2° pour toute suite exhaustive de segments $(J_n)_{n\geqslant 0}$, la suite $\left(\int_{J_n} f\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers une même limite.

☢ Dans (c) : si la suite n'est plus croissante, j'affirme qu'une partie de l'énoncé reste valable : laquelle ?

Proposition 3 (Extension des propriétés de base).

✓

- Est-ce que l'ensemble des fonctions d'intégrale divergente est un espace vectoriel ? La réponse est facile.
- Item (d) : si f n'est pas supposée positive, est-ce que la convergence de $\int_J f$ va de soi ?
- Item (e) : revoir si besoin pourquoi la continuité est essentielle.
- Items (d) et (e) : les démontrer sans utiliser la définition-proposition 2. Pourquoi l'ai-je privilégiée ?
- Linéarité dans le cas de fonctions positives : que peut-il se passer si on prend $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ quelconque ?

★ Y a-t-il un lien entre les natures de $\int_I f$, $\int_I \mathrm{Re}(f)$ et $\int_I \mathrm{Im}(f)$? Même question, si f est réelle, entre les natures de $\int_I f$, $\int_I \max(f,0)$ et $\int_I \max(-f,0)$. Y réfléchir éventuellement plus tard, après avoir vu des exemples explicites. L'intérêt de cette réflexion : si c'est vrai, alors nous avons un moyen de nous ramener à des fonctions positives systématiquement.

Proposition 4 (Relation entre les natures de $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f$).

→ ex. 8

✓

- Dans la démonstration, vérifier *vraiment* que : $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [a,a_n] = [a,b[$.
- Proposer un énoncé analogue avec $I =]a,b]$.
- Vérifier par un contre-exemple que la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f$ ne suffit pas à avoir celle de l'intégrale.
- On utilise souvent cet énoncé avec $I = [a,+\infty[$. Sauriez-vous néanmoins fabriquer une telle suite avec $I = [a,b[$ et $b \neq +\infty$?

★

- Montrer qu'avec une hypothèse plus forte, on peut avoir la réciproque.
- Proposer un énoncé analogue avec $I =]a,b[$. Si vous séchez : y revenir après avoir vu les familles sommables.

Proposition 5 (Caractérisation en termes de primitives).

✓

- Alléger l'énoncé quand $I = [a,b[$ ou $I =]a,b]$.
- Si f est seulement continue par morceaux, que donne cet énoncé ?
- Vérifier le cas positif. Le seul cas à traiter est évidemment celui d'une intégrale divergente.

Remarque.

✓ Généraliser, selon la forme de l'intervalle.

Exemple 1.

Exemple 2. ♡

✓
- Pourquoi passé-je par $-\ln$ plutôt que $\ln$? Est-ce si grave si ne le fais pas ? Pourquoi ?
- Pourquoi fais-je un calcul direct de $\int_0^1 (-\ln)$, alors que dans l'exemple précédent je prends soin de passer par $\int_0^x \cos(t)e^{\sin(t)}\mathrm{d}t$ au lieu de calculer directement $\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{\sin(t)}\mathrm{d}t$?
- Revoir si besoin le calcul de primitive du logarithme (elle n'est pas usuelle et il faut donc savoir la retrouver).

Proposition 6 (Cas d'un prolongement continu)**.**

✓
- Pourquoi l'énoncé est-il évident si f est continue au lieu d'être continue par morceaux ?
- J'affirme dans la démonstration qu'une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée. Pourquoi ? Et atteint-elle ses bornes ?

Remarque.

✓ Vérifier ce qu'affirme la remarque. Pourquoi n'utilisé-je pas cette remarque pour formuler tous les énoncés du cours dans le cas $I =]a, b[$?

Proposition 7 (Intégrales de référence)**.**

✓
- Commencer à dresser une analogie avec les séries. Vous pouvez même étendre cette analogie en comparant l'intégrale de l'exponentielle décroissante et la série géométrique (en effet $q^n = e^{n\ln(q)}$ est une exponentielle déguisée), mais ce n'est pas le plus important.
- Nature de $\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^s}$: et si $b = +\infty$?
- Reprendre ces intégrales en remplaçant α et s par des nombres complexes. Revoir si besoin comment se calcule la limite d'une fonction complexe.

★ Alléger l'énoncé avec des changements de variable adéquats. Par exemple : pourquoi la nature de $\int_0^{+\infty} e^{\pm t}\mathrm{d}t$ suffit-elle à avoir la nature de $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ pour tout α non nul ?

Remarque.

✓ Appliquer l'observation sur la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, à d'autres fonctions que celles de Riemann. En déduire, à peu de frais, de nouvelles natures connues d'intégrales.

☢ Démontrer ce que je n'affirme que de manière heuristique : si $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ est continue et strictement décroissante, avec $\lim_0 f = +\infty$ et $f(1) = 1$, alors $\int_{]0,1]} f$ et $\int_{[1,+\infty[} f^{-1}$ sont de même nature. On pourra commencer par le cas où f est dérivable.

Mise en garde 1.

★ Se demander s'il y a tout de même des résultats partiels (du type : si une intégrale converge, alors l'intégrande a une limite aux extrémités). Vous pourrez éventuellement y revenir après le traitement de la section suivante.

Après votre révision de cette partie

Le plus important est de retenir : 1° la définition d'une intégrale convergente dans chaque cas (le cas où l'on intègre sur $[a, +\infty[$ est cependant le plus fréquent), 2° les exemples de référence, *surtout les exemples de fonctions de Riemann*, en notant bien la différence selon l'intervalle d'intégration, 3° ce qui change, aussi bien dans la théorie que dans les calculs pratiques, lorsqu'on intègre une fonction positive (ou du moins de signe constant).

1.1.2 Comparaison des intégrales de fonctions positives

Motivation de cette partie

Comme pour les séries, on étudie la nature de la plupart des intégrales grâce à un théorème de comparaison, qui se décline ici sous plusieurs formes selon la forme de l'intervalle d'intégration. On l'illustre par des exemples, et l'on définit la convergence absolue (qui sert à étudier le cas de fonctions non positives, mais qui, on le verra, a son importance dans les théorèmes d'interversion de symboles).

Lemme 8 (Comparaison des intégrales de fonctions positives)**.**

✓ Remarquer l'analogie avec les énoncés sur les séries à termes positifs, dans ce lemme et le théorème suivant. Comparer les schémas de démonstration, afin de se convaincre que plus généralement : quand on sait démontrer un résultat sur les séries, on sait *souvent* (pas toujours ! attention !) démontrer le même énoncé sur les intégrales, et réciproquement.

★ Dans le prolongement de la remarque ci-dessus : montrer qu'une somme de série EST un cas particulier d'intégrale impropre. En déduire que la théorie des intégrales impropres aurait pu être utilisée pour démontrer presque tous les résultats sur les séries (vérifier néanmoins qu'il n'y a pas de raisonnement circulaire, et attention aux subtilités venant du fait que la convergence de $\left(\int_a^n f\right)_{n\geqslant 0}$ n'équivaut pas à l'existence d'une limite quand $x \to +\infty$ pour $\int_a^x f$).

Théorème 9 (Théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives)**.**

✓
- Comprendre qualitativement, éventuellement avec des dessins à l'appui, pourquoi le cas $]a, b[$ ne peut être couvert par ce théorème. Comprendre alors comment utiliser ce théorème dans ce cas-là. Si l'on n'a pas d'idée : bien relire la définition d'une intégrale convergente sur $]a, b[$, puis les exemples plus bas.
- Remarquer que le lemme 8, au contraire, ne fait aucune hypothèse sur l'intervalle. Pourquoi cette différence ?
- L'hypothèse de signe a-t-elle besoin d'être sur les *deux* fonctions ? Et sur tout l'intervalle ?

★ Essayer de trouver des contre-exemples dans le cas où les fonctions ne sont pas de signe constant. Si vous n'y arrivez pas encore maintenant : y réfléchir plus tard, quand on aura vu des exemples plus variés et non positifs.

Exemple 3.

✓ Bien vérifier que si f tend vers 0, tout peut arriver.

Exercice 1.

Exercice 2.

Mise en garde 2.

✓
- Donner une expression analytique de f. En déduire un calcul analytique de $\int_n^{n+1} f$.
- Sur le même modèle, produire des exemples où la fonction est bornée mais sans limite en l'infini.

★
- Peut-on produire des contre-exemples avec des fonctions monotones ?
- Analyser ce qui permet d'avoir l'implication « $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Rightarrow \lim_{+\infty} u_n = 0$ » et qui ne s'adapte pas au cas des fonctions. En analysant ce qui permet cette implication : 1° *conjecturer* une hypothèse supplémentaire sur f pour que l'implication « $\int_a^{+\infty} f$ converge $\Rightarrow \lim_{+\infty} f = 0$ » soit vraie, 2° comprendre plus généralement quel type d'énoncé peut être vrai avec les séries et faux avec les intégrales.

☢ Si vous avez fait une conjecture ci-dessus : la démontrer.

Méthode 1.

✓ **Lecture conseillée.** *Méthodes*, sections 1 et 2. Ignorer provisoirement ce qui ne concerne pas les fonctions positives.

Exemple 4. ♡

✓

— Bien comprendre pourquoi je me suis placé sur $[1,+\infty[$ alors qu'il n'y a pas pourtant pas de problème de continuité sur [0,1] (ni de positivité) pour $t \mapsto e^{-t^2}$. *C'est très important.* La raison n'est pas la même selon que je raisonne par comparaison ou par un calcul direct.

— Redémontrer la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t$ (quand $a > 0$) avec la méthode « $t^\alpha f(t)$ ». Se convaincre que finalement, les intégrales de Riemann suffisent comme intégrales de référence.

— Généraliser, en considérant d'autres intégrales ayant un facteur exponentiel. En déduire une stratégie simple pour obtenir la convergence et qui doit devenir un RÉFLEXE. Est-ce qu'une exponentielle décroissante est *toujours* synonyme d'intégrale convergente ?

Exemple 5.

✓

— À la lumière de cet exemple et du précédent, bien comprendre la nécessité de préciser d'emblée *où* c'est continu, et pourquoi vous vous exposez à des erreurs si vous l'omettez.

— Comment fut trouvé l'exposant de t^α dans l'étude en 0, où l'on a utilisé la méthode « $t^\alpha f(t)$ » ? Ce n'est pas au hasard et il faut être méthodique. Voir *Méthodes* si besoin.

— Redémontrer la convergence de $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ avec la méthode « $t^\alpha f(t)$ ». Être prudent vu que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ ne converge pas à la même condition sur α que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

— Dans cet exemple et le précédent, essayer de voir si on aurait aussi pu remplacer la méthode utilisée par une méthode « $e^{-at}f(t)$ ». Comprendre pourquoi ceci aurait été une très mauvaise idée, et pourquoi les fonctions de Riemann sont des fonctions de référence suffisantes. Ne plus jamais recommencer.

★ Généraliser cet exemple : quelle est la nature de $\int_0^1 \frac{(\ln(t))^\alpha}{t^\beta(1-t)^\gamma}\mathrm{d}t$, selon les valeurs (réelles) de α, β et γ ?

Définition 10 (Convergence absolue et fonction intégrable)**.**

✓ Pourquoi, lorsqu'on étudie l'intégrabilité de $f : [a,b[\to \mathbb{C}$, seule l'intégrabilité au voisinage de b nous intéresse ? Quel lien entre cette intégrabilité et celle sur $[a,b[$?

★

— Est-ce que la propriété « être intégrable » se préserve par convergence simple ? Et uniforme ? On pouvait d'ailleurs se poser la même question avec « être d'intégrale convergente ».

— Est-ce que l'intégrabilité de $f : I \to \mathbb{R}$ implique celle des fonctions positives $\max(f,0)$ et $\max(-f,0)$? Et réciproquement ? Même question avec l'intégrabilité de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ pour f complexe.

Proposition 11 (La convergence absolue implique la convergence)**.**

✓

— Reprendre la démonstration de 1re année qu'une série absolument convergente est convergente. Vérifier si elle s'adapte au cas des intégrales, et se demander pourquoi j'ai choisi de procéder autrement.

— Adapter la démonstration au cas $I =]a,b]$, puis $I =]a,b[$. Il s'avère que contrairement à d'autres propositions où ce cas est pénible, ici c'est relativement direct : pourquoi ?

★

— À quoi « ressemble » une fonction d'intégrale convergente mais non intégrable ? Je parle d'interprétation géométrique. Se poser la question éventuellement plus tard, après avoir vu un exemple explicite.

— Adapter la démonstration pour avoir directement ceci : pour toute suite exhaustive de segments $(J_n)_{n\geqslant 0} = ([a_n,b_n])_{n\geqslant 0}$, la suite $\left(\int_{J_n} f\right)_{n\geqslant 0}$ converge et sa limite ne dépend pas de la suite $(J_n)_{n\geqslant 0}$: faire le lien avec l'item (c) la définition-proposition 2. En fait, dans les (très) anciens programmes, c'est ainsi qu'on définissait l'intégrale d'une fonction intégrable (comme la limite commune obtenue avec toute suite exhaustive de segments), tout en justifiant son existence (et on ne disait pas qu'elle était impropre). On définissait *ensuite* l'intégrale d'une fonction non intégrable en précisant qu'elle était impropre dans ce cas.

Exemple 6.

✓ Se convaincre qu'on comprend l'identité : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$. Elle reviendra souvent cette année.

☢ Et si $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$, que dire ? Ce n'est pas facile. Y revenir éventuellement plus tard, quand on aura traité des intégrales de fonctions complexes par d'autres moyens que la convergence absolue.

Proposition 12 (Espace vectoriel $\mathrm{L}^1(I, \mathbb{C})$ des fonctions intégrables)**.**

✓

- Se demander s'il en est de même pour les séries : si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont absolument convergentes, est-ce que $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + \lambda v_n)$ aussi ? Imiter les démonstrations.
- Est-ce que l'ensemble des fonctions NON intégrables est un espace vectoriel ?

Remarque.

★

- Montrer qu'en ajoutant une hypothèse raisonnable sur f et g, il devient vrai que si f et g sont intégrables sur $[a, +\infty[$ alors leur produit aussi. Essayer ensuite de produire un contre-exemple sans cette hypothèse.
- Et pour les séries ? Est-ce que, si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ convergent absolument, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n v_n$ converge (absolument) ?
  Ce que je fais là, songez à le faire de vous-mêmes régulièrement. Les cas où la situation diffère sont d'ailleurs plus instructifs que les autres. Faire le lien avec les commentaires formulés dès le début de la section.

Proposition 13 (Espace vectoriel $\mathrm{L}^2(I, K)$ des fonctions de carré intégrable)**.**

✓

- Démontrer l'intégrabilité de fg par un autre moyen que celui du cours.
- Revoir une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la raison pour laquelle il suffit d'avoir une forme bilinéaire *positive* pour qu'elle soit vraie.
- Réviser ce qui est fortement suggéré par l'énoncé, à savoir que $(f, g) \mapsto \int_I fg$ est un produit scalaire (sur... ?).

★ Et si on enlève le module, est-ce que la convergence de $\int_I f^2$ et $\int_I g^2$ implique celle de $\int_I fg$?

Après votre révision de cette partie

1. Bien observer les différentes étapes dans l'étude d'une convergence d'intégrale : continuité, étude au voisinage d'un point problématique, prolongement par continuité quand c'est possible. Tirer au clair ce qu'on fait quand l'intervalle est ouvert (des deux côtés), et pourquoi on ne peut pas utiliser le théorème de comparaison directement. Faites-vous un modèle de rédaction si besoin.
2. Dresser tous les parallèles avec le cas des séries, et ce qui en diffère.
3. Essayer le premier *Savoir-faire à vérifier* de la page 16.

1.1.3 Intégration par parties et changement de variable

Motivation de cette partie

Nous généralisons les deux formules connues de calcul intégral au cas des intégrales impropres. En plus de leur application classique au calcul, comme en 1re année, elles sont ici des moyens alternatifs de montrer la convergence de certaines intégrales problématiques (à l'instar du théorème spécial des séries alternées pour les séries), et c'est là la grande nouveauté de ces formules, sur laquelle s'attarder. Nous donnons ainsi un exemple de référence de fonction non intégrable mais d'intégrale convergente.

Proposition 14 (Intégration par parties)**.**

✓

- Proposition 14 : *uniquement en regardant l'égalité*, se demander ce qu'il est nécessaire de supposer sur $f'g$, fg' et $[fg]_a^b$, pour espérer que les trois quantités de la formule existent. Comparer avec les hypothèses, et en déduire qu'il est facilement possible de les retrouver.
- Bien remarquer les différences dans les hypothèses, avec le cas de l'intégration sur un segment.
- **Lecture conseillée**. *Méthodes*, section 4.3.

★

- Est-ce que cette formule est valable si f' et g sont positives *sans hypothèse de convergence* ?
- Est-ce que cette formule conserve la convergence *absolue* ? Un exemple plus loin vous éclairera sans doute.

Exemple 7 (guidé). ♡

✓

- Reprendre l'étude pour s complexe.
- Étude d'intégrabilité au voisinage de 0 : on a $e^{-t}t^{s-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-s}}$, et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-s}}$ diverge toujours d'après la mise en garde 1. Pourtant on n'en a pas déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t$ diverge toujours : comment expliquer cette bizarrerie apparente ? Si besoin, regarder du côté des hypothèses du théorème de comparaison.
- Utiliser cette fonction pour interpoler les coefficients binomiaux.
- Connaissez-vous d'autres fonctions vérifiant de telles équations fonctionnelles ? $f(s+1) = s+f(s)$ par exemple ?

★

Utiliser l'équation fonctionnelle pour en déduire un prolongement de Γ sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. En déduire qu'on peut donner un sens à la factorielle de presque n'importe quel nombre complexe. Comparer avec ce que vous donnent certains logiciels de calcul formel quand on leur demande de calculer $\pi!$, $(1+i)!$ ou $\left(-\frac{3}{2}\right)!$.

Exemple 8 (guidé). ♡

✓

- Essayer de comprendre pourquoi on montre la convergence de l'intégrale avec une intégration par parties, alors qu'on ne l'a pas fait pour tous les exemples précédents : pourquoi était-ce inutile avant, mais décisif ici ? Il est *crucial* de comprendre la motivation de cette technique, pour savoir l'invoquer dans la bonne circonstance.
- Bien comprendre le choix de primitive : pourquoi $t \mapsto 1-\cos(t)$ et non $t \mapsto -\cos(t)$? Qu'est-ce qui aurait posé problème sinon ? Et pourquoi l'ajout de 1 résout ce problème ? Cette constante est-elle choisie au hasard, à tâtons ? En déduire un cadre plus général où l'on intègre par parties en prenant $f-c$ au lieu de f comme primitive de f' (et avec c que vous expliciterez).
- Divergence de $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$: comment ai-je choisi les intervalles de la minoration ? Sont-ils vraiment importants ? Pouvais-je les prendre de longueur variable par exemple ?
- Comment ai-je choisi les intervalles $[k\pi,(k+1)\pi]$ de la relation de Chasles ? Pouvais-je prendre $[2k\pi,2(k+1)\pi]$?

★

- **Lecture d'approfondissement.** *Méthodes*, section 3, pour prendre plus de hauteur sur la technique employée. Essayer de redémontrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ après cette lecture. La méthode de cette lecture donne *deux* informations sur cette intégrale, outre sa convergence : lesquelles ? arriveriez-vous à les retrouver *via* la méthode de l'intégration par parties ?

☢

Peut-on donner une estimation de la « vitesse de convergence » de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ et de la « vitesse de divergence » de $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$? Ce que j'entends par là : donner un équivalent (ou un encadrement précis) de $\int_n^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ et $\int_0^n \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

Exercice 3.

★ Le faire. Ce n'est pas facile, bien qu'une analyse géométrique donne l'impression que c'est évident (oscillations de plus en plus grandes). Penser à l'une des mises en garde précédentes pour comprendre pourquoi un argument précis est attendu. Commencer par la convergence absolue, plus simple.

Remarque.

Proposition 15 (Changement de variable)**.**

✓

- Grâce à un changement de variable dans l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$, qui vous ramène à une intégrale de la forme $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, trouver une nouvelle preuve que l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$ converge si et seulement si $s < 1$.
- Bien remarquer les différences dans les hypothèses, avec le cas de l'intégration sur un segment.
- Essayer de la démontrer. Comprendre d'où sort cette hypothèse de monotonie, alors que la formule de 1re année (pour les fonctions continues sur un segment) ne fait pas figurer cette hypothèse. En fait, on a besoin de la monotonie y compris sur un segment, si l'on intègre une fonction continue *par morceaux* : se demander ce qui peut poser problème (c'est une complication inutilement technique).
- Faire le changement de variable $u = ax$ dans une intégrale de la forme $\int_0^{+\infty} f(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$. Qu'en pensez-vous ? Et si $u = \frac{1}{x}$, sous quelle hypothèse supplémentaire sur f cela peut donner un résultat non trivial sur $\int_0^{+\infty} f(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$? Connaissez-vous des fonctions vérifiant ladite hypothèse ?

★

- En partant d'une intégrale convergente de la forme $\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$, produire une intégrale convergente de la forme $\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin(u^\beta)|}{u}\mathrm{d}u$. Ensuite, essayer d'appliquer la méthode de la section 3.1 de *Méthodes* à cette intégrale : la méthode échouera nécessairement, vu que c'est une intégrale convergente. Essayer de comprendre ce qui coince. À l'inverse, arriverez-vous à démontrer la convergence par comparaison à une série ?
- Est-ce que cette formule est valable si f est positive *sans hypothèse de convergence* ?
- Est-ce que la formule du changement de variable conserve la convergence *absolue* ?

Exemple 9. ← ex. 8

✓ Est-ce que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$ converge absolument ?

★ Est-ce que plus généralement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t^\alpha)\mathrm{d}t$ converge ? Et $\int_0^{+\infty} \sin(P(t))\mathrm{d}t$ avec P polynôme ?

Remarque.

✓

- Vérifier les détails qui ont été omis.
- Qu'est-ce que la formule du changement de variable implique pour les intégrales de fonctions paires ? impaires ? La question se pose plus généralement avec les fonctions vérifiant une relation du type $f(t) = f(b - t)$ pour tout t.

Après votre révision de cette partie

1. **Lecture obligatoire.** *Méthodes*, sections 1 et 2. Refaire soi-même cette synthèse (voire une fiche). « Inventer » un exemple type pour chaque situation de l'encart rouge.
2. Bien identifier quand on montre une convergence d'intégrale à l'aide d'une intégration par parties. Récapituler en deux ou trois points les étapes à suivre. L'exemple de $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est à savoir traiter les yeux fermés.
3. Essayer les deux derniers *Savoir-faire à vérifier* de la page 16.
4. On remarque qu'aucun analogue du théorème spécial des séries alternées n'a été proposé. Sauriez-vous en proposer un ? Voyez-vous un théorème qui, malgré tout, remplit à peu près le même rôle ?

1.2 Étude asymptotique des intégrales

Motivation de cette partie

Nous donnons des techniques pour trouver des équivalents asymptotiques d'intégrales. Nous découvrons notamment que, sous certaines conditions, il est possible d'intégrer les relations de comparaison ! Chose étonnante en particulier dans le cas des équivalents où, vous le savez, il y a incompatibilité avec beaucoup d'opérations élémentaires.

← th. 9

Théorème 16 (Intégration des relations de comparaison)**.**

✓

— Bien détecter, dans la démonstration, où la positivité intervient. Il y a au moins deux endroits.

— Les hypothèses sont sur la nature de $\int_a^b g$. Aurait-on pu avoir le même théorème en les faisant sur $\int_a^b f$?

— Compléter la démonstration en faisant le cas $b = +\infty$.

— Chercher des contre-exemples à l'équivalence (ou autre relation) des intégrales $\int_a^x f$ et $\int_a^x g$ lorsque les intégrales sur $[a, b[$ *convergent*. Il n'y a pas besoin de chercher très loin.

★

Trouver des contre-exemples dans le cas où g n'est pas de signe constant. Intuitivement : faire en sorte que les aires algébriques se compensent à cause de l'alternance du signe, de sorte que $\int_a^x g$ soit « petit » bien que g soit « gros ». Si vous vous débrouillez bien, vous pouvez même avoir : $\int_a^x g = \underset{x\to b}{o}\left(\int_a^x f\right)$, bien que : $f = \underset{x\to b}{o}(g)$. Vous en déduisez alors un contre-exemple également dans le cas $f \underset{b}{\sim} g$.

Exemple 10.

✓

— Créez une « banque de données » personnelle d'équivalents de référence. Pour cela, raisonnez à l'envers en partant d'abord d'une fonction connue mais « générique » (c'est-à-dire dépendant de paramètres a, b, c, etc., quelconques), puis en trouvant une intégrale non triviale qui lui est équivalente. C'est-à-dire : prenez des produits de vos fonctions de référence préférées (avec exponentiation). Trouvez un équivalent simple de leurs dérivées, et intégrez le résultat obtenu avec le théorème précédent. Si vous faites cela sérieusement, vous connaîtrez des ordres de grandeur de nombreuses intégrales ($\int_0^x t^a e^{t^b} \mathrm{d}t$, $\int_2^x t^a (\ln(t))^b \mathrm{d}t$, etc.), ce qui vous aidera en exercice lorsque vous aurez à calculer des limites du type : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$: vous aurez déjà une idée du comportement de l'intégrale. Le cas spécifique des intégrales avec un facteur exponentiel ou logarithmique est à méditer : on peut parfois prédire l'équivalent obtenu par une analyse qualitative.

— Comprendre comment j'ai pu trouver l'idée de soustraire $\frac{1}{(\ln(t))^2}$. Si vous avez bien fait le travail ci-dessus, cela vous paraîtra plus naturel à terme.

— Au vu de ce qu'on a fait dans cet exemple, et de ce que je raconte ci-dessus : se convaincre que la formule de l'intégration par parties a souvent la même efficacité que ce théorème d'intégration.

Exemple 11.

✓

— Si on veut seulement montrer que $\left(\int_0^1 t^n f(t) \mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 (sans équivalent), que faire de plus simple ?

— Pourquoi est-ce $f(1)$ qui apparaît naturellement et pas, par exemple, $f(0)$? C'est important de le comprendre pour savoir dans quelle direction démarrer.

— Pourquoi penser à remplacer η par $\min(1, \eta)$? Deux raisons à cela ?

— Remplacer t^n par d'autres fonctions dépendant de t^n (exemples : $\mathrm{ch}(t^n)$, $\mathrm{sh}(t^n)$, $\arctan(t^n)$) et voir ce qu'on obtient. C'est là qu'on verra si vous avez compris l'heuristique de l'exemple.

★

En rajoutant de la régularité (f de classe C^∞ pour simplifier), affiner le développement asymptotique. On peut aller à un ordre arbitrairement élevé. Se souvenir de ce qui permet *concrètement* de mesurer l'écart entre f et $f(1)$. Idée extrêmement fréquente en analyse.

Après votre révision de cette partie

Lecture conseillée. *Méthodes*, section 6.2, qui fait un état des lieux des différents moyens d'avoir un équivalent ou développement asymptotique d'une intégrale.

1.3 Approximations d'intégrales

Motivation de cette partie

Nous donnons trois résultats dont l'intérêt est principalement théorique : l'approximation des intégrales quelconques par des intégrales sur des segments (afin de pouvoir utiliser des résultats uniquement valables sur les segments), et des théorèmes d'approximation. Dans un contexte d'intégration, ils permettent de se ramener à des fonctions plus simples à intégrer (localement constantes, polynomiales).

Proposition 17 (Approximation par une intégrale sur un segment)**.**

✓ Est-ce que ce résultat est vrai si on remplace « f intégrable » par « l'intégrale $\int_I f$ converge » ? Si oui, pourquoi me suis-je limité à cette hypothèse plus forte ? Si non, pourquoi ?

Proposition 18 (Densité des fonctions en escalier)**.**

✓
- Si vous avez vu ce résultat en 1re année : le revoir. C'est une belle application du théorème de Heine. Comprendre son interprétation géométrique.
- Y a-t-il unicité de la suite qui converge uniformément vers f ?
- Réfléchir à ce qui peut être l'intérêt de ce résultat : que peut-on dire des fonctions en escalier en intégration ?

★ S'inspirer de ce résultat pour démontrer d'autres résultats de densité, avec des fonctions à peine plus compliquées que les fonctions en escalier, mais avec f continue.

Théorème 19 (Théorème de Weierstraß)**.** → ex. 13

✓ Y a-t-il unicité de la suite qui converge uniformément vers f ?

★
- Que se passe-t-il sur $\mathbb{R}$? Existe-t-il des fonctions qui ne sont pas limite uniforme d'applications polynomiales ? (Des exercices du chapitre préliminaire en discutent.)
- Que se passe-t-il sur d'autres intervalles bornés ? Par exemple, si f est continue sur $]0,1]$ et limite uniforme de fonctions polynomiales, que peut-on en dire ? Réfléchissez aux propriétés préservées par convergence uniforme.
- Trouver une suite d'applications polynomiales explicite pour les fonctions usuelles (adaptez le segment pour vous simplifier la vie). Vous n'y arriverez peut-être pas pour toutes. Les développements limités peuvent vous aider à conjecturer des applications polynomiales qui conviendraient.

Après votre révision de cette partie

Lecture conseillée. *Méthodes*, section 9, pour avoir une idée du cadre d'utilisation de ces résultats. Le propos reste cependant très théorique et général, et il faudra regarder du côté des exercices pour des applications concrètes.

1.4 Interversions de symboles

1.4.1 Passage à la limite sous le signe intégrale

Motivation de cette partie

L'objectif est de voir si l'on peut passer à la limite « comme on pense » dans une intégrale. Nous fournirons toutes sortes d'exemples pour mettre en valeur sous quelles hypothèses c'est licite : l'idée est qu'il faut empêcher l'apparition de pics.

✓
- Contre-exemple : comment trouver l'expression explicite de f_n pour tout n ? (En particulier les pentes.) Pourquoi avoir mis l'expression sous la forme $y = a(x - x_0) + b$ au lieu de $y = ax + b$ pour faciliter son obtention ? Comprendre comment on « pouvait penser » à cet exemple, en « faisant disparaître subitement la masse ».
- Vérifier que la suite de fonctions ainsi définie ne converge pas uniformément vers la fonction nulle.

Théorème 20 (Interversion limite-intégrale sur un segment)**.**

✓
— Chercher pourquoi la démonstration nécessite d'être sur un segment.
— Peut-on retrouver la limite de l'intégrale de l'exemple 11 avec ce théorème ? Et l'équivalent ?

★ Réciproquement, si $(F_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout segment de I vers F, est-ce que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers f ? Méditer sur des exemples antérieurs.

Exemple 12.

✓ Obtenir le calcul ou une majoration de $\|f_n - f\|_\infty$ autrement. Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment ? Sur $\mathbb{R}$? Se représenter visuellement ces fonctions pour comprendre pourquoi « la convergence uniforme (ou non) se voit ».

★ Essayer d'obtenir cette limite *à l'ancienne*, sans ce théorème d'interversion.

Exemple 13. ♡

✓
— Et si f est continue par morceaux ? Peut-on obtenir le même résultat, quitte à se placer sur une bonne subdivision permettant d'utiliser le théorème de Weierstraß ?
— Pour l'interprétation géométrique : faire des révisions de 1re année si besoin, pour en prendre toute la mesure. Y consulter d'autres contre-exemples à l'égalité $E = F \oplus F^\perp$.

★ On démontre dans cet exemple que si $(P_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors $(P_n f)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f^2. Peut-on le généraliser ? Si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers f, est-ce que $(f_n g)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers fg ?

☢ Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, on a : $\mathbb{R}_n[X]^\perp \neq \{0\}$. Êtes-vous capable d'en expliciter des fonctions ?

Remarque.

✓
— Pourquoi, ici, n'ai-je pas déterminé la limite simple *avant* de montrer la convergence uniforme ?
— J'avais expliqué en début de section que c'est l'apparition de « pics » qui produit les contre-exemples. Et pourtant il n'y en a pas ici. Comprendre pourquoi, malgré tout, ce contre-exemple est de même nature.

★ Et si l'on remplace le segment par un intervalle borné, dans le théorème 20 : a-t-on toujours un contre-exemple ?

Théorème 21 (Théorème de convergence dominée)**.**

✓
— **Lecture obligatoire.** *Méthodes*, section 5 (plus spécifiquement la section 5.1) : pour trouver la fonction de domination. Analyser les exemples qui suivent à la lumière de cette lecture.
— Observer que hormis l'hypothèse du domination, on peut retrouver les hypothèses à partir de ce qu'on veut démontrer (pourquoi la continuité par morceaux, et non la continuité ou classe C^1 ?).
— Refaire vos exercices de calcul de limites de suites d'intégrales dans vos feuilles d'exercices de 1re année. Apprécier la plus-value du théorème.
— Réfléchir à ses avantages sur le théorème 20 (il y en a au moins deux). Si vous n'êtes pas inspirés : y revenir plus tard, après quelques exemples (notamment : se convaincre que le théorème 20 NE peut PAS s'appliquer aux exemples 14 et 15). Vous pouvez aussi comparer la difficulté dans la vérification des hypothèses, pour l'exemple 12, selon le théorème utilisé.
— Remarquer que ce théorème ne peut pas s'appliquer lorsqu'on essaie de montrer que la limite est *infinie*. Pourquoi ? Que peut-on faire en ce cas ?

★ Peut-on retrouver la limite de l'intégrale de l'exemple 11 avec ce théorème ? Et l'équivalent ?

- Chercher une suite d'intégrales où le théorème 20 s'applique mais PAS le théorème de convergence dominée.
- En utilisant le fait que les séries soient des cas particuliers d'intégrales impropres, peut-on traduire cet énoncé comme un énoncé sur les séries ?

Méthode 2. 5

✓ **Lecture obligatoire.** *Méthodes*, section 5. Ne pas négliger l'importance de cette lecture : il y aura de l'hypothèse de domination et de la majoration uniforme à toutes les sauces cette année.

Exemple 14.

✓ Comparer avec le calcul de cette limite qui a probablement été fait en 1re année (et si ce n'est pas le cas : essayer de l'obtenir sans théorème d'interversion). Apprécier la valeur ajoutée.

Arrive-t-on à retrouver l'équivalent $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ avec ce théorème ?

Exemple 15. ♡

✓
- Concentrer ses efforts sur l'obtention de φ. Comprendre pourquoi on a dû changer de majoration selon l'intervalle, pourquoi il fallut $n \geqslant 2$, pourquoi la majoration proposée est MÉTHODIQUE et ne nécessite aucun flair. À mettre en parallèle avec la lecture de *Méthodes* exigée.
- Est-ce que l'intégrande converge sur $\mathbb{R}_+$? Sur tout segment de $\mathbb{R}_+$?

Après votre révision de cette partie

1. **Lecture conseillée.** *Méthodes* du chapitre *Suites et séries de fonctions*, section 5.1 : pour apprendre à retrouver les hypothèses. Sauter ce qui concerne des séries. S'exercer quotidiennement jusqu'à ne plus se tromper.
2. **Lecture conseillée.** *Méthodes* du chapitre *Suites et séries de fonctions*, section 5.4. Pour les passages à la limite dans les intégrales.
3. **Lecture obligatoire.** *Méthodes*, section 5 (surtout la section 5.1) : pour trouver la fonction de domination.

1.4.2 Intégrales à paramètres

Motivation de cette partie

Grâce au théorème de convergence dominée, et en passant du discret au continu grâce à la caractérisation séquentielle de la limite, nous donnons quatre théorèmes sur les intégrales dépendant d'une variable. En particulier, le fait de pouvoir les dériver nous donnera une technique inédite pour calculer des intégrales (en nous ramenant à des intégrales plus simples), là où celles de 1re année échouent.

✓ Puisque cette section fait manipuler des intégrales où apparaissent deux variables (variable d'intégration, et paramètre), si vous craignez de n'être pas au clair là-dessus : fabriquez des exemples d'intégrales simples avec deux variables, mais que vous *savez* calculer (exemples : $\int_0^1 x^t \mathrm{d}x$, $\int_0^1 x^t \mathrm{d}t$, $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+t^2}$, $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{x+t^2}$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}x$, etc.), puis : 1° AVANT de les calculer, demandez-vous de quelle variable elle dépend, et de laquelle elle ne dépend pas ; 2° en déduire par rapport à quelle variable il y aurait du sens de regarder la continuité ou dérivabilité de l'intégrale ; 3° faites le calcul de l'intégrale pour voir si vous vous êtes emmêlé les pinceaux (avec une deuxième vérification à la calculatrice si vous doutez de vous).

Théorème 22 (Théorème de convergence dominée à paramètre continu). ← th. 21

✓

- Comparer cet énoncé avec celui du théorème de convergence dominée. Se convaincre que, *en dehors du vocabulaire*, les hypothèses et conclusions sont les mêmes.
- Observer que hormis l'hypothèse du domination, on peut retrouver les hypothèses et conclusions à partir de ce qu'on veut démontrer (pour que l'interversion ait un sens).
- Remarquer que ce théorème ne peut pas s'appliquer lorsqu'on essaie de montrer que la limite est *infinie*. Pourquoi ? Que peut-on faire en ce cas ?

★ De la même manière qu'on a utilisé la caractérisation séquentielle de la limite pour transformer le théorème de convergence dominée pour des suites en un théorème de convergence dominée pour des fonctions : pourriez-vous faire de même avec le théorème 20, pour avoir un théorème portant sur une famille de fonctions $(f_x)_{x\in I}$ ou une fonction f de deux variables ? Vous aurez notamment à définir la « convergence uniforme en $a \in I$ ». L'énoncé obtenu est-il intéressant ? (Vous pouvez en faire de même avec *tout* théorème passé et à venir sur les suites de fonctions.)

Corollaire 23 (Théorème de continuité sous le signe intégrale)**.**

✓

- **Lecture conseillée** : *Méthodes*, section 5.6. Pour comprendre à quoi servira ce théorème.
- Observer que hormis l'hypothèse du domination, on peut retrouver les hypothèses à partir de ce qu'on veut démontrer (pourquoi la continuité par morceaux, et non la continuité ou classe C^1 ? pourquoi doit-elle être vraie selon t, et non x ? et pour ℓ aussi ?). Observer que ce sont *exactement* les mêmes hypothèses que dans le théorème de convergence dominée, à condition de reformuler l'hypothèse de convergence simple (en réécrivant sa définition). Se servir de cette observation pour retenir plus facilement ce théorème.

★ Trouver un contre-exemple à ce théorème quand on enlève l'hypothèse de domination. Prenez une intégrale à paramètre que vous savez calculer simplement. Si vous avez compris les contre-exemples aux théorèmes d'interversion des suites de fonctions, vous n'aurez pas de mal à en trouver un analogue ici.

☢ Montrer que si f est continue sur $[a,b]\times[c,d]$ (segments), alors la continuité de $x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est automatique. Plus tard (chapitre VI), un théorème rendra ce résultat trivial.

Théorème 24 (Théorème de dérivation sous le signe intégrale)**.**

✓

- Si vous avez peur de vous y perdre avec le rôle des variables x et t, faites comme dans la suggestion de début de section. Avec une autre étape entre 2° et 3° : dérivez sous le signe intégrale (sans vérifier les hypothèses du théorème), et calculez explicitement l'intégrale obtenue. Puis, après l'étape 3°, dérivez le résultat obtenu, et vérifiez que vous obtenez bien la même chose que précédemment.
- S'interroger sur le sens de chaque hypothèse (pourquoi la continuité par morceaux est selon une variable, et pas l'autre ? à quoi sert la classe C^1 ?). Se convaincre qu'il serait bizarre de demander que φ soit continue par morceaux et intégrable sur I au lieu de J. Changer le nom des variables de f ($(u,v)\mapsto f(u,v)$ par exemple), ou les échanger, et voir si on parvient à adapter l'énoncé.
- Démonstration du théorème : être prudent sur les variables (on prend la limite quand $h \to 0$), et sur l'*intervalle* auquel appartient h : comment le définir ?

★

- Trouver un contre-exemple quand on enlève l'hypothèse de domination. Même commentaire que plus haut.
- S'inspirer des démonstrations des théorèmes 23 et 24 pour redémontrer le théorème fondamental de l'analyse, c'est-à-dire : montrer que si $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, alors $F'(x) = f(x)$ (en montrant que $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x)$). Pour y parvenir, vous aurez d'abord besoin d'un changement de variable qui transforme le taux d'accroissement en intégrale à paramètre. On essaiera d'éviter un raisonnement circulaire.

Remarque.

★

- Quelle hypothèse gagne vraiment à se ramener à des segments ? Pourquoi ?
- Relire comment on avait montré que la convergence uniforme sur tout segment suffit dans le cas des suites de fonctions continues. S'en inspirer pour démontrer, ici encore, que la continuité et la dérivabilité peuvent s'obtenir en vérifiant les hypothèses sur tout segment. Si l'on peut fournir un énoncé général, valable pour tout théorème passé et à venir, c'est encore mieux.

Méthode 3.

5.2

✓	**Lecture obligatoire.** *Méthodes*, section 5.2. *C'est très important.* Noter qu'il y a ici quelque chose de sympathique qu'on peut faire, et qui était impossible avec le théorème de convergence dominée.

Exemple 16.

♡

✓	Le reprendre sans se ramener à des segments. Comprendre ce qui coince, et pourquoi il fallait y songer.
☢	Calculer cette intégrale sans passer par les théorèmes de la section. Indication : noter que *si l'on pouvait* scinder l'intégrale en deux, un changement de variable permettrait d'avoir une différence de deux intégrales égales, et on aurait 0. On soigne ce raisonnement en tenant compte du fait qu'on ne puisse pas faire cette scission (pourquoi ?). En déduire un résultat général, plus satisfaisant parce qu'il nécessite des hypothèses minimalistes.

Théorème 25 (Théorème de régularité C^k sous le signe intégrale)**.**

✓	— Et si l'on veut la classe C^∞ d'une intégrale à paramètre, que fait-on ? — Comme dans l'énoncé précédent, on s'interrogera sur le sens des hypothèses, et notamment pourquoi l'hypothèse d'intégrabilité n'est pas la même selon l'ordre de la dérivation.
☢	Essayer de le démontrer pour comprendre où est la très grande difficulté.

Exemple 17.

← ex. 7

✓	— Faire les récurrences que j'ai omises. — S'inspirer de cet exemple pour produire d'autres familles d'intégrales calculées par dérivations successives. Songez à des intégrales que vous savez calculer trivialement et qui dépendent d'une variable x. Les intégrales de référence peuvent vous fournir des exemples si vous manquez d'inspiration. J'affirme que vous pouvez calculer énormément d'intégrales de la forme $\int_I t^k f(t)\mathrm{d}t$ avec f usuelle (introduire une variable x quelque part). — Remarquez que dans la marge du livret, je renvoie à l'exemple 7. Pourquoi ? Quel rapport entre ces intégrales ?
★	Étendre à $x \in]-1,+\infty[$ le calcul effectué. Cela change l'hypothèse de domination et introduit une subtilité.

Remarque.

✓	Voir *Méthodes* du chapitre *Suites et séries de fonctions*, section 5.1, pour plus de détails sur la philosophie des théorèmes d'interversion.

Après votre révision de cette partie

1. **Lecture conseillée.** *Méthodes* du chapitre *Suites et séries de fonctions*, section 5.1 : pour apprendre à retrouver les hypothèses. Sauter ce qui concerne des séries. S'exercer quotidiennement jusqu'à ne plus se tromper.
2. **Lecture conseillée.** *Méthodes* du chapitre *Suites et séries de fonctions*, section 5.4. Pour les passages à la limite dans les intégrales.
3. **Lecture obligatoire.** *Méthodes*, section 5 (surtout la section 5.2) : pour trouver la fonction de domination.
4. Refaire et analyser les exemples du cours et les *Savoir-faire à vérifier* (page 17) à l'aune de ces conseils.

2 Savoir-faire à vérifier

Les principaux acquis à vérifier sont :

Intégrales généralisées.

✓ 1. Étudier l'intégrabilité d'une fonction, la nature d'une intégrale (quand on connaît une primitive ou grâce aux théorèmes de comparaison). **(🗎 C)** ☐

✓ 2. Déterminer la nature d'une intégrale voire la calculer avec un changement de variable. ☐

★ 3. Intégrer par parties pour le calcul intégral ou montrer la convergence d'une intégrale. **(🗎 C)** ☐

☢ 4. Donner la nature d'une intégrale qui échappe aux méthodes classiques. **(🗎)** ☐

Développements limités et asymptotiques, approximations d'intégrales.

★ 1. Utiliser le théorème d'intégration des relations de comparaison. ☐

☢ 2. Effectuer un développement limité ou asymptotique d'une intégrale dépendant d'une variable. **(🗎)** ☐

☢ 3. Approcher une intégrale par une somme, ou l'intégrande par densité, ou l'intervalle d'intégration par un segment, pour résoudre un problème. **(🗎)** ☐

Interversions de symboles.

✓ 1. Utiliser la continuité d'une intégrale à paramètre pour étendre son expression. ☐

★ 2. Calculer $\lim_{n\to\infty}\int_J f_n(t)\mathrm{d}t$ ou $\lim_{x\to a}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ avec un théorème d'interversion. **(🗎 C)** ☐

★ 3. Démontrer la continuité ou dérivabilité d'une intégrale à paramètre, et donner sa dérivée le cas échéant. **(🗎)** ☐

L'icône « **(🗎)** » signifie que les documents *Méthodes* donnent des compléments sur ces savoir-faire.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices exerçant à ce savoir-faire.

Intégrales généralisées.

✓ Étudier l'intégrabilité d'une fonction, la nature d'une intégrale (quand on connaît une primitive ou grâce aux théorèmes de comparaison).

Exemples. Étudier la nature des intégrales :

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-\ln(t)}}$, (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}\mathrm{d}t$, (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)\mathrm{d}t$, (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}t$,

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}e^{\cos(\sqrt{t})}\mathrm{d}t$, (f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\ln(t)}}$, (g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|\ln(t)|}}$, (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

✓ Déterminer la nature d'une intégrale voire la calculer avec un changement de variable.

Exemples.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ en posant $u = \dfrac{1}{t}$ (on admet que l'intégrale converge).
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(e^t)\mathrm{d}t$ converge à l'aide d'un changement de variable adéquat.

★ Faire une intégration par parties avec une intégrale généralisée.

Exemple. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ converge en intégrant par parties.

☢ Donner la nature d'une intégrale qui échappe aux méthodes classiques.

Exemples.

1. Donner la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(x+\ln(x)\right)\mathrm{d}x$.
2. Donner la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t\cos(t)}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+t^2\sqrt{|\cos(t)|}\right)}$.
3. Donner la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$.

Développements limités et asymptotiques, approximations d'intégrales.

★ Utiliser le théorème d'intégration des relations de comparaison.

Exemples.

1. Montrer : $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner un équivalent quand $x \to +\infty$ de l'intégrale $\displaystyle\int_2^x \frac{\sqrt{t}}{(\ln(t))^k}\mathrm{d}t$.
3. Soit $\mathrm{argch} : [1,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ la bijection réciproque de $\mathrm{ch}_{|\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to [1,+\infty[$. Donner un équivalent quand $x \to 1$ de $\mathrm{argch}(x)$.

☢ Effectuer un développement limité ou asymptotique d'une intégrale dépendant d'une variable.

Exemple. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)}{1+tx}\mathrm{d}x = \frac{\ln(t)}{t} + \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)$.

☢ Approcher une intégrale par une somme, ou l'intégrande par densité, ou l'intervalle d'intégration par un segment, pour résoudre un problème.

Exemples.

1. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues. On suppose g convexe. Montrer : $\displaystyle g\left(\int_0^1 f\right) \leqslant \int_0^1 g\circ f$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(nx - \lfloor nx\rfloor\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x$.

Interversions de symboles.

✓ Utiliser la continuité d'une intégrale à paramètre pour étendre une expression.

Exemple.

1. Montrer que l'application $\displaystyle g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+(xt)^2)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ différent de 1.
3. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.

★ Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_J f_n(t)\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ avec un théorème d'interversion.

Exemples. Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^n}\mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^1 \frac{\sin(\sin(tx))}{\sin(tx)}\mathrm{d}t$.

★ Démontrer qu'une intégrale à paramètre est continue ou de classe C^1.

Exemples.

1. Montrer que $\displaystyle g(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$ définit une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge absolument.
   (b) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\frac{x}{2}\cdot g(x)$.
   (c) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}$. On admet : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Intégrales généralisées.

✓ Étudier l'intégrabilité d'une fonction, la nature d'une intégrale (quand on connaît une primitive ou grâce aux théorèmes de comparaison). ☐

Réponse.

(a) Nature de $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-\ln(t)}}$. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{1-\ln(t)}}$ est continue et positive sur $[1,e[$, et :

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-\ln(t)}} = \left[-2\sqrt{1-\ln(t)}\right]_1^e = 2 - \lim_{t\to e} 2\sqrt{1-\ln(t)} = 2 < +\infty.$$

Donc l'intégrale converge.

(b) Nature $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}\mathrm{d}t$. On montre la convergence *absolue* ; l'application $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$, or : $\left|\dfrac{\sqrt{t}\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}\right| \leqslant \dfrac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)}$, et : $\dfrac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, donc :

$$\frac{\sqrt{t}\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)} = \underset{t\to 0}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

or $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$, donc $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}$ l'est également d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives. De plus :

$$\left|\frac{\sqrt{t}\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(t)t^{3/2}} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right),$$

et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}$ également. On en déduit que $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc en particulier l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}\mathrm{d}t$ converge.

(c) Nature de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)\mathrm{d}t$. Une primitive de tan sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ est $t \mapsto -\ln(\cos(t))$, qui tend vers $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}$, donc l'intégrale diverge. Une autre démonstration possible passe par le théorème de comparaison et l'équivalent : $\tan(t) = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-t} > 0$: l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\frac{\pi}{2}-t}$ diverge, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)\mathrm{d}t$ aussi.

(d) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}(t)-\cos(t)}{t^{5/2}}$ est continue et *positive* sur $]0,1]$, et au voisinage de 0 on a :

$$\frac{\mathrm{ch}(t)-\cos(t)}{t^{5/2}} = \frac{\cancel{1}+\dfrac{t^2}{2}-\cancel{1}+\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)}{t^{5/2}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}};$$

or $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable sur $]0,1]$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)-\cos(t)}{t^{5/2}}\mathrm{d}t$ converge par comparaison.

(e) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}e^{\cos(\sqrt{t})}\mathrm{d}t$. Une primitive de $t \mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}e^{\cos(\sqrt{t})}$ est $t \mapsto -2e^{\cos(\sqrt{t})}$ qui n'a pas de limite en $+\infty$, donc l'intégrale diverge.

(f) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\ln(t)}}$. L'application $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{\ln(t)}}$ est continue sur $]1,+\infty[$. On a : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{\sqrt{\ln(t)}}=+\infty$ (croissances comparées), donc pour tout t suffisamment grand on a : $\dfrac{t}{\sqrt{\ln(t)}}\geqslant 1$, puis : $\dfrac{1}{\sqrt{\ln(t)}}\geqslant\dfrac{1}{t}>0$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\ln(t)}}$ également par comparaison.

(g) Nature de $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|\ln(t)|}}$. L'application $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{|\ln(t)|}}$ est continue sur $]0,1[$ et de limite nulle en 0, donc elle se prolonge par continuité sur $[0,1[$. De plus : $\dfrac{1}{\sqrt{|\ln(t)|}}\underset{t\to1}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}>0$, et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ converge parce que $\dfrac{1}{2}<1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|\ln(t)|}}$ converge.

(h) Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. L'application $t\mapsto\dfrac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus : $\dfrac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{t}}>0$, et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge parce que $\dfrac{1}{2}<1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge.

De plus le théorème des croissances comparées implique : $\dfrac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge parce que $2>1$. Encore par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion : $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ convergent, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ aussi.

✓ Déterminer la nature d'une intégrale voire la calculer avec un changement de variable. ☐

Réponse.

1. L'application $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ est de classe C^1 et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Poser $u=\dfrac{1}{t}$ montre que :
$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_{+\infty}^0\frac{-\ln(u)}{1+\frac{1}{u^2}}\frac{-\mathrm{d}u}{u^2}=-\int_0^{+\infty}\frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u,$$
donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t=0$.

   Remarque. L'intégrale converge car l'intégrande est continu sur $]0,+\infty[$, négligeable devant $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ au voisinage de 0 et devant $t\mapsto\dfrac{1}{t^{3/2}}$ au voisinage de $+\infty$. Le lecteur en exercice complétera les détails.

2. Le changement de variable $u=e^t$ est licite, parce que l'application $t\mapsto e^t$ est de classe C^1 et strictement croissante de $[1,+\infty[$ dans $[e,+\infty[$. On a de plus : $\mathrm{d}u=e^t\mathrm{d}t$. Par conséquent, d'après la formule du changement de variable, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin(e^t)\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{\sin(e^t)}{e^t}e^t\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ sont de même nature ; or la deuxième est convergente, nous l'avons vu dans le cours (exemple 8), donc la première également : d'où le résultat.

★ Faire une intégration par parties avec une intégrale généralisée. ☐

Réponse. Tout d'abord, $x\mapsto\cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $[\pi,+\infty[$. On intègre par parties, en intégrant le cosinus et en dérivant $x\mapsto\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (qui est de dérivée $x\mapsto-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$: l'intérêt de ce choix est de faire apparaître la fonction de Riemann $x \mapsto \frac{1}{x^2}$) ; le terme entre crochets $\left[\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{\pi}^{+\infty}$ est bien défini, parce que : $0 \leqslant \left|\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sin(0) = 0$.

On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle -\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ sont de même nature. Or l'intégrale du membre de droite est absolument convergente : son intégrande est continu, et clairement dominé par $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ qui est intégrable sur $[\pi, +\infty[$: d'où le résultat.

> ☢ Donner la nature d'une intégrale qui échappe aux méthodes classiques. □

Réponse.

1. Faisons le changement de variable : $u = x+\ln(x)$. Il est licite puisque l'application $\varphi : x \mapsto x+\ln(x)$ est de classe C^1 et strictement croissante, de $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$ (le vérifier !). On a : $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\varphi'(\varphi^{-1}(u))} = \frac{\mathrm{d}u}{1+\frac{1}{\varphi^{-1}(u)}}$, donc la formule du changement de variable implique que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(x+\ln(x))\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{1+\frac{1}{\varphi^{-1}(u)}}\mathrm{d}u$ sont de même nature. Faisons un développement asymptotique de l'intégrande de cette fonction. Comme $\frac{1}{\varphi^{-1}(u)} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut en principe faire un développement asymptotique de $\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi^{-1}(u)}}$, mais il est impossible de savoir jusqu'à quel ordre aller si l'on n'a pas une information plus fine sur le comportement asymptotique de φ^{-1} en l'infini. On va donc en donner un équivalent et même un peu mieux. Soit u au voisinage de $+\infty$. Par définition de φ^{-1}, on a : $u = \varphi^{-1}(u) + \ln\left(\varphi^{-1}(u)\right) \geqslant \varphi^{-1}(u)$, ce dont on déduit : $0 \leqslant \ln\left(\varphi^{-1}(u)\right) \leqslant \ln(u)$, donc en ré-exploitant l'égalité précédente on a : $\varphi^{-1}(u) = u + \underset{u\to+\infty}{O}(\ln(u))$. On en déduit :
$$\frac{\sin(u)}{1+\frac{1}{\varphi^{-1}(u)}} = \frac{\sin(u)}{1+\frac{1}{u\left(1+\underset{u\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(u)}{u}\right)\right)}} = \frac{\sin(u)}{1+\frac{1}{u}\left(1+\underset{u\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(u)}{u}\right)\right)} = \sin(u) - \frac{\sin(u)}{u} + \underset{u\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(u)}{u^2}\right).$$
On sait démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ converge *via* une intégration par parties, et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \underset{u\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(u)}{u^2}\right)\mathrm{d}u$ converge absolument en dominant l'intégrande par la fonction de Riemann $u \mapsto \dfrac{1}{u^{3/2}}$. Je ne détaille rien de tout cela, mais le lecteur en exercice s'assurera impérativement de savoir le faire. On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{1+\frac{1}{\varphi^{-1}(u)}}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature ; cette dernière diverge trivialement, puisqu'une primitive du sinus, à savoir $-\cos$, n'admet pas de limite en $+\infty$. Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{1+\frac{1}{\varphi^{-1}(u)}}\mathrm{d}u$ diverge, et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(x+\ln(x))\mathrm{d}x$ aussi.

2. Pour la première : l'idée est que chaque fois que le cosinus s'approche de -1 (autour des multiples impairs de π), l'intégrande explose puisqu'il devient de l'ordre de grandeur de e^t. Or le cosinus s'approche de -1 trop souvent, et sur des intervalles de longueur trop grande (ci-dessous nous prendrons $\left[(2n+1)\pi - \frac{\pi}{3}, (2n+1)\pi + \frac{\pi}{3}\right]$ comme tels intervalles, puisque le cosinus y est compris entre -1 et $-\frac{1}{2}$: c'est en cela qu'il est « proche » de -1 sur un intervalle « trop grand », c'est-à-dire de longueur constante et non nulle), pour que ce soit anecdotique. Formalisons. Comme l'intégrande est positif (et continu, cela va de soi : je mets l'accent sur la positivité), on peut passer par un calcul direct de

l'intégrale pour démontrer sa convergence :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\cos(t)}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} e^{-t\cos(t)}\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{(2n+1)\pi-\frac{\pi}{3}}^{(2n+1)\pi+\frac{\pi}{3}} e^{-t\cos(t)}\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{(2n+1)\pi-\frac{\pi}{3}}^{(2n+1)\pi+\frac{\pi}{3}} e^{t}\mathrm{d}t$$
$$\geqslant \frac{2\pi}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(2n+1)\pi-\frac{\pi}{3}}$$
$$= +\infty,$$

puisqu'on a évidemment affaire à une somme de série grossièrement divergente. Ceci démontre : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t\cos(t)}\mathrm{d}t = +\infty$, et l'intégrale diverge donc.

Passons à l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+t^2\sqrt{|\cos(t)|}\right)}$, dont l'intégrande est là encore continu et positif. Ici la nature de l'intégrale est moins évidente : quand le cosinus s'annule, l'intégrande est approximativement égal à $\frac{1}{t}$ (ce qui nous donne un intégrande non intégrable), alors que lorsque le cosinus vaut 1 ou -1 l'intégrande est approximativement égal à $\frac{1}{t^3}$ (qui est intégrable). Qui gagne ? Voyons cela. On se ramène aux intervalles $[n\pi,(n+1)\pi]$ pour tenir compte du caractère périodique des annulations (ou des valeurs ± 1 prises) :

$$\int_\pi^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+t^2\sqrt{|\cos(t)|}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+t^2\sqrt{|\cos(t)|}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{(u+n\pi)\left(1+(u+n\pi)^2\sqrt{|\cos(u)|}\right)}.$$

Notons f l'intégrande. On a :

$$\int_0^\pi f(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\mathrm{d}u + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-v)\mathrm{d}v = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(u)+f(\pi-u)\right)\mathrm{d}u.$$

La réduction à l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ a été faite pour utiliser la concavité du cosinus sur cet intervalle, qui implique : $\forall u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(u)\geqslant 1-\frac{2u}{\pi}\geqslant 0$ (le graphe du cosinus est au-dessus de la corde joignant $(0,\cos(0))$ et $\left(\frac{\pi}{2},\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$). En fait, l'inégalité vaut même sur $[0,\pi]$ avec les valeurs absolues, comme une analyse approfondie le démontrerait. Bref. On en déduit :

$$\int_\pi^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+t^2\sqrt{|\cos(t)|}\right)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+(u+n\pi)^2\sqrt{1-\frac{2u}{\pi}}}+\frac{1}{1+(\pi-u+n\pi)^2\sqrt{1-\frac{2u}{\pi}}}\right)\mathrm{d}u$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(n\pi)^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-\frac{2u}{\pi}}}$$
$$= \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} < +\infty.$$

On a montré que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+t^2\sqrt{|\cos(t)|}\right)}$ converge.

3. Remarquons d'abord que $t\mapsto\dfrac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}$ est continue sur $[\pi,+\infty[$. Cette fois-ci l'intégrande n'est pas positif : on prend garde à ne pas manipuler *a priori* l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$. Néanmoins on va tout de même remarquer que cette intégrale est une série alternée déguisée, vérifiant le critère spécial (à cause du signe alterné du sinus et de la décroissance de l'application $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{\ln(t)}}$). Soit $N\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. On a :

$$\int_\pi^{N\pi}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N-1}\underbrace{\left((-1)^3\right)^n}_{=(-1)^n}\int_0^\pi\frac{(\sin(u))^3}{\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\mathrm{d}u.$$

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{(\sin(u))^3}{\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\mathrm{d}u$ vérifie le critère spécial des séries alternées : le sinus est positif sur $[0,\pi]$ et le logarithme l'est sur $[1,+\infty[$ (donc $u\mapsto \ln(u+n\pi)$ l'est sur $[0,\pi]$ dès que $n\geqslant 1$). Par croissance de l'intégrale : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\int_0^{\pi}\frac{(\sin(u))^3}{\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\mathrm{d}u\geqslant 0$. De plus la valeur absolue du terme général de cette série alternée décroît, puisque le logarithme est une fonction croissante, ce qui implique : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\int_0^{\pi}\frac{(\sin(u))^3}{\sqrt{\ln(u+(n+1)\pi)}}\mathrm{d}u\leqslant\int_0^{\pi}\frac{(\sin(u))^3}{\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\mathrm{d}u$. Enfin, la convergence vers 0 découle de l'encadrement :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad 0\leqslant\int_0^{\pi}\frac{(\sin(u))^3}{\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\mathrm{d}u\leqslant\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\ln(n\pi)}}=\frac{\pi}{\sqrt{\ln(n\pi)}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

et du théorème des gendarmes. Ainsi, par le critère spécial, la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{(\sin(u))^3}{\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\mathrm{d}u$ converge et donc la suite $\left(\int_{\pi}^{N\pi}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t\right)_{N\geqslant 1}$ également, d'après l'égalité ci-dessus.

Pour en déduire que la nature de l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ est la même : soit $x\in[\pi,+\infty[$, et soit N_x le plus grand entier tel que : $N_x\pi\leqslant x$ (on a : $N_x=\lfloor\frac{x}{\pi}\rfloor$). Alors :

$$0\leqslant\left|\int_{\pi}^{x}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{N_x\pi}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t\right|=\left|\int_{N_x\pi}^{x}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{N_x\pi}^{x}\frac{|\sin(t)|^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t\leqslant\frac{x-N_x\pi}{\sqrt{\ln(N_x\pi)}}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{\ln(N_x\pi)}}.$$

Or : $\lim_{x\to+\infty}N_x\pi=+\infty$, donc par composition de limites : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{\sqrt{\ln(N_x\pi)}}=0$. Par le théorème des gendarmes : $\lim_{x\to+\infty}\left(\int_{\pi}^{x}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{N_x\pi}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t\right)=0$. Or : $\lim_{x\to+\infty}\int_{\pi}^{N_x\pi}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ existe et est finie d'après ce qui précède, donc $\lim_{x\to+\infty}\int_{\pi}^{x}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ également, ce qui démontre que l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ converge : d'où le résultat.

Remarque. Une intégration par parties fonctionne aussi, péniblement. D'abord linéariser $\sin^3$.

Remarque. Sa convergence est extrêmement lente. Le critère des séries alternées implique en effet que l'on a : $\left|\int_{N\pi}^{+\infty}\frac{(\sin(t))^3}{\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\ln(N\pi)}}$ (majoration du reste par son premier terme). En particulier, pour avoir un reste inférieur à 10^{-1}, il faut : $N\geqslant\frac{1}{\pi}e^{100}\approx 8{,}5\cdot 10^{42}$: autant dire que ce n'est pas sur votre calculatrice que vous allez pouvoir observer la convergence de cette intégrale !

Développements limités et asymptotiques, approximations d'intégrales.

★ Utiliser le théorème d'intégration des relations de comparaison. ☐

Réponse. À chaque fois l'idée est la même : trouver un équivalent à une fonction dont on sait calculer une primitive. Le cas le plus favorable est lorsqu'on parvient à reconnaître une fonction de la forme $f'g$ dans l'intégrale d'étude, de sorte que fg' soit négligeable devant $f'g$. Ainsi on peut écrire : $f'g\sim f'g+fg'=(fg)'$, et en intégrant on sait simplifier l'intégrale de $(fg)'$.

1. On a : $e^{-x^2}\underset{x\to+\infty}{\sim}e^{-x^2}+\frac{e^{-x^2}}{2x^2}=-\frac{1}{2x}\cdot\left(-2xe^{-x^2}\right)+\left(\frac{1}{2x^2}\right)\cdot e^{-x^2}>0$, et on reconnaît là la dérivée de l'application $x\mapsto-\frac{e^{-x^2}}{2x}$. Comme elle admet une limite finie (nulle) en $+\infty$, l'application $x\mapsto e^{-x^2}+\frac{e^{-x^2}}{2x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc d'après le théorème d'intégration des équivalents

on a :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty}\left(e^{-t^2}+\frac{e^{-t^2}}{2t^2}\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty} = \frac{e^{-x^2}}{2x},$$

d'où le résultat.

2. Soit $k\in\mathbb{N}$. On a : $\dfrac{\sqrt{x}}{(\ln(x))^k} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}}{(\ln(x))^k} - \dfrac{2}{3}\dfrac{k\sqrt{x}}{(\ln(x))^{k+1}}$: on reconnaît là la dérivée de l'application $x\mapsto \dfrac{2}{3}\dfrac{x^{3/2}}{(\ln(x))^k}$. Comme elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{(\ln(x))^k}-\frac{2}{3}\frac{k\sqrt{x}}{(\ln(x))^{k+1}}\right)\mathrm{d}x$ diverge et donc, par le théorème d'intégration des équivalents on a :

$$\int_2^x \frac{\sqrt{t}}{(\ln(t))^k}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_2^x\left(\frac{\sqrt{t}}{(\ln(t))^k}-\frac{2}{3}\frac{k\sqrt{t}}{(\ln(t))^{k+1}}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}\frac{t^{3/2}}{(\ln(t))^k}\right]_2^x = \frac{2x^{3/2}}{3(\ln(x))^k} - \frac{2\cdot 2^{3/2}}{3(\ln(2))^k} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x^{3/2}}{3(\ln(x))^k},$$

d'où le résultat. Cela montre en passant que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(\ln(x))^k}\mathrm{d}x$ diverge.

Remarque. Pour conjecturer les équivalents de sommes ou d'intégrales où il figure un logarithme, il est souvent pertinent de raisonner grâce à la croissance lente du logarithme : et d'écrire abusivement : $\ln(t)\approx\ln(x)$. Ici : $\displaystyle\int_2^x \frac{\sqrt{t}}{(\ln(t))^k}\mathrm{d}t \approx \int_2^x \frac{\sqrt{t}}{(\ln(x))^k}\mathrm{d}t \approx \frac{1}{(\ln(x))^k}\frac{x^{3/2}}{3/2}$. Le raisonnement est totalement faux, mais l'équivalent est correct : il ne reste qu'à montrer que les dérivées sont équivalentes et à utiliser le théorème d'intégration des équivalents, pour le formaliser.

3. On a : $\forall x\in[1,+\infty[$, $\mathrm{ch}'(x)=\mathrm{sh}(x)$, et le sinus hyperbolique est non nul sur $\mathbb{R}_+^* = \mathrm{argch}\,(]1,+\infty[)$, donc argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a pour tout $x\in]1,+\infty[$:

$$\mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}'(\mathrm{argch}(x))} = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))} = \frac{1}{\sqrt{(\mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x))^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}},$$

donc : $\mathrm{argch}'(x) \underset{x\to1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}} > 0$, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$ converge (c'est une intégrale de Riemann d'exposant $\frac{1}{2}<1$), donc d'après le théorème d'intégration des équivalents :

$$\int_1^x \mathrm{argch}'(t)\mathrm{d}t \underset{x\to1}{\sim} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}\sqrt{t-1}} = \sqrt{2}\sqrt{x-1},$$

or : $\displaystyle\int_1^x \mathrm{argch}'(t)\mathrm{d}t = \mathrm{argch}(x)-\mathrm{argch}(1)=\mathrm{argch}(x)$, donc on a montré : $\mathrm{argch}(x)\underset{x\to1}{\sim}\sqrt{2(x-1)}$.

Remarque. Il est possible d'expliciter cette bijection réciproque. On a : $\forall x\in[1,+\infty[$, $\mathrm{argch}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ (exercice). On peut aussi retrouver cet équivalent parlant de là, en écrivant :

$$\ln(x+\sqrt{x^2-1}) = \ln\left(1+\left(x-1+\sqrt{x^2-1}\right)\right) \underset{x\to1}{\sim} x-1+\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\underbrace{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}_{\underset{x\to1}{\longrightarrow}\sqrt{2}}.$$

☢ Effectuer un développement limité ou asymptotique d'une intégrale dépendant d'une variable. ☐

Réponse. Pour voir dans quelle direction partir : quand t est très grand, le dénominateur rend l'intégrande presque nul, sauf pour $x=0$; ainsi on s'attend à ce que seule la contribution de l'intégrale près de 0 compte, si bien que l'approximation $\cos(u)\approx\cos(0)=1$ ne devrait pas être abusive. Il s'agit à présent de quantifier l'écart produit par cette approximation :

$$\left|\int_0^1\frac{\cos(x)}{1+tx}\mathrm{d}x - \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+tx}\right| = \int_0^1\frac{|\cos(x)-1|}{1+tx}\mathrm{d}x.$$

On majore la « différence petite » du numérateur avec l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. Comme la dérivée seconde du cosinus (qui est l'opposé de lui-même) est de valeur absolue majorée par 1, on a : $\forall u\in\mathbb{R}$, $|\cos(u)-1|\leqslant\frac{u^2}{2}$. Donc :

$$\forall t>0,\quad \left|\int_0^1\frac{\cos(x)}{1+tx}\mathrm{d}x - \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+tx}\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+tx}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2t}\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{4t}.$$

Or : $\forall t>0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+tx}=\frac{\ln(1+tx)}{t}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{\ln(t)}{t}$. D'où le résultat : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)}{1+tx}\mathrm{d}x=\frac{\ln(t)}{t}+\underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)$.

☢ Approcher une intégrale par une somme, ou l'intégrande par densité, ou l'intervalle d'intégration par un segment, pour résoudre un problème. □

Réponse.

1. Les inégalités de convexité font intervenir des sommes. Il est donc naturel, pour obtenir le résultat voulu, d'appliquer une inégalité de convexité avec une somme de Riemann, puis de passer à la limite. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. On a, d'après l'inégalité de Jensen :
$$g\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}g\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$
Or le membre de droite est une somme de Riemann associée à $g\circ f$, dont le pas $\frac{1}{n}$ tend vers 0. Comme $g\circ f$ est continue sur [0,1], on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}g\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 g\circ f$.
De même : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f$, et comme g est continue sur $\mathbb{R}$ on en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}g\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=g\left(\int_0^1 f\right)$. Ainsi, passer à la limite quand $n\to+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus implique le résultat voulu : $\displaystyle g\left(\int_0^1 f\right)\leqslant\int_0^1 g\circ f$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, et que l'on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $|nx-\lfloor nx\rfloor|\leqslant 1$, le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives assure que $x\mapsto f(x)\,(nx-\lfloor nx\rfloor)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ également. Ainsi l'intégrale de l'énoncé est bien définie.
Il y a plusieurs façons de motiver les approximations que nous allons faire. Une façon parmi d'autres provient de la réflexion sur la provenance du facteur $\frac{1}{2}$: c'est l'intégrale de $x\mapsto nx-\lfloor nx\rfloor$ sur un intervalle de longueur $\frac{1}{2}$ (comme la fonction est $\frac{1}{n}$-périodique, vous pouvez faire le calcul sur $\left[0,\frac{1}{n}\right]$, ce qui rend l'affaire triviale puisque la partie entière y est nulle). Seulement on ne peut pas écrire, en général, de chose du type : $\displaystyle\int fg=\int f\cdot\int g$ (ou $\displaystyle f\int g$, ou...), donc il ne semble pas possible « d'isoler » l'intégrale de $x\mapsto nx-\lfloor nx\rfloor$... Sauf si f est constante, puisque dans ce cas on peut sortir le facteur f de l'intégrale. Cela donne envie de se ramener au cas d'une fonction en escalier (qui n'est rien d'autre qu'une fonction constante par morceaux). Mais l'approximation par une fonction en escalier n'est possible que si l'on est sur un segment : c'est pourquoi nous allons nous y ramener. Pour abréger, ci-dessous nous noterons : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus I}=\int_{\mathbb{R}}-\int_I$.
Soit $\varepsilon>0$. Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, il existe un segment $I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ (qu'on prend non réduit à un point pour pouvoir diviser par $b-a$ ci-dessous) tel que : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus I}|f|\leqslant\varepsilon$. Ensuite, soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ telle que : $\|f-\varphi\|_\infty\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}$. On a à ce stade :
$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}}f(x)\,(nx-\lfloor nx\rfloor)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_{\mathbb{R}}f(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int_{\mathbb{R}\setminus I}f(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_I f(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}\setminus I}|f(x)|\left|nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x+\left|\int_I f(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\setminus I}|f(x)|\mathrm{d}x+\left|\int_I(f(x)-\varphi(x)+\varphi(x))\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\int_I|f(x)-\varphi(x)|\left|nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+\left|\int_I \varphi(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\|f-\varphi\|_\infty(b-a)}{2}+\left|\int_I \varphi(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \varepsilon+\left|\int_I \varphi(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

Il reste à montrer que cette intégrale est arbitrairement petite quand n est au voisinage de l'infini. Comme φ est une fonction en escalier, on peut l'écrire : $\varphi = \sum_{i=1}^{p} c_i \mathbb{1}_{S_i}$ (quitte à ignorer des valeurs en des points isolés, qui n'ont pas d'effet sur la valeur de l'intégrale), où les S_i sont des intervalles partitionnant le segment I et les c_i des constantes complexes. Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Si l'on note α_i et β_i les extrémités de S_i, on a :

$$\begin{aligned}&\int_I \mathbb{1}_{S_i}(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\int_{\alpha_i}^{\beta_i}(nx-\lfloor nx\rfloor)\,\mathrm{d}x-\frac{\beta_i-\alpha_i}{2}\\ &=\frac{1}{n}\int_{n\alpha_i}^{n\beta_i}(u-\lfloor u\rfloor)\,\mathrm{d}u-\frac{\beta_i-\alpha_i}{2}\\ &=\frac{1}{n}\left(\int_{n\alpha_i}^{n\alpha_i+\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}(u-\lfloor u\rfloor)\,\mathrm{d}u+\int_{n\alpha_i+\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}^{n\beta_i}(u-\lfloor u\rfloor)\,\mathrm{d}u\right)-\frac{\beta_i-\alpha_i}{2}.\end{aligned}$$

Comme $u\mapsto u-\lfloor u\rfloor$ est 1-périodique, on a :

$$\begin{aligned}\int_{n\alpha_i}^{n\alpha_i+\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}(u-\lfloor u\rfloor)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}(u-\lfloor u\rfloor)\,\mathrm{d}u&=\sum_{k=0}^{\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor-1}\int_k^{k+1}(u-\lfloor u\rfloor)\,\mathrm{d}u\\ &=\sum_{k=0}^{\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor-1}\left[\frac{(u-k)^2}{2}\right]_k^{k+1}\\ &=\sum_{k=0}^{\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor-1}\frac{1}{2}\\ &=\frac{\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}{2}.\end{aligned}$$

Or : $\left|\int_{n\alpha_i+\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}^{n\beta_i}(u-\lfloor u\rfloor)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_{n\alpha_i+\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}^{n\beta_i}|u-\lfloor u\rfloor|\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{n(\beta_i-\alpha_i)-\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}{2} \leqslant \frac{1}{2}$.
Donc :

$$0\leqslant\left|\int_I \mathbb{1}_{S_i}(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\frac{\lfloor n(\beta_i-\alpha_i)\rfloor}{2n}-\frac{\beta_i-\alpha_i}{2}\right|+\frac{1}{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

en utilisant le fait que $\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}x$ pour tout x (exercice facile). D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_I \mathbb{1}_{S_i}(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = 0$. Par linéarité de l'intégrale, on a aussi : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_I \varphi(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = 0$. Donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geqslant N$, on ait : $\left|\int_I \varphi(x)\left(nx-\lfloor nx\rfloor-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon$. Si l'on revient à nos premières majorations, pour tout entier $n\geqslant N$ on a donc : $\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\,(nx-\lfloor nx\rfloor)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 2\varepsilon$. Pour tout $\varepsilon>0$, on a montré l'existence d'un rang qui réalise cette majoration, d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,(nx-\lfloor nx\rfloor)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x$.

Interversions de symboles.

✓ Utiliser la continuité d'une intégrale à paramètre pour étendre une expression. ☐

Réponse. Posons : $\forall (x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+,\ f(x,t)=\frac{1}{(1+t^2)(1+xt^2)}$.

1. L'application $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, et $t\mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$. De plus : $\forall (x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+,\ |f(x,t)|\leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ et il est facile de montrer que $t\mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, $g : x\mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $x\neq 1$. Une décomposition en éléments simples donne :

$$\begin{aligned} g(x)=\frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2}{1+(xt)^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t &= \frac{1}{x^2-1}\left[x^2\cdot\frac{1}{x}\arctan(xt)-\arctan(t)\right]_0^{+\infty}\\ &=\frac{1}{x^2-1}\cdot\frac{\pi}{2}(x-1)\\ &=\frac{\pi}{2(x+1)}.\end{aligned}$$

3. L'intégrale demandée est $g(1)$. Le calcul ci-dessus valait pour $x\neq 1$ uniquement (pourquoi ?). Mais on peut prendre la limite quand $x\to 1^+$, et par continuité : $g(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\pi}{2(x+1)}=\dfrac{\pi}{4}$.

★ Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_J f_n(t)\mathrm{d}t$ ou $\lim\limits_{x\to a}\displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ avec un théorème d'interversion. ☐

Réponse.

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}\mathrm{d}x$. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions sur $[0{,}1]$ de terme général $f_n : x\mapsto e^{-\frac{x^2}{n}}$. Soit $x\in[0{,}1]$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{n}}=e^0=1$, donc $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0{,}1]$ vers $f=1$. Une étude de variations démontre que $\|f_n-f\|_\infty=\left|e^{-\frac{1}{n}}-1\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers $f=1$ (on peut aussi appliquer l'inégalité des accroissements finis à l'exponentielle entre $-\frac{x^2}{n}$ et 0 pour obtenir $\|f_n-f\|_\infty\leqslant\frac{1}{n}$). D'après le théorème d'interversion limite et intégrale sur un segment, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}\mathrm{d}x=\int_0^1 1\mathrm{d}x=1.$$

Nous pouvons aussi appliquer le théorème de convergence dominée, très simplement puisque : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\forall x\in[0{,}1]$, $\left|e^{-\frac{x^2}{n}}\right|\leqslant 1$, et $\varphi : x\mapsto 1$ est évidemment intégrable sur $[0{,}1]$ en tant qu'application continue sur un segment.

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^n}\mathrm{d}x$. Soit $(f_n)_{n\geqslant 4}$ la suite de fonctions sur $\mathbb{R}_+$ de terme général $f_n : x\mapsto \dfrac{x^2}{1+x^n}$. Alors $(f_n)_{n\geqslant 4}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers :

$$f : x\mapsto\begin{cases} x^2 & \text{si } x\in[0{,}1[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x=1\\ 0 & \text{si } x\in]1,+\infty[\end{cases}$$

qui est continue par morceaux. De plus, pour tout $n\geqslant 4$ et tout $x\in[0,+\infty[$, on a : $|f_n(x)|\leqslant\varphi(x)$, où $\varphi : x\mapsto\begin{cases} x^2 & \text{si } x\in[0{,}1]\\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x\in]1,+\infty[\end{cases}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (pour $x\geqslant 1$, on obtient cette majoration en écrivant $1+x^n\geqslant x^n\geqslant x^4$ pour tout $n\geqslant 4$; éliminer le 1 est superflu pour poursuivre).

L'intégrabilité sur [0,1] est vérifiée par continuité sur un segment, et celle sur $[1,+\infty[$ provient du fait que $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ soit une fonction de Riemann d'exposant $2>1$. Alors, d'après le théorème de convergence dominée : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^n}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$. Pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, posons : $f_n(x) = \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}$. Étudions la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$. Soit $x\in]0,+\infty[$. L'équivalent classique $\sin(u)\underset{u\to 0}{\sim} u$ implique :

$$f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n\times\frac{x}{n}}{x(1+x^2)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{1+x^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{1+x^2}.$$

On en déduit que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $f : x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$. On applique alors le théorème de convergence dominée : la continuité par morceaux est évidente, et pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a :

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{n\times\frac{x}{n}}{x(1+x^2)}\leqslant\frac{1}{1+x^2}\quad(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

où l'on a utilisé l'inégalité $|\sin(u)|\leqslant|u|$, valable pour tout $u\in\mathbb{R}$ et qu'on démontre à l'aide de l'inégalité des accroissements finis entre 0 et u. Or il est facile de montrer par le calcul direct que $\varphi : x\mapsto\dfrac{1}{1+x^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$, et qu'on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée, f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, de même que f, et :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^1\frac{\sin(\sin(tx))}{\sin(tx)}\mathrm{d}t$. Posons : $\forall(x,t)\in]0,1]^2$, $f(x,t)=\dfrac{\sin(\sin(tx))}{\sin(tx)}$. Comme $tx\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$, on a $\sin(tx)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$ et donc $\sin(\sin(tx))\underset{x\to 0}{\sim}\sin(tx)$. On en déduit facilement : $\forall t\in]0,1]$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x,t)=1$. De plus :

— l'application $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$ pour tout $x\in]0,1]$;

— l'application $\ell : t\mapsto 1$ est continue par morceaux sur $]0,1]$;

— pour tout $(x,t)\in]0,1]^2$ on a : $|f(x,t)|\leqslant 1$ (on utilise l'inégalité classique $|\sin(u)|\leqslant|u|$ obtenue avec l'inégalité des accroissements finis), et $t\mapsto 1$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$.

On en déduit, grâce au théorème de convergence dominée à paramètre continu, d'une part que $t\mapsto f(x,t)$ (pour tout $x\in]0,1]$) et ℓ sont intégrables sur $]0,1]$ (ce qu'on aurait pu démontrer facilement sans ce théorème), et d'autre part : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^1\frac{\sin(\sin(tx))}{\sin(tx)}\mathrm{d}t=\int_0^1\ell(t)\mathrm{d}t=1$.

★ Démontrer qu'une intégrale à paramètre est continue ou de classe C^1. ☐

Réponse.

1. Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_+\times]0,+\infty[$, notons : $f(x,t)=\frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, l'application $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$: en effet, les relations $|f(x,t)|\leqslant\frac{1}{t^3}$ (pour t assez grand) et $f(x,t)\underset{t\to 0}{\sim}x$ assurent l'intégrabilité par comparaison. Pour tout $t\in]0,+\infty[$, l'application $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $x\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{\cos(xt)}{1+t^2}$, et l'application $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Enfin, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_+\times]0,+\infty[$ on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\frac{1}{1+t^2}=\varphi(t)(\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}),$$

et φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ (démonstration facile). D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, g est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

2. Posons : $\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $f(x,t)=e^{-itx}e^{-t^2}$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et on a $t^2|f(x,t)| = t^2 e^{-t^2} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des croissances comparées, donc : $|f(x,t)| = \underset{t\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $\pm\infty$ en tant que fonction de Riemann d'exposant $2 > 1$ (pour $-\infty$, il suffit par exemple de faire le changement de variable $u = -t$), par comparaison l'application $t \mapsto f(x,t)$ l'est également ; d'où la convergence absolue de $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

(b) Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres : pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente, et pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -ite^{-itx}e^{-t^2}$, et l'application $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$. Enfin, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = te^{-t^2}, (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

et l'application $t \mapsto te^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par un raisonnement analogue à celui de la question précédente (on compare à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $\pm\infty$). Donc, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\int_{\mathbb{R}} ite^{-itx}e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
Pour obtenir $-\frac{x}{2}g(x)$, on intègre par parties, en intégrant $t \mapsto te^{-t^2}$ (une primitive est $t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$) et en dérivant $t \mapsto ie^{-itx}$ (sa dérivée est $t \mapsto -i^2xe^{-itx} = xe^{-itx}$). Le terme entre crochets est bien défini, puisque $\left|-ie^{-itx}\frac{e^{-t^2}}{2}\right| = \frac{e^{-t^2}}{2} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, et on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -\left[-ie^{-itx}\frac{e^{-t^2}}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-itx} \times \left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)\mathrm{d}t = -\frac{x}{2}g(x).$$

(c) On résout l'équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par g, et on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$. Comme : $g(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$, on conclut.

3 Feuilles d'exercices

3.1 Indications et commentaires

L'icône « (🗎) » indique que les documents *Méthodes* donnent des conseils plus généraux.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices analogues.

Calcul intégral sur un segment

Exercice 1. (C)

1. Reconnaître $u'f'(u)$ avec f bien choisie dans l'intégrande. On peut aussi intégrer par parties I_{n+2}.
2. Utiliser un des théorèmes d'interversion du cours (sachant que l'un d'eux ne peut clairement pas s'appliquer : lequel ?), ou l'identité de la question précédente puis le théorème des gendarmes.
3. Les questions précédentes permettent de calculer $I_{2(k+1)} + I_{2k}$ ou $I_{2(k+1)+1} + I_{2k+1}$. Comment exprimer I_n à l'aide de tels termes ? Éventuellement lire *Méthodes*, *Déduire* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *de la relation de récurrence.* Passer ensuite à la limite.

Commentaires. Cet exercice illustre plusieurs techniques : 1° l'établissement de relations de récurrence vérifiées par une suite d'intégrales, dès lors que l'intégrande fait intervenir un exposant n (on abaisse en général la puissance avec une intégration par parties : pourquoi ?), 2° le calcul de limite d'intégrales (trivial ici avec un théorème d'interversion, mais les approches possibles sont nombreuses), 3° l'explicitation d'une suite à partir d'une relation de récurrence non triviale. Faire apparaître une somme télescopique est souvent efficace, mais cela nécessite parfois une multiplication adéquate.

★ **Exercice 2. (Irrationalité de π)**

1. Intégrer par parties en dérivant f_n de fois que nécessaire pour se ramener à un polynôme constant. Vous aurez besoin de la formule de dérivation de Leibniz pour étudier $f_n^{(k)}(\pi)$ et $f_n^{(k)}(0)$. Ne pas oublier l'hypothèse sur π.
2. Majorer $x \mapsto x(bx - a) = bx(x - \pi)$ est facile sans calcul *si on est géomètre*. Utiliser le théorème des gendarmes (les théorèmes d'interversion s'appliquent mais sont inutilement savants). Que dire d'une suite d'entiers qui converge vers 0 ? En inspectant l'intégrande, conclure à une absurdité.

Commentaires. L'idée d'abaisser l'exposant d'un facteur polynomial, autant de fois que nécessaire pour se ramener à un facteur de degré nul, apparaît souvent pour le calcul explicite d'intégrales et revient ici. À noter qu'il est souvent pertinent d'utiliser une formule d'Euler (ou $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$, ce qui est presque équivalent) pour simplifier le calcul intégral. Qu'en pensez-vous ici ? Les preuves d'irrationalité suivent souvent le même schéma (construction d'une suite strictement décroissante d'entiers naturels, comme vous l'avez fait pour $\sqrt{2}$ peut-être, ou à plus forte raison pour des nombres définis analytiquement : construction d'une suite convergente d'entiers). Pensez à reconnaître ce procédé dans l'exercice 35 du chapitre II.
Cette stratégie fonctionne à condition de savoir démontrer qu'une suite convergente d'entiers est stationnaire : à réviser si besoin !

★ **Exercice 3. (Intégrales de Wallis) (🗎)**

1. Trouver une relation de récurrence. Cela nécessite d'abaisser l'exposant de cos ou sin. Quelle formule le permettrait ? Voir *Méthodes* si besoin. Réitérer ensuite la relation de récurrence pour avoir une expression explicite de W_n. Attention à la parité de n. Voir *Méthodes*, *Déduire* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *de la relation de récurrence*, si besoin.
2. La constance est immédiate en écrivant ce qu'on veut comme égalité, et en comparant à la relation de récurrence normalement obtenue à la question précédente. Montrer : $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$, par un encadrement convenable (comment comparer W_n, W_{n+1} et W_{n+2} ? que vient faire là W_{n+2}, d'ailleurs ?), et conclure grâce à la valeur de la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\geqslant 0}$.

Commentaires. On illustre l'établissement de relations de récurrence vérifiées par une suite d'intégrales, dès lors que l'intégrande fait intervenir un exposant n (on abaisse en général la puissance avec une intégration par parties : pourquoi ?). Avec ici une spécificité des intégrales de fonctions trigonométriques : les très nombreuses formules qui les relient induisent plus d'identités. Même si ce n'est pas utile pour *cet* exercice, avoir conscience des symétries des graphes de cosinus et sinus, et savoir en tirer profit dans une intégrale (cela se traduit par des égalités entre intégrales obtenues par changement de variable), est souvent un second moyen d'obtenir des nouvelles relations. Cela apparaît dans les exercices 13, 12 et 21.
On a plus souvent coutume de calculer des intégrales de puissances de fonctions trigonométriques par linéarisation : l'essayer ici. Est-ce que le résultat est aussi satisfaisant qu'en utilisant une relation de récurrence ? Pourquoi faire autrement ?
Enfin, la stratégie pour obtenir l'équivalent de W_n est-elle adaptable à d'autres situations ? Pourquoi l'équivalent $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$ était non trivial ? Se demander pour quelles suites d'intégrales il semble possible de reproduire cet équivalent.

Exercice 4. Des conseils sur les études et encadrements de telles intégrales sont dans *Méthodes*.

1. Se ramener à des intégrales vérifiant les hypothèses du théorème fondamental de l'analyse.
2. La question précédente permet de calculer f' et d'en déduire les variations. Pour les limites : encadrer l'intégrande sur $[x, x^2]$ ou $[x^2, x]$ et utiliser le théorème des gendarmes.
3. Un raisonnement non rigoureux semble indiquer que pour x près de 1, on a : $f(x) \approx \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} \approx [\ln(|t-1|)]_x^{x^2} = \ln(2)$. Le formaliser en démontrant que la différence $f(x) - \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$ est « petite » (c'est-à-dire ?).

Commentaires. Avec ce genre de fonction, la difficulté n'est pas tant pour l'étude des variations (et pour cause : le calcul de dérivée est facilité par le théorème fondamental de l'analyse) que pour la détermination des limites. Là, il faut travailler son sens de l'analyse : pour déduire le comportement de l'intégrale de celui de l'intégrande, il faut avoir une bonne idée de ce qui, dans l'intégrande, contribue à la taille de l'intégrale (et donc il faut aussi avoir une idée de ce qui est grand ou petit).
Observation souvent payante : la croissance lente du logarithme permet, dans les conjectures, de faire comme s'il était constant (tant qu'on raisonne sur un intervalle de longueur « raisonnable »). Dans les raisonnements rigoureux : cela veut dire que l'encadrer trivialement au voisinage de $+\infty$ (ou de 0) n'est généralement pas une grande perte d'information.
Lorsque vous êtes au voisinage d'un point où un équivalent simple de l'intégrande est connu, raisonnez d'abord comme si vous pouviez passer aux équivalents dans l'intégrale (l'idée est profitable si cela ramène à une intégrale calculable). C'est en majorant ensuite la différence entre cette intégrale et l'approximation conjecturée que vous pourrez vous assurer qu'elles sont proches.
À noter que maintenant, vous avez des théorèmes d'intégration des relations de comparaison. Cela permet parfois de simplifier voire affiner l'étude asymptotique : ne les oubliez pas, à force d'être confortés dans vos réflexes de 1re année.

Exercice 5. (Égalité de Young)

1. Dériver chaque membre selon la variable a et montrer qu'ils sont égaux.
2. Le document *Méthodes* donne deux pistes pour gérer l'abandon d'une hypothèse de dérivabilité : ou bien on approche f par densité (par des fonctions en escalier ou des fonctions polynomiales), ou bien on approche l'intégrale par une somme de Riemann (pourquoi ? lire le document si besoin). Une observation fine des données ou de ce qu'on veut démontrer permet d'écarter très rapidement l'une des deux pistes.

Commentaires. L'exercice illustre la difficile idée de l'approximation des intégrales. Ce qui est difficile est surtout *d'y penser* : sans la première question, se dit-on qu'on va essayer de se ramener à une situation analogue ?
C'est en essayant d'appliquer cette idée d'approximation partout (et en échouant) que vous saurez identifier sur le long terme ce qui la rend pertinente ou non.
Le cours semblait déjà indiquer des relations entre les intégrales de f et f^{-1} (lorsque nous commentions l'intégrabilité des fonctions de Riemann, selon qu'on soit sur $]0,1]$ ou $[1,+\infty[$). Sauriez-vous vous inspirer de cet exercice pour démontrer rigoureusement l'observation du cours ? Les hypothèses sont évidemment à modifier : les fonctions de Riemann ne les vérifient pas.

Intégrales impropres, étude pratique

✓ **Exercice 6. (🗎C)** C'est standard : tout peut se traiter par comparaison aux séries de Riemann.

Commentaires. À analyser : quand faut-il faire l'analyse sur deux intervalles au lieu d'un seul ; comment on reconnaît les situations où un changement de variable nous dispense d'étudier le comportement aux deux bornes problématiques ; quand est-ce qu'on peut procéder par un calcul *a priori* de l'intégrale ; comment on compare aux fonctions de Riemann lorsqu'on n'a pas immédiatement un équivalent asymptotique.

✓ **Exercice 7. (🗎C)** C'est standard : tout peut se traiter par comparaison aux séries de Riemann. Ne pas oublier la méthode « $t^a f(t)$ ».

Commentaires. À analyser : quand faut-il faire l'analyse sur deux intervalles au lieu d'un seul ; comment on reconnaît les situations où un changement de variable nous dispense d'étudier le comportement aux deux bornes problématiques ; quand est-ce qu'on peut procéder par un calcul *a priori* de l'intégrale ; comment on compare aux fonctions de Riemann lorsqu'on n'a pas immédiatement un équivalent asymptotique. Dans le cas des intégrales de Bertrand, une fois que vous avez obtenu leur nature : comprendre pourquoi le résultat est *naturel*, afin d'affiner votre compréhension des ordres de grandeur en analyse.

✓ **Exercice 8. (🗎)** La nature de l'intégrale s'obtient par comparaison. Pour le calcul : se débarrasser du logarithme, pour n'avoir plus que des puissances de x et $1-x$ (et ainsi reconnaître une fonction plus simple à intégrer), grâce à une formule convenable.

Commentaires. Lorsqu'on a une fonction spéciale dont la dérivée est une fraction rationnelle (logarithme, arc tangente) ou, faute de mieux, une racine carrée de fraction rationnelle (arc sinus, arc cosinus), il est souvent rentable de se débarrasser de la fonction spéciale par dérivation.
Plus tard, une autre stratégie envisageable pour se débarrasser des fonctions embêtantes (ou des quotients) sera le développement en série et l'intégration terme à terme.
Si vous vous êtes bien débrouillés, vous aurez même trouvé une primitive de l'intégrande. Comparer l'exposant de $1-x$ de l'intégrande avec celui des primitives : qu'en pensez-vous ? Que pourrait-on conjecturer de plus général ? Peut-on l'expliquer qualitativement ? Et rigoureusement ?

★ **Exercice 9. (🗎C)** La nature de l'intégrale s'obtient par comparaison. Ne pas oublier la méthode « $t^a f(t)$ ». Pour le calcul : c'est le logarithme qui pose problème. Se ramener à l'intégration d'une fonction puissance peut se faire de deux manières : en intégrant par parties, ou en reconnaissant la dérivée k^{e} ou ℓ^{e} (à vous de juger) d'une intégrale à paramètre triviale à calculer.

Commentaires. Lorsqu'on a une fonction spéciale dont la dérivée est une fraction rationnelle (logarithme, arc tangente) ou, faute de mieux, une racine carrée de fraction rationnelle (arc sinus, arc cosinus), il est souvent rentable de se débarrasser de la fonction spéciale par dérivation.
Si vous avez choisi d'intégrer par parties : rappelons que l'énoncé de l'intégration par parties, pour les intégrales impropres, donne *aussi* un moyen d'obtenir la nature d'une intégrale. Est-ce que, avec une bonne rédaction, on peut faire d'une pierre deux coups : montrer que l'intégrale converge ET la calculer ? (La réponse est très souvent : oui.)

✓ **Exercice 10. (C)** L'existence est standard. Les méthodes de calcul sont exactement les mêmes qu'en 1re année. Vous pouvez faire d'une pierre deux coups bien souvent : 1° n'oubliez pas qu'en cas d'intégrande positif, un calcul direct menant à $\int_I f < +\infty$ fournit une preuve d'intégrabilité, 2° si vous utilisez les formules de l'intégration par parties ou du changement de variable, notez qu'elles donnent en même temps la nature des intégrales manipulées.

L'une de ces quatre intégrales peut aussi s'obtenir en introduisant un paramètre x et en l'obtenant par dérivation d'une intégrale plus simple. Laquelle ? L'intégrale à paramètre en question apparaît dans un autre exercice de ce chapitre.

> **Commentaires.** Il y a quelques types d'intégrales que tout élève se doit de savoir calculer sans hésiter : les intégrales de fractions rationnelles, celles dont l'intégrande est de la forme « polynôme fois logarithme » (le logarithme peut être remplacé par l'exponentielle, le cosinus, le sinus ; aussi par l'arc tangente mais c'est plus pénible), ou de la forme « fonction trigonométrique fois exponentielle ».
> L'idée d'introduire une intégrale à paramètre est fructueuse mais nécessite du recul. Vous n'y penserez que si vous avez déjà calculé des intégrales à paramètre « de référence » de votre initiative, suivant l'un des conseils de *l'aide à la révision du cours.*

✓ **Exercice 11. (C)** C'est très standard. Réviser si besoin comment on intègre des fractions rationnelles.

> **Commentaires.** L'intégration d'une fraction rationnelle ne doit poser aucune difficulté. Quelques observations sur le changement de variable $t = \frac{1}{x}$: 1° lorsque l'intégrande a un logarithme et que l'intervalle d'intégration est $\mathbb{R}_+^*$, le fait que $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ donne parfois des informations non triviales (éventuellement entre l'intégrale sur $]0,1]$ et celle sur $[1, +\infty[$, si le changement de variable sur $\mathbb{R}_+^*$ ne donne rien d'instructif), 2° la mesure $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est (presque) invariante par ce changement de variable. On gagne du temps lorsqu'on le remarque et qu'on la fait apparaître.

☢ **Exercice 12. (Méchantes intégrales impropres) (🗎)** L'intégrande (a) ressemble asymptotiquement (et au logarithme près, qui est bien connu pour avoir peu d'influence sur les ordres de grandeur) à $\frac{\sin(x)}{x}$: éventuellement s'inspirer des façons de démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$ converge (il y a la voie du cours, mais *Méthodes* en donne une autre plus géométrique). La (b) ressemble à une intégrale de Wallis : s'y ramener avec la relation de Chasles et une inégalité adéquate. Un exemple du cours ressemble beaucoup à la dernière intégrale : essayer de s'en inspirer, en se ramenant à une situation où c'est possible (en effet P n'est *a priori* pas strictement monotone).

> **Commentaires.** Le document *Méthodes* commente longuement les situations où il est pertinent d'utiliser la relation de Chasles pour étudier la nature d'une intégrale (*Natures d'intégrales obtenues par comparaison à des séries*). Mais il y a d'autres pistes dans les cas difficiles (notamment la troisième intégrale ne peut pas vraiment se traiter par cette approche). N'oubliez pas l'intégration par parties comme illustré dans le cours (et surtout de comprendre comment et pourquoi on l'utilise dans ce contexte, pour savoir reconnaître une situation où elle est pertinente), ni la méthode, illustrée dans *Méthodes* mais pas dans le cours, consistant à « éclater » l'intégrande en somme de fonctions plus simples grâce à un développement limité ou asymptotique.
> Selon la façon de vous y prendre pour la deuxième intégrale, vous n'aurez pas le bon intervalle d'intégration pour reconnaître une intégrale de Wallis. Néanmoins, le bon sens géométrique vous permettra de voir une relation entre l'intégrale sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et celle sur l'intervalle d'intégration que vous avez. Un bon usage d'un changement de variable formalisera l'idée géométrique. Cette idée revient souvent (exercices 13 et 21 notamment).

★ **Exercice 13. (Intégrales de Dirichlet)** Comparer $\ln(\sin(x))$ à $\ln(x)$ pour la nature de J, et utiliser un changement de variable pour en déduire celle de I. Ce changement de variable fournit une première équation vérifiée par I et J. Vous en aurez une deuxième en remarquant que $I + J$ est *presque* égale à J : pourquoi ? comment corriger le « presque » ? Avoir une connaissance maîtrisée des fonctions trigonométriques et des symétries de leurs graphes.

> **Commentaires.** Réviser si besoin comment on obtient un équivalent d'un logarithme à partir d'un équivalent ou développement de son argument, en prenant garde aux subtilités. Encore un exemple où les symétries des graphes des cosinus et sinus induisent des relations entre intégrales qui n'ont pas le même intervalle d'intégration. C'est très fréquent !

★ **Exercice 14. (Fonction Bêta d'Euler) (🗎)**

1. C'est très standard.
2. Par récurrence. L'hérédité nécessite d'intégrer par parties. Il y aura une subtilité néanmoins : si vous abaissez l'exposant de t^n, vous augmentez l'autre. Y remédier soit avec une hypothèse de récurrence bien posée, soit en exprimant $(1-t)^x$ en fonction de $(1-t)^{x-1}$ (le terme qu'on aimerait voir apparaître).

Commentaires. Illustration d'une idée vue et revue : calcul d'une intégrale en abaissant le degré d'un facteur polynomial jusqu'à se ramener à un degré nul, en intégrant par parties. On se demandera ce qu'on obtient comme relation, faute de mieux, lorsque n n'est pas un entier.

Intégrales impropres, étude théorique

Exercice 15.

1. Si $\eta > 0$ est un module d'uniforme continuité de f, l'utiliser pour contrôler la taille de $\int_x^{x+\eta} (f(x) - f(t))\,\mathrm{d}t$ pour tout x. Or les hypothèses permettent d'également contrôler la taille de ★ $\int_x^{x+\eta} f(t)\mathrm{d}t$ pour tout x *assez grand*. Conclure en comparant $f(x)$ à ces deux quantités.
2. Noter que $\int_x^y f$ est « petit » pour tout x assez grand et $y \geqslant x$ (pourquoi ?). Bien choisir y et utiliser l'hypothèse de monotonie pour conclure.

Commentaires. Les intégrales de la forme $\int_x^{x+y} f$ sont l'analogue intégral des « tranches de Cauchy » $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k$ ou $u_{n+p} - u_n$ croisées par ailleurs. Elles sont donc pertinentes à utiliser dans le même cadre d'utilisation. Noter que si l'intervalle d'intégration est très petit, et si f varie de manière contrôlée (soit par la monotonie soit par l'uniforme continuité ici), on a : $\int_x^{x+y} f \approx y \cdot f$. C'est pourquoi on parvient à faire le lien entre l'intégrale et l'intégrande.
Garder en tête le résultat de cet exercice, qui vous servira peut-être dans d'autres énoncés du type : « on a une hypothèse sur la convergence d'une intégrale : en déduire qu'une certaine fonction a une limite finie » (c'est le sens difficile). Voir aussi la discussion à ce sujet à l'exercice 17.

Exercice 16. On a vu dans le cours sous quelle condition suffisante un produit de fonctions est intégrable. S'en inspirer. J'affirme ensuite que $\int_0^x f''f$ peut naturellement s'exprimer sous la forme $\bigstar \pm \int_0^x f'^2$. Le fait que $\int_{\mathbb{R}_+} f''f$ converge assurera alors que $\bigstar$ et $\int_{\mathbb{R}_+} f'^2$ ont même nature : utiliser les données et le fait que f'^2 soit positive pour déterminer cette nature.

Commentaires. La présence de fonctions de carré intégrable doit directement faire penser à la structure d'espace vectoriel de $\mathrm{L}^2(I, K)$ ainsi qu'au résultat de cours sur le produit de fonctions de carré intégrable.

Exercice 17.

1. Raisonner par comparaison.
2. Utiliser ce qui précède pour montrer que la dérivée de $t \mapsto t(f(t))^2$ est intégrable, et conclure. Vous aurez à un moment besoin d'étudier un produit dépendant de fonctions intégrables : on a vu une telle situation en cours.
3. L'inégalité a « l'esthétique » de Cauchy-Schwarz, mais les fonctions de la majoration ne collent pas. Les faire apparaître en appliquant une certaine formule à $\int_0^{+\infty} f^2$, puis appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Commentaires. La présence de fonctions de carré intégrable doit directement faire penser à la structure d'espace vectoriel de $L^2(I, K)$ ainsi qu'au résultat de cours sur le produit de fonctions de carré intégrable. Une inégalité avec des carrés et des racines carrées d'intégrales doit immédiatement rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'identification des fonctions auxquelles appliquer cette inégalité n'est pas toujours directe, et j'en parle dans le document *Méthodes* de géométrie, section *Reconnaître et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*
Dans un contexte où les hypothèses portent sur des natures d'intégrales, et les résultats à démontrer concernent l'existence d'une limite (finie en général) d'une fonction, il y a en général deux arguments à fouiller : 1° utiliser le fait qu'une fonction d'intégrale convergente, et uniformément continue ou décroissante, admet une limite nulle, 2° remarquer que cette fonction est une primitive d'une autre fonction dont on sait que l'intégrale converge.

☢ **Exercice 18.** (🗎)

1. Aucune difficulté grâce à l'hypothèse de l'énoncé.
2. Cela ressemble à une somme de Riemann dont le pas est h (et tend vers 0) : reproduire les mêmes étapes de raisonnement que dans le cas classique d'une somme de Riemann associée à une fonction continue sur un segment. Le comportement au voisinage de $+\infty$ se gère grâce à l'hypothèse de l'énoncé.
3. Mettre cette somme sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$ avec h dépendant de x (et tel que $h \to 0$ quand $x \to 1$).

Commentaires. Il est plus facile de comparer deux objets de même nature : deux sommes, ou deux intégrales. C'est la relation de Chasles qui permet de transformer une intégrale en somme. Dans le sens contraire, noter qu'une somme n'est rien d'autre qu'une intégrale de fonction en escalier. Un peu de sens géométrique permet d'identifier rapidement laquelle.
Remarquer que la solution pour majorer une « différence petite » $|f(a_i) - f(x)|$, lorsque f n'a pas de meilleure régularité que la continuité, et lorsqu'il apparaît une infinité de réels d'appui a_i (ou bien un nombre fini devenant arbitrairement grand), est presque toujours la même. À comparer avec les exercices du chapitre préliminaire avec des énoncés de la forme « CVS + (H) implique CVU ».
Cet énoncé montre que les sommes de Riemann peuvent se généraliser à des intervalles ouverts ! Très utile à savoir ! Du moins, *sous certaines hypothèses.* L'élève motivé cherchera un exemple sur]0,1] qui ne fonctionne pas (somme de Riemann divergente avec pourtant une intégrale convergente). Vous trouverez d'autres énoncés fonctionnels (hypothèse de monotonie en général).

Développements asymptotiques

Exercice 19. (🗎) S'inspirer de l'exemple analogue du cours, à ceci près qu'on veut un terme en plus dans le développement : cela nécessite d'estimer plus finement la « différence petite » $f(1) - f(t)$ avec f une certaine fonction apparaissant dans votre raisonnement. Vous savez en principe comment les estimer (et si vous ne savez pas, *L'art de la majoration* doit être consulté de plus près). Une bonne intégration par parties peut également aider.

Commentaires. L'idée de comparer l'intégrale à celle obtenue en remplaçant $f(t)$ par $f(1)$ (avec f une certaine fonction apparaissant dans l'intégrande) NE peut PAS vous venir si vous n'analysez pas ce qui contribue majoritairement à la valeur de l'intégrale, et ce qui au contraire peut être approché sans affecter significativement sa contribution. Il faut commencer par là.

Exercice 20. Les premiers termes découlent de plusieurs intégrations par parties. Le terme d'erreur s'obtient par intégration des relations de comparaison. C'est une idée proche du cours.

Commentaires. On remarque l'efficacité de l'intégration par parties dans ces questions. Mais comment choisir la partie à intégrer, à dériver, pour que cette approche fonctionne ?

☢ **Exercice 21.** (🗎)

1. Cette intégrale est calculable explicitement, avec un changement de variable adéquat que vous avez normalement l'habitude de croiser lorsqu'on intègre des fractions rationnelles de fonctions trigonométriques ; même si ce n'est pas une fraction rationnelle, l'idée est proche.

2. Au vu du développement asymptotique proposé, vous pouvez conjecturer quelque chose sur $I_\varepsilon - J_\varepsilon$. Le démontrer en passant à la limite sous l'intégrale.
3. Remarquer une relation entre J_ε et $J_{\frac{1}{\varepsilon}}$.

> **Commentaires.** Si l'énoncé n'avait pas introduit I_ε, vous auriez pu trouver par vous-mêmes l'idée de vous ramener à cette intégrale. Pourquoi ? Rappelons (cf. *Méthodes*) que lorsqu'on se ramène à une autre intégrale *via* une conjecture, il n'est jamais pertinent que cette nouvelle intégrale ne dépende plus du paramètre ε qu'on fait tendre vers 0 ou l'infini. Se demander plutôt, parmi les autres termes de l'intégrande, quels sont ceux dont on peut ignorer la contribution (ou plutôt, ceux dont on peut faire une approximation sans que la contribution ne soit trop modifiée : ici, il serait faux de dire qu'elle n'est pas modifiée du tout).
> Encore un exercice qui illustre les multiples symétries des graphes des fonctions trigonométriques, qui induisent des relations non triviales entre intégrales. C'est avec cette idée en tête qu'on peut penser au lien entre J_ε et $J_{\frac{1}{\varepsilon}}$.

☢ **Exercice 22. (🗎)** L'idée est de trouver un changement de variable permettant de raisonner avec le théorème d'intégration des relations de comparaison. Se ramener à : $\int_0^{1/t} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1+u)\cdot\bigstar}}$, où $\bigstar$ est un facteur qui tend vers 1 quand $t \to 0$. Il est donc tentant de l'ignorer, et il est facile de montrer : $\int_0^{1/t} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1+u)}} \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$. Montrer alors que l'écart entre $\int_0^{1/t} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1+u)\cdot\bigstar}}$ et $\int_0^{1/t} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1+u)}}$ est négligeable devant $-\ln(t)$. Vous aurez une « différence petite ».

On peut réfléchir autrement : *avant* le changement de variable, comprendre pourquoi on peut approcher $\sqrt{1-x}$ par 1 sans trop de dommage.

> **Commentaires.** Simplement approcher $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)(t+x)}}$ par $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)x}}$ est une mauvaise idée qui ne permet pas de formuler de conjecture (si ce n'est que la limite quand $t \to 0$ est l'infini). Voir *Méthodes* sur les recours possibles pour trouver une bonne conjecture (et idéalement une démonstration directe). Il faut bien comprendre pourquoi toutes les modifications apparemment tortueuses de l'indication sont nécessaires pour contourner cette difficulté.

Exercice 23. (Développement asymptotique des sommes de Riemann)

1. Reprendre la démonstration de cours que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f, mais en améliorant l'estimation de $f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) - f(t)$ grâce aux formules de Taylor.
2. Trouver une fonction f dont la somme de Riemann est le membre de gauche de l'égalité.

> **Commentaires.** Il est plus facile de comparer deux objets de même nature : deux sommes, ou deux intégrales. C'est la relation de Chasles qui permet de transformer une intégrale en somme. Dans le sens contraire, noter qu'une somme n'est rien d'autre qu'une intégrale de fonction en escalier. Un peu de sens géométrique permet d'identifier rapidement laquelle.
> Plus on a de régularité, et plus on peut approcher précisément une différence petite : d'abord avec les accroissements finis, ensuite avec les formules de Taylor. J'en parle dans *L'art de la majoration*, en expliquant laquelle prévaut selon les cas.

Passages à la limite sous le signe intégrale, intégrales à paramètres

✓ **Exercice 24. (🗎 C)** C'est standard. Si vous peinez à obtenir une hypothèse de domination, lisez le document *Méthodes* à la section idoine.

> **Commentaires.** Lorsqu'on intègre sur un segment, on s'efforcera d'essayer d'appliquer les deux théorèmes d'interversion, afin de comprendre dans quel cas l'un est plus pertinent que l'autre.
> Essayez de voir aussi si vous parvenez à obtenir les limites par une bonne application du théorème des gendarmes. Parfois oui, parfois non, selon votre aisance en la matière.
> Commentaires sur l'hypothèse de domination, à méditer : 1° lorsqu'il y a un n en facteur de l'intégrande, et qu'on parvient malgré tout à vérifier l'hypothèse de domination, c'est souvent pour la même raison ; 2° le document *Méthodes* explique dans quelles situations les inégalités de convexité (ou issues des accroissements finis s'invitent naturellement.

Exercice 25. À x fixé, cela revient à passer à la limite sous le signe intégrale. La convergence uniforme suit le même principe, à ceci près qu'il faut se débarrasser du x dans la borne, par une majoration convenable. Laisser la limite simple sous forme intégrale pour se simplifier l'étude.

> **Commentaires.** À comparer avec l'énoncé d'un des théorèmes d'interversion du cours. Noter cependant une différence. Peut-on trouver une généralisation de l'énoncé du cours, pour englober le cas de cet exercice ?

✓ **Exercice 26.** (🗎)

1. Raisonnement banal.
2. L'approche pénible est *via* une intégration par parties pour obtenir une relation de récurrence. Gérer le t^2 indésirable du numérateur en tirant profit du fait qu'il soit proche du $t^2 + x^2$ du dénominateur : comment modifier le numérateur pour faire apparaître une simplification de ces deux termes ?

   L'approche fluide nécessite de dériver le membre de gauche grâce au théorème de dérivation des intégrales à paramètres (on obtient encore une relation de récurrence, mais pas la même et plus rapidement). Attention, pour l'hypothèse de domination, au fait que $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ ne soit pas intégrable sur $]0, +\infty[$: comment y remédier ?

> **Commentaires.** Cet exercice illustre en quoi la dérivation d'une intégrale à paramètre, qui souvent ressemble beaucoup à l'intégration par parties (puisqu'on dérive une « partie » de l'intégrande en espérant se ramener à une intégrale calculable), prévaut pourtant dans plusieurs cas. Pour savoir quoi choisir, mener la réflexion suivante : quand on a une expression symétrique en x et t (exemples : tx, t^2+x^2 ici), il vaut *parfois* mieux privilégier la dérivation qui va donner un terme constant, puisque cela permet de le sortir de l'intégrale. C'est pertinent à condition que, à ce terme constant près, on ait exactement l'intégrande qu'on voulait. Situation typique : lorsqu'on cherche à obtenir une relation de récurrence, et qu'on espère donc tomber après dérivation sur la forme de l'intégrale initiale.
> Si *au contraire* on ne tient pas à tomber sur l'intégrale initiale (justement parce que l'intégrande est trop compliqué à cause d'un terme dont on aimerait s'en débarrasser), on privilégie la dérivation qui va simplifier l'intégrande.

✓ **Exercice 27.** (🗎) Pour justifier la convergence de l'intégrale, notez que vous avez une « différence petite » au numérateur : vous savez la majorer. Conclure par comparaison.

Pour le calcul : dériver le membre de gauche, vu comme intégrale à paramètre de la variable a ou b (l'autre variable étant fixée). Vous aurez une fraction rationnelle à intégrer : on sait faire.

> **Commentaires.** Comme dans le commentaire de l'exercice 26, on est en face d'une situation où deux techniques semblent pertinentes : l'intégration par parties (pour dériver l'arc tangente et avoir une fraction rationnelle à la place) et la dérivation d'une intégrale à paramètre. Là encore, se demander l'avantage de l'une par rapport à l'autre.
> On a rencontré d'autres intégrales de la forme $\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x} \mathrm{d}x$. Quel résultat général semble se dégager ? Sauriez-vous le démontrer ? (La façon de faire dépend des hypothèses sur f.)

Exercice 28. (🗎)

1. Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Attention, le sinus hyperbolique n'est pas borné sur $\mathbb{R}$, ce qui empêche l'hypothèse de domination *a priori* : comment y remédier ?
2. Pour passer de f' à f, il faudrait avoir ch au lieu de sh, et se débarrasser du t en facteur dans l'intégrande. Une formule classique le permet.
3. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente, et conclure grâce à $f(0)$.

> **Commentaires.** On observe sur cet exemple qu'au lieu d'opposer l'intégration par parties et la dérivation des intégrales à paramètres (voir commentaires des exercices précédents), ils peuvent au contraire se compléter. Si vous refaites cet exercice *après* avoir vu les propriétés de la transformation de Laplace ou de Fourier vis-à-vis de la dérivation, vous devriez reconnaître un schéma général.
> Au vu des propriétés de l'exponentielle et du cosinus hyperbolique qui ont été utilisées, vous devriez pouvoir identifier toutes les intégrales à paramètres pouvant être calculées de la même manière (quitte à devoir admettre la valeur pour $x = 0$).

Exercice 29. (🗎)

1. Il n'y a aucune subtilité : quel est l'ensemble image de $t \mapsto x - \cos(t)$ pour $x \in]1, +\infty[$?
2. Dériver chaque membre (en voyant soit a, soit b comme une variable, l'autre étant fixée), et vérifier qu'on obtient la même chose. Le membre de gauche se dérive comme une intégrale à paramètre.

> **Commentaires.** Comme dans les commentaires des exercices 26 et 27, on est en face d'une situation où deux techniques semblent pertinentes : l'intégration par parties (pour dériver le logarithme et avoir une fraction rationnelle à la place) et la dérivation d'une intégrale à paramètre. Là encore, se demander l'avantage de l'une par rapport à l'autre.
> La résolution de cet exercice vous fait implicitement découvrir « une primitive non usuelle mais qui pourrait l'être ». Utile à retenir. On pourra également se demander *comment on pouvait la trouver directement.*
> Seriez-vous capables de compléter cet exercice en calculant $\int_0^{\pi} \ln(x - \cos(t))\mathrm{d}t$?

✓ **Exercice 30.** (🗎)

1. Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
2. Calculer g' est très simple. Pour en déduire g, vous devez calculer la constante d'intégration. Pour cela : remarquer que vous ne connaissez *a priori* par la valeur de $g(x)$, peu importe x, en revanche $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ semble accessible : pourquoi ?

> **Commentaires.** À la lumière de cet exemple, constater que la dérivation des intégrales à paramètres est adaptée aux intégrales avec du t^x et du logarithme. Ayez les bons réflexes pour l'hypothèse de domination, quand la majoration naïve ne donne pas une fonction intégrable.
> L'idée de passer par un passage à la limite plutôt que par une évaluation en un réel bien choisi, pour déterminer une constante d'intégration, n'est pas du tout une idée rare dans ce contexte (on la revoit notamment dans l'exercice 36). Y penser dans d'autres situations.
> À chaque fois, avant de songer à un théorème d'interversion pour passer à la limite dans une intégrale (ce qui marche souvent), il vaut le coup de s'interroger quelques secondes, pour voir si le théorème des gendarmes n'est pas plus direct (en conservant ce qui dicte le passage à la limite et en encadrant trivialement ce qui reste).

Exercice 31. (🗎) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Vous aurez besoin à un moment de déterminer une constante d'intégration : pour cela, noter que vous savez calculer l'intégrale de l'énoncé pour $x = 0$. Cependant, si vous avez correctement appliqué le théorème de dérivation, vous aurez une expression valable uniquement pour $x > 0$... Comment passer de $x > 0$ à $x = 0$?

La seconde intégrale demandée s'exprime en fonction de la première. Pour comprendre pourquoi : noter que dans la première, il apparaît $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. Autrement dit, on a presque un terme en $u'u$. Pourquoi cela doit-il vous évoquer $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$?

> **Commentaires.** Comme dans les commentaires des exercices 26, 27 et 29, on est en face d'une situation où deux techniques semblent pertinentes : l'intégration par parties (pour dériver l'arc tangente et avoir une fraction rationnelle à la place) et la dérivation d'une intégrale à paramètre. Là encore, se demander l'avantage de l'une par rapport à l'autre.
> Il est TRÈS fréquent que le théorème de dérivation ne s'applique pas sur tout le domaine de définition de l'intégrale à paramètre, et le moyen d'étendre malgré tout l'expression calculée à tout le domaine est *toujours* le même. En faire un RÉFLEXE.
> Dans l'indication, je propose de calculer une constante d'intégration en considérant $x = 0$. Pourquoi ne proposé-je pas de prendre la limite quand $x \to +\infty$, comme dans d'autres exercices ?
> À ce stade, vous avez dû remarquer qu'il y a beaucoup d'intégrales à paramètres avec le paramètre x dans un logarithme ou une arc tangente. Sauriez-vous l'expliquer, et proposer plus généralement une famille d'intégrales calculables par cette méthode ? (Sans forcément chercher à produire un résultat explicite et définitif.)

Exercice 32. (Florilège) (🗎) Il s'agit à chaque fois de calculer la dérivée d'une intégrale à paramètre. Vous rencontrerez deux cas de figure : soit vous aurez une intégrale explicitement calculable après dérivation, soit vous pourrez exprimer la dérivée en fonction de l'intégrale à paramètre de départ (autrement dit : trouver une équation différentielle du premier ordre). Pour la dernière intégrale, deux subtilités : dériver une seule fois ne suffira pas, et surtout : noter qu'après dérivation, l'intégrande est de l'ordre de grandeur de $\frac{\sin(t)}{t}$, et vous savez que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ ne converge pas absolument. L'hypothèse de domination ne semble donc pas vérifiable : contourner la difficulté avec une manœuvre analogue à celle utilisée dans le cours pour avoir la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

> **Commentaires.** On renvoie aux commentaires des exercices précédents pour les intégrales (a) à (e). Pour la (f), noter que l'idée pour la dériver malgré tout ne sort pas de nulle part : on a expliqué en cours pourquoi la technique utilisée est fructueuse. Il faut reconnaître son cadre d'application.
> L'intégrale (c) est la *transformée de Fourier de la gaussienne.* Un grand classique qui apparaît notamment dans la théorie des probabilités.

Exercice 33. (Prolongement de la fonction dzêta)

1. Il est plus simple de partir du membre de droite. Avec la relation de Chasles, se placer sur des segments qui simplifient la fonction partie entière. Simplifier le calcul.
2. Utiliser le théorème de classe C^k des intégrales à paramètres. Attention au problème près de zéro, au moment de choisir la fonction de domination. *Méthodes* vous dit comment réagir dans ce cas. Une intégrale avec du $\ln(t)$ ne doit pas vous faire peur : ne pas oublier la méthode « $t^\alpha f(t)$ ».
3. Calculer la limite quand $s \to 1$ de $(s-1)\zeta(s)$ grâce aux deux questions précédentes.

> **Commentaires.** Il est intéressant de savoir obtenir l'équivalent de la dernière question directement : ne pouvait-on pas encadrer $\zeta(s)$ directement par des termes simples et explicites ?
> On remarquera que la réécriture de la première question a les mêmes mérites que l'intégration par parties (comme on l'a illustré dans le cours avec l'intégrale de Dirichlet), à savoir : augmenter l'exposant de t au dénominateur pour renforcer la convergence (d'où le fait que dans la seconde question, on ait une fonction définie sur $]0,+\infty[$ et non $]1,+\infty[$). Ce n'est pas un hasard : on peut en fait faire des analogues de l'intégration par parties avec les sommes, et c'est ce qu'on appelle une transformation d'Abel (voir le chapitre II). C'est bien ce qu'on fait ici, même si c'est sous une forme où vous ne la reconnaissez pas : comprendre comment on passe d'une transformée d'Abel à cette expression (sans quoi on peut se demander d'où elle sort) : l'intérêt d'une telle transformation a été illustré, à savoir appliquer un théorème sur les intégrales à paramètres, et avec une fonction qui « décroît plus vite » que le $s \mapsto \frac{1}{n^s}$ de la somme d'origine (mais ce n'est pas le seul intérêt).
> La deuxième question permet de prolonger $s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ sur $]0,+\infty[$ (et même mieux, mais en MP on doit se contenter de la variable réelle). C'est une information capitale pour l'arithméticien, qui sait que les zéros du prolongement ainsi obtenu disent TOUT de la répartition des nombres premiers. C'est ce qu'on utilise pour démontrer le *théorème des nombres premiers* et c'est au cœur de *l'hypothèse de Riemann.*

★ **Exercice 34.**

1. Utiliser le théorème des gendarmes. La majoration convenable est triviale. Pour la minoration : utiliser la continuité pour mesurer le fait que f soit « proche » de $\|f\|_\infty$ (qui est atteint : pourquoi ?) sur un intervalle « suffisamment grand ». Le quantifier soigneusement et en déduire une minoration par une quantité dépendant de $\|f\|_\infty$.
2. Comme souvent lorsqu'on a une quantité de la forme $f(x)^{g(x)}$: mettre sous forme exponentielle est pertinent. Reconnaître un taux d'accroissement. Calculer sa limite en 0 grâce à un théorème du cours.

Commentaires. Comprendre pourquoi on n'utilise pas un des théorèmes du cours. Pour l'encadrement : majorer par $\|f\|_\infty$ est toujours facile, vu que c'est un majorant par définition. Minorer par une quantité dépendant de $\|f\|_\infty$ est plus délicat (et on a déjà rencontré ce problème à plusieurs reprises, que ce soit dans le chapitre préliminaire quand on a démontré que la norme infinie est une norme, ou plus difficile encore : quand on a démontré l'égalité $\int_I f = \sup_{J\in\mathscr{S}(I)} \int_J f$ dans le cas $I =]a,b[$ et $f \geqslant 0$; le même problème se reposera pour les familles sommables). Il y a essentiellement deux façons de *minorer* par une borne supérieure d'un ensemble X, qui s'applique donc aussi aux normes infinies : 1° soit on produit un majorant de X, et on utilise le fait que la borne supérieure est son plus *petit* majorant, 2° soit on utilise le fait que pour tout ε, il existe $x \in X$ tel que : $\sup -\varepsilon \leqslant x \leqslant \sup$.
Ici, la continuité nous permet d'avoir mieux : on veut en effet minorer par $\|f\|_\infty$ pour « assez de valeurs de t » (sinon l'intégrale ignore ces valeurs). Bien noter l'importance de cette hypothèse ainsi que du fait que la borne supérieure soit atteinte par une fonction continue sur un segment.

★ **Exercice 35.** Exprimer $f(x) = f(x) - f(x_0)$ comme une intégrale, et faire un changement de variable adéquat pour que cette intégrale devienne de la forme $(x - x_0)g(x)$ avec g une intégrale à paramètre, dont on montrera la classe C^{n-1} grâce aux théorèmes du cours.

Commentaires. L'écriture $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'$, très naturelle, n'est pourtant pas toujours la plus intéressante. Un changement de variable permet de la ramener à une intégrale à bornes fixes. On a déjà discuté de cet intérêt dans *L'art de la majoration*, pour la manipulation d'inégalités utilisant le reste intégral de la formule de Taylor, mais on en a un autre ici : faire apparaître clairement une relation entre $x - x_0$ (ou $(x - x_0)^2$, ou...) et $f(x) - f(x_0)$, le rapport entre les deux donnant une intégrale à paramètre. Cela permet d'étudier la régularité des taux d'accroissement en ignorant la difficulté due à la division par $x - x_0$.
Cet exercice est intéressant puisqu'il montre que finalement, les applications régulières se factorisent comme les polynômes (quitte à perdre un peu de régularité à chaque factorisation, mais si l'on a une fonction indéfiniment dérivable on s'en moque). Une question naturelle se pose : et s'il y a une infinité de zéros ? Par exemple, grâce à cet exercice on sait qu'on peut écrire : $\sin(x) = g_n(x)x\prod_{k=1}^{n}(x - k\pi)(x + k\pi)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec g_n de classe C^∞. Peut-on en déduire une expression simple du sinus à l'aide de $x\prod_{k=1}^{+\infty}(x - k\pi)(x + k\pi) = \lim_{n\to+\infty} x\prod_{k=1}^{n}(x - k\pi)(x + k\pi)$? Il existe une réponse définitive à cette question, qui est donnée par le théorème de préparation de Weierstraß (très largement hors programme), mais il est intéressant que vous y réfléchissiez dans un premier temps seuls. Le produit de Weierstraß de l'exercice 44 peut alimenter votre réflexion.

Calcul des intégrales de Dirichlet et de Gauss

★ **Exercice 36. (Intégrale de Dirichlet, avec la transformation de Laplace)**

1. C'est standard. Une majoration bien choisie du sinus vous donne directement une intégrale de référence.
2. Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
3. Vous savez calculer les intégrales de fonctions de la forme « fonction trigonométrique fois exponentielle ». Pour la limite en $+\infty$, vous ferez une économie en regardant plutôt la limite du module. Intégrer le résultat obtenu.
4. Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ grâce au théorème des gendarmes : vous pouvez en effet majorer $|F(x)|$ par une intégrale très simple à calculer (vous pouvez aussi utiliser un théorème d'interversion). Passer à la limite dans l'égalité de la question précédente.
5. Passer à la limite quand $x \to 0$ dans l'égalité précédente. Le plus dur est de montrer : $\lim_{x\to0} F(x) = F(0)$, autrement dit : que F est continue en 0. Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Problème : l'hypothèse de domination est invérifiable sur $\mathbb{R}_+$, sinon l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}$ pour tout $x \geqslant 0$ impliquerait l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$, et le cours nous enseigne qu'elle est fausse. Contourner la difficulté avec une manœuvre analogue à celle utilisée dans le cours pour avoir la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

Commentaires. Les premières questions ne vous enseigneront rien de plus (ou du moins tout autant) que tous les autres exercices avec des intégrales à paramètres. C'est la dernière qui introduit une nouveauté (qui n'en est pas une si vous avez traité avec succès l'intégrale (f) de l'exercice 32). La résolution proposée dans l'indication n'est pas une idée saugrenue et vous devez vous en convaincre. Aussi : avant de s'acharner à démontrer l'hypothèse de domination, se demander si sa véracité n'entraînerait pas une contradiction. La question se pose lorsque vous avez une fonction de la forme $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ ou apparentée, puisque le cours vous enseigne qu'elle n'est pas intégrable. C'est là que vous vous dites : il faut appliquer le théorème que j'ai en tête à une *autre* intégrale à paramètre, où là la domination doit moralement marcher (exposant de t suffisamment élevé au dénominateur).
On a implicitement calculé la transformée de Laplace du sinus cardinal : à la lumière de l'exercice 46, regarder si les propriétés de cette transformée n'auraient pas pu servir ici.

Exercice 37. (Intégrale de Gauß, avec le théorème de convergence dominée) (🗎)

1. Utiliser le théorème de convergence dominée, comme indiqué par l'entête. Le document *Méthodes* explique comment faire lorsque les bornes dépendent de n. Pour l'hypothèse de domination : mettre l'intégrande sous la forme $e^{b\ln(a)}$ et majorer le logarithme grâce à sa concavité.
2. Faire un changement de variable dans $\int_0^n \left(1-\frac{t^2}{n}\right) \mathrm{d}t$ qui donne une intégrale connue, présente dans ces feuilles d'exercices et dont nous avons le comportement quand $n \to +\infty$. Conclure par unicité de la limite.

Commentaires. La stratégie pour calculer la limite d'une suite d'intégrales dont les bornes dépendent de n peut paraître astucieuse au premier abord. Faites en sorte que ce ne soit plus le cas au second. On en parle dans *Méthodes*.
Se demander pourquoi on n'a pas plutôt cherché à obtenir l'intégrale de Gauß comme limite de $\int_0^{+\infty} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$: qu'est-ce qui aurait coincé ?
L'indication vous dit de se ramener à une intégrale classique par changement de variable. Mais pourquoi ne pas simplement calculer l'intégrale ? C'est possible, comme pour toute intégrale de fonctions polynomiales. Le faire. Constater que cela marche. Comprendre néanmoins pourquoi j'ai choisi de ne pas procéder ainsi. Indice : c'est pour éviter un raisonnement circulaire subtil (qui est néanmoins évitable par d'autres biais).
On a là une belle illustration de la stratégie d'approximation qui est en filigrane dans *tous* les chapitres d'analyse de l'année : on approche l'intégrale de Gauß par l'intégrale de fonctions plus simples (en l'occurrence polynomiales) pour permettre son calcul. À comparer avec mon discours dans la *Présentation* du chapitre d'intégration. Une autre illustration est dans l'exercice 40.

Exercice 38. (Intégrale de Gauß, avec une intégrale à paramètre)

1. Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Il n'y a pas de subtilité. Faire ensuite un changement de variable pour reconnaître G et G'.
2. Utiliser un théorème d'interversion ou un usage clairvoyant du théorème des gendarmes (majorer trivialement presque tout, en gardant tout de même la dépendance en x qui assure la convergence vers 0). Intégrer l'égalité précédente et calculer la constante d'intégration grâce à la valeur en 0. Remarquer que l'intégrale de Gauß s'exprime simplement en fonction de G.

Commentaires. Avez-vous une idée de la raison du choix de la fonction F ? Ce $1+t^2$ peut paraître curieux : où intervient-il dans le raisonnement ? Réfléchir à ce qui a présidé ce choix. L'intervalle d'intégration est-il important ? Si votre réflexion est bonne, vous devriez trouver d'autres fonctions F (mais pas beaucoup plus...) qui permettraient également de calculer l'intégrale de Gauß sans que l'on ait à modifier énormément le raisonnement. C'est intéressant parce que cela pourra vous donner des idées pour d'autres intégrales, à commencer par celles de l'exercice 39.
Néanmoins cette stratégie rencontre rapidement ses limites : arriverez-vous à obtenir la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^3} \mathrm{d}t$ par ce moyen ?

Exercice 39. (Intégrales de Fresnel) On aimerait passer par l'intégrale à paramètre $x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-ix(1+t^2)}}{1+t^2} \mathrm{d}t$. Il n'y a pas de différence conceptuelle majeure, hormis pour la limite en $+\infty$: cette différence doit vous pousser à légèrement modifier l'intégrande proposé ci-dessus. On doit garder le i (pour faire le lien avec $e^{ix^2} = \cos(x^2) + i\sin(x^2)$ qui donne les intégrandes de l'énoncé) tout en ayant une fonction tendant *clairement* vers 0 en l'infini. Que faire ?

Commentaires. Voir le commentaire des exercices précédents, surtout le n° 38.

Compléments sur la fonction Γ d'Euler

★ Exercice 40. (Formules de Gauß)

1. Utiliser le théorème de convergence dominée. Le document *Méthodes* explique comment faire lorsque les bornes dépendent de n. Pour l'hypothèse de domination : mettre l'intégrande sous la forme $e^{b\ln(a)}$ et majorer le logarithme grâce à sa concavité.
2. Calculer l'intégrale du membre de droite de la question précédente, par récurrence et intégration par parties.

Commentaires. Comme dans l'exercice 37, on a là une belle illustration de la stratégie d'approximation qui est en filigrane dans *tous* les chapitres d'analyse de l'année : on approche la fonction Γ par l'intégrale de fonctions plus simples pour permettre son calcul. À comparer avec mon discours dans la *Présentation* du chapitre d'intégration.
L'idée d'abaisser l'exposant d'un facteur polynomial, autant de fois que nécessaire pour se ramener à un facteur de degré nul, apparaît souvent pour le calcul explicite d'intégrales et revient ici. Attention cependant lorsque vous rédigez une récurrence soignée : la présence d'un n dans l'intégrande et la borne (donc pas seulement dans l'exposant abaissé par l'intégration par parties) fait que votre proposition à démontrer ne peut pas porter sur $\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$: pourquoi ? Et sur quoi donc ? Vous pouvez aussi faire le lien avec les intégrales de l'exercice 14 afin d'éviter toute contorsion.
La formule de Gauß est la première interpolation de la factorielle sur $\mathbb{R}_+^*$ qui fut proposée (par... Bernoulli !), avant qu'Euler ne trouve l'expression intégrale qui est bien plus maniable. Retrouveriez-vous, en prenant cette formule comme une *définition* de $\Gamma(x)$, le fait que $\Gamma(x+1) = x!$ pour tout x entier ? On peut aussi se demander comment Gauß put songer à une formule partielle pour généraliser la factorielle. Une piste : donner un équivalent asymptotique de $\binom{x+n}{n}$ quand $n \to +\infty$, qui s'exprime à l'aide de $x!$. En déduire que pour prolonger $x!$ en tout réel x strictement positif, il suffit de prolonger $x \mapsto \binom{x+n}{n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comprendre pourquoi c'est très naturel à faire. Faire le lien avec la formule de Gauß.
Cette formule est classiquement utilisée pour démontrer que la fonction Γ est l'unique fonction à interpoler la factorielle en étant logarithmiquement convexe (théorème de Bohr-Mollerup) : pourquoi cette condition est-elle « naturelle » à exiger ? Sauriez-vous démontrer cette unicité ?
Arriveriez-vous à obtenir d'autres valeurs de Γ qu'en les entiers naturels non nuls, avec cette formule ? En $\frac{1}{2}$ par exemple ? Essayer de voir si vous retrouvez par cette formule d'autres propriétés de Γ (stricte positivité, convexité, etc.). Comprendre ce qui rend l'expression intégrale meilleure dès qu'on fait de l'analyse.
Auriez-vous su démontrer que le membre de droite a une limite finie *sans utiliser les questions précédentes* ? Normalement oui, si vous avez bien retenu la philosophie du chapitre préliminaire. Est-ce que cela converge en x négatif ? Qu'en déduire sur Γ ?

Exercice 41. (Formule des compléments)

1. Si l'on pose : $u_n(x) = \dfrac{n!n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$, calculer de deux manières différentes $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n(x)u_n(y)}{u_n(x+y)}$. Un moyen est fourni par l'exercice 40. Pour l'autre : utiliser un raisonnement analogue à celui de l'exercice 14 pour remarquer qu'après simplifications, ce quotient s'exprime à l'aide de $\mathrm{B}(x, y)$, $\mathrm{B}(x+n+1, y)$ et $\mathrm{B}(n+1, y)$. Utiliser des équivalents simples quand y est un entier naturel, le théorème des gendarmes quand y est quelconque, pour montrer que tous les termes en facteur de $\mathrm{B}(x, y)$ tendent vers 1.
2. On obtient $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ avec un choix simple de (x, y) dans la question précédente. Reconnaître $u'f'(u)$ dans l'intégrande de B, pour ce choix. Faire un changement de variable pour en déduire l'intégrale de Gauß.

Commentaires. On se demandera si cette formule est utile plutôt pour le calcul de B ou de la fonction Γ, et ce qu'elle généralise comme formule classique. N'oublions pas en effet que Γ interpole la factorielle, et qu'il est donc naturel de vouloir généraliser les formules impliquant la factorielle à l'aide de la fonction Γ.
L'énoncé recommande de commencer par traiter le cas où x ou y est un entier naturel. Il faut se demander ce que cela apporte, et pourquoi l'on pouvait sentir que le cas réel se ramène aisément au cas entier. Cela nécessite encore une compréhension fine des ordres de grandeur en analyse.

Exercice 42. (Étude de la fonction Γ)

1. Une seule propriété de votre cours permet d'avoir des inégalités strictes pour une intégrale.
2. Utiliser le théorème de classe C^k des intégrales à paramètres. Pour l'hypothèse de domination : ne pas perdre de vue que $x \mapsto t^x$ n'a pas les mêmes variations selon que $t \leqslant 1$ ou $t \geqslant 1$: vous aurez donc une distinction de cas à faire pour en tenir compte dans vos majorations. Lire *Méthodes* à la section idoine si besoin.
3. Exprimer la dérivée seconde de ces deux fonctions. La positivité de Γ'' est triviale. Pour $(\ln \circ \Gamma)''$: calculer explicitement cette dérivée, puis écrire *concrètement* l'inégalité entre les trois intégrales apparaissant dans son calcul. Vous reconnaîtrez la forme d'une inégalité classique, qu'il faudra appliquer à des fonctions bien choisies.

   Remarque. C'est un exercice classique que la convexité de $\ln \circ f$ implique la convexité de f.
4. Démontrer une égalité du type : $\Gamma(x) = (x-1) \times \bigstar$ (cela doit vous évoquer quelque chose), avec $\bigstar$ supérieur à une constante strictement positive. La convexité peut éventuellement vous aider à trouver une inégalité à défaut d'une égalité, si vous séchez.
5. C'est très facile si vous avez trouvé l'égalité à laquelle je fais allusion dans la question précédente.

Commentaires. L'exercice ne demande rien sur la monotonie de Γ. Auriez-vous une idée de la raison à cela ?
L'hypothèse de domination de la seconde question pose un problème qu'on croise rarement (même si vous avez pu le rencontrer dans l'exercice 24). D'où sort ce problème ? J'affirme néanmoins qu'une lecture assidue de *Méthodes*, *Comment vérifier l'hypothèse de domination ?*, rend prévisible la résolution de ce problème.
Je parle d'une distinction de cas dans l'indication, mais on peut s'en passer : comment ? Utiliser le fait que si l'on est inférieur à une quantité *positive* ou une autre, alors on est aussi inférieur à...
Les deux limites à trouver dans cet exercice ne peuvent pas être obtenues par les théorèmes du cours : se demander pourquoi. Les stratégies pour contourner cette difficulté sont presque toujours les mêmes.

Exercice 43. (Raffinement de la formule de Stirling)

1. Faire un changement de variable. Analyser les termes exponentiels doit vous aider à trouver lequel.
2. Mettre $\left(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}\right)^x$ sous la forme $e^{b\ln(a)}$ et effectuer un développement asymptotique.
3. Faire une distinction de cas selon que $t < -\sqrt{x}$, $0 > t > -\sqrt{x}$ ou $t \geqslant 0$. Faire des études de variation pour minorer $\varphi(t) - f(x,t)$. L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de gagner du temps dans l'un des cas.
4. Utiliser le théorème de convergence dominée (les deux questions ont mâché le travail). Un changement de variable permet d'exprimer l'intégrale obtenue à l'aide de l'intégrale de Gauß.

Commentaires. La stratégie pour calculer la limite d'une suite d'intégrales dont les bornes dépendent de x peut paraître astucieuse au premier abord. Faites en sorte que ce ne soit plus le cas au second. On en parle dans *Méthodes*.
Pourquoi cette démonstration de la formule de Stirling est, en un sens, plus satisfaisante que celles que vous avez eues jusqu'à présent ? (Même en se restreignant à x entier.)
Est-ce que cet exercice aurait permis de démontrer la formule de Stirling classique (avec un paramètre entier n) ? Attention à éviter les raisonnements circulaires : a-t-on eu besoin de la formule de Stirling pour obtenir la valeur de l'intégrale de Gauß utilisée dans la dernière question ?
L'hypothèse de domination est difficile à obtenir. Sans indication, aurait-on pu trouver les propositions de l'énoncé naturellement ?

Exercice 44. (Formule de Weierstraß) Simplifier $\frac{n!n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+n)}$ en regroupant chacun des termes du dénominateur (sauf un) avec l'un des termes de la factorielle. La constante γ permet d'exprimer $n^x = e^{x\ln(n)}$ en fonction des $e^{-\frac{x}{k}}$.

Commentaires. Voyez-vous pourquoi il était intéressant de ne pas laisser le n^x de la formule de Gauß ainsi, et de le réécrire sous cette forme *a priori* tortueuse et non intuitive ?
Que donne le membre de droite si x est négatif ? Qu'est-ce que cela implique d'intéressant sur Γ ?
On sait démontrer aisément que $\Gamma(s)$ est en fait défini dès que $\mathrm{Re}(s) > 0$. Pourquoi s'est-on restreint à x réel dans tous les exercices précédents ? Quelles propriétés aurait-on eu du mal à obtenir pour x complexe ? Comprendre alors en quoi cette formule de Weierstraß résorbe cette difficulté, et pourquoi écrire une fonction sous forme de produit (infini) de fonctions simples est potentiellement intéressant. Méditer sur ce produit en ayant en tête les réflexions du commentaire de l'exercice 35.

Exercice 45. (Fonction Digamma)

3. Utiliser l'exercice 44 pour exprimer $\ln \circ \Gamma(x)$ comme une somme. Quel rapport avec $\psi(x)$?
4. Reconnaître une somme télescopique. Noter que $\psi(1)$ s'exprime aussi comme une intégrale (par définition).
5. Simplifier $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+n}\right)$ soit avec un changement d'indice convenable (attention à ne pas faire apparaître de différence de sommes divergentes), soit avec des sommes télescopiques.
6. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{(X+p)(X+q)}$ pour faire apparaître la somme de la seconde question, puis ψ.

Commentaires. Auriez-vous su démontrer la convergence de la série de la première question sans utiliser l'exercice 44 ? Voyez-vous pourquoi cette expression de ψ sous forme de somme est en général préférable à sa définition ?
Si vous avez réussi cet exercice : aurait-on pu trouver la valeur de l'intégrale de la troisième question sans introduire ψ ni le produit de Weierstraß ? S'inspirer des calculs des intégrales obtenus, dans cette feuille d'exercices, par passage à la limite d'intégrales plus simples. Vous avez notamment dû remarquer que dans ces cas de figure, les exponentielles sont toujours approchées de la même manière. Et si p, q ne sont pas distincts, *conjecturez*-vous une relation toujours valable en fonction de ψ, dans la dernière question ? Pour démontrer la conjecture, il faudrait avoir à disposition la théorie des séries de fonctions (chapitre VII).

Compléments sur les transformées de Laplace et de Fourier, sur le produit de convolution

★ **Exercice 46. (Transformation de Laplace)**

1. C'est standard.
2. Le calcul est analogue à celui effectué pour obtenir $\Gamma(n+1)$ dans le cours (on peut d'ailleurs s'y ramener *via* changement de variable).
3. Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Pour revenir de f' à f : intégrer par parties.
4. Comme $\mathcal{L}$ est linéaire, cela revient à montrer que si $\mathrm{L}(f)(s) = 0$ pour tout s assez grand, alors $f = 0$. Remarquer la similitude entre les égalités équivalentes à $\mathcal{L}(f)(s) = 0$ et l'un des exemples du cours. S'en inspirer, ou mieux : s'y ramener.

Commentaires. Remarquez qu'il y a des transformées de Laplace plus ou moins explicites dans les exercices de ce chapitre. Comparer ce que vous y avez trouvé avec les résultats de cet exercice.
Comparer la régularité de f et $\mathcal{L}(f)$ (si vous n'avez pas d'idée : y réfléchir après avoir traité l'exercice 48). Quel peut être l'intérêt d'étudier la transformée de Laplace d'une fonction plutôt que la fonction elle-même ? Le cours de Sciences Industrielles de l'Ingénieur vous donne peut-être une idée.
La dernière question dit que la transformation de Laplace est injective ; mais sur quel ensemble ?

Exercice 47. (Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale : cas particulier)

1. Raisonnement banal : on se ramène trivialement à une intégrale de référence.
2. Utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu. Remarquer que l'hypothèse de domination semble invérifiable. Y remédier avec un changement de variable qui élimine le terme gênant.

Commentaires. Le raisonnement effectué ici pour pouvoir appliquer un théorème d'interversion marche assez rarement, néanmoins il vaut le coup de se demander ce qui le rend payant, et dans quelles circonstances proches on peut l'appliquer : qu'est-ce qui empêchait l'hypothèse de domination d'être vérifiée, et qui a disparu après le changement de variable ?

★ Exercice 48. (Transformation de Fourier)

1. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres donne deux des propriétés en même temps. L'hypothèse de domination s'obtient trivialement grâce à une hypothèse de l'énoncé.
2. Faire un changement de variable pour transformer $f(t-a)$ en $f(t)$ dans l'intégrande.
3. Un calcul sans mystère (donner un nom aux extrémités de S d'abord !).
4. Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Rien n'est difficile.
5. Intégrer par parties pour passer de f' à f dans l'intégrande.

Commentaires. Noter que la transformation de Fourier et celle de Laplace se ressemblent beaucoup ? Qu'est-ce qui justifie de préférer l'une à l'autre ? Il semble que la transformation de Fourier soit plus exigeante (il faut une fonction intégrable) : a-t-elle des arguments à faire valoir que la transformation de Laplace n'a pas ?
Pour chaque question, demander si la transformation de Laplace ne vérifie pas un résultat analogue. Et réciproquement !
Pour des exemples concrets de transformées, parcourir les exercices de ce chapitre. Vous pouvez aussi en créer de votre cru.

★ Exercice 49. (Lemme de Riemann-Lebesgue) (🗎)

1. On sait calculer cette limite aisément pour des fonctions en escalier ou des fonctions de classe C^1 (pourquoi ?). Se ramener à l'un des deux cas par densité. Attention à bien quantifier : c'est x qui tend vers l'infini, et non l'indice d'une suite qui convergerait uniformément vers f.
2. Approcher l'intervalle par un segment pour se ramener à la question précédente.

Commentaires. L'exercice illustre la difficile idée de l'approximation des intégrales. Ce qui est difficile est surtout *d'y penser* : sans la première question, se dit-on qu'on va essayer de se ramener à une situation analogue ?
C'est en essayant d'appliquer cette idée d'approximation partout (et en échouant) que vous saurez identifier sur le long terme ce qui la rend pertinente ou non.

★ Exercice 50. (Produit de convolution)

1. Montrer la convergence absolue en comparant $\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|\mathrm{d}t$ et $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\mathrm{d}t$. Pour la continuité : utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Si c'est f qui est continue, la variable x ne semble pas au bon endroit : pas grave, un changement de variable permet de régler ce problème.
2. La distributivité est triviale, et pour la commutativité un indice est donné ci-dessus.
3. Utiliser le théorème de classe C^k des intégrales à paramètres. C'est pour faciliter l'hypothèse de domination que l'hypothèse sur f est faite : pourquoi ? que vient-elle simplifier ? Réfléchir au domaine où l'on doit majorer $g^{(k)}$ pour vérifier cette hypothèse, ce qui coince, et ce qu'on fait classiquement pour résoudre cette contrariété.
4. Soit on écrit explicitement $g : t \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ et on injecte, soit on fait le lien avec la question précédente : caractériser les applications polynomiales au sein des applications de classe C^∞ à l'aide de leurs dérivées.

Commentaires. Retenir la morale de cet exercice : le produit de convolution sert à lisser les fonctions. En ayant cela en tête, vous saurez à quel dessein il est introduit dans un sujet et où on essaie de vous amener.
Néanmoins le panorama est incomplet si vous ne faites pas l'exercice 51 : parce que produire des fonctions lisses est une chose ; mais s'assurer qu'on reste « proche » de la fonction d'origine (lissée) en est une autre.
Les hypothèses sur f et g peuvent être très variées : les modifier au besoin, et voir si le produit de convolution est toujours défini, s'il est toujours de la classe de g, etc.
Pourquoi intègre-t-on sur $\mathbb{R}$? Faire le lien avec l'idée déjà formulée dans la *Présentation* du chapitre, selon laquelle l'intégration sert à moyenner et produire de l'invariance.

★ **Exercice 51. (Approximations de l'identité)** Majorer $|f * \chi_n(x) - f(x)|$ en écrivant cette différence comme une intégrale (l'une des hypothèses sur les χ_n le permet). Faire apparaître des « différences petites » $|f(x-t)-f(x)|$. Le fait que f soit dans E permet de les majorer finement quand $x-t$ et x sont distincts d'au plus η, où $\eta > 0$ est un réel dont vous expliquerez la provenance. Il y a donc une distinction de cas à faire selon que la variable d'intégration t vérifie $|t| \leqslant \eta$ ou non : utiliser la relation de Chasles pour procéder à la distinction de cas. Une des hypothèses sur les χ_n permet de majorer l'intégrale correspondant aux $|t| > \eta$.

> **Commentaires.** Bien noter où interviennent les trois hypothèses dans la résolution. Remarquer que la solution pour majorer une « différence petite » $|f(a_i) - f(x)|$, lorsque f n'a pas de meilleure régularité que la continuité, et lorsqu'il apparaît une infinité de réels d'appui a_i (ou bien un nombre fini devenant arbitrairement grand), est presque toujours la même. À comparer avec les exercices du chapitre préliminaire avec des énoncés de la forme « CVS + (H) implique CVU ».
> C'est cet exercice qui, couplé au précédent, permet d'approcher une fonction f par des fonctions vérifiant à peu près ce que l'on veut. Mais on remarque qu'on ne fait que se restreindre à des fonctions à support compact : comprendre alors pourquoi les théorèmes de densité sont en général sur des segments (même s'il y a une exception dans l'exercice 53 ; après l'avoir regardé, comprendre pourquoi cette exception est une fausse exception).

Exercice 52. (Théorème d'approximation de Weierstraß)

1. C'est du calcul sans mystère.
2. Voir les commentaires de la question 4 de l'exercice 50.
3. L'exercice précédent et les questions précédentes impliquent que toute fonction de E est limite uniforme de fonctions polynomiales (en vérité, il y a quelque chose encore à faire : on n'a traité que le cas des fonctions nulles en dehors de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$: vérifier que toute fonction de E s'y ramène par translation, et que cela n'affecte pas la convergence uniforme). L'objectif est de s'y ramener : noter qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se prolonge en une fonction de E.

> **Commentaires.** Cet exercice achève de vous convaincre de l'intérêt du produit de convolution.
> Lorsqu'on veut fabriquer une approximation de l'identité, j'affirme que l'un des points est trivial à obtenir. Comment obtenir les autres ? Quelles sont les idées intuitives qui mènent au choix de p_n ? (Rappelons qu'on veut que p_n soit polynomiale pour espérer que $f * p_n$ le soit aussi.)
> Pour montrer le résultat de la deuxième question, comprendre pourquoi l'exercice 50 ne s'applique pas directement.

Exercice 53. (Théorème de Fejér)

1. On sait calculer explicitement S_n puis C_n (sommes géométriques), ce qui permet de majorer explicitement C_n.
2. Par linéarité, il suffit de vérifier que $x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}\mathrm{d}t$ est un polynôme trigonométrique.
3. Majorer $|\tilde{C}_n(x) - f(x)|$. Remarquer que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C_n = 1$ en reprenant les calculs de la première question. Cela permet d'écrire la différence ci-avant comme une intégrale où il apparaît une « différence petite » $|f(x-t) - f(x)|$. Utiliser les hypothèses pour démontrer que f est uniformément continue. Scinder l'intégrale en deux, selon que $|t| \leqslant \eta$ ou $|t| > \eta$, où η est un module de continuité. Utiliser la convergence uniforme de $(C_n)_{n\geqslant 0}$ vers la fonction nulle pour majorer l'intégrale selon les $|t| \geqslant \eta$.

> **Commentaires.** Noter qu'on n'a pas *tout à fait* le même produit de convolution que celui défini dans l'exercice 50. Voyez-vous un lien entre les deux ?
> Dans la même veine : pourquoi ne pouvait-on pas appliquer directement le résultat de l'exercice 51 ? Analyser les hypothèses manquantes, et comment on les a remplacées malgré tout.
> Pourquoi, ici, on parvient à avoir la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, alors que ce n'était pas le cas dans l'exercice précédent ?
> Sauriez-vous déduire de cet exercice que si f est à valeurs *réelles*, alors f est plus précisément limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de combinaisons linéaires de cosinus et sinus ?

3.2 Classement des exercices par thèmes

Approximation (segments, densité...)	5, 46, 49
Formule du changement de variable	7, 11, 12, 13, 21, 35, 38, 39, 41, 43, 48, 50
Comparaison série-intégrale	7, 12, 18, 37
CVU d'une suite abstraite	25, 51, 52, 53
CVU d'une suite explicite	24, 53
« Différences petites »	18, 19, 23, 27, 51, 53
Étude asymptotique d'intégrale	3, 19, 21, 22, 23, 42, 43
Hypothèse sur $\int_I f$, conclusion sur f	15, 17
Intégrale à paramètre déguisée	34, 35
Intégrale à paramètre explicite	21, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 36, 38, 39, 42, 46, 48, 50
Intégrale calculée par récurrence	1, 3, 14, 40
Intégrale « trigonométrique »	1, 3, 12, 13, 21, 53
Intégration par parties	2, 3, 8, 9, 10, 14, 16, 17, 20, 28, 31, 32, 40, 42, 46
Lien suite-série	1, 45, 48
Limites d'intégrales	1, 2, 4, 21, 24, 25, 30, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 43, 49, 53
Quasi-démonstration du cours	16, 17, 18, 19, 20, 23, 46
Rôle du segment ou du compact	5, 49
Suites de Cauchy	15
Théorème de Heine	5, 18, 51, 53
Uniforme continuité	5, 15, 18, 51, 53

Table des matières