Chapitre I — Intégration

		
Johann Lejeune Dirichlet (1805–1859)	**Karl Weierstraß** (1815–1897)	**Bernhard Riemann** (1826–1866)

Comment lire ce livret

Il est constitué majoritairement d'un plan du chapitre. Les seuls exemples et propositions écrits intégralement sont les rappels de 1re année et les extensions sans mystères de résultats déjà connus.

Interprétation des différents symboles. Ils sont généralement dans la marge.

♡ : exemple soit instructif, soit très classique ; à comprendre, à connaître par cœur, et à savoir reconnaître : peut tomber à tout instant de l'année, y compris hors de ce chapitre ;

⚠ : mise en garde contre une erreur fréquente extrêmement fâcheuse et durement sanctionnée ;

$\searrow$: à mettre en rapport avec un résultat d'un chapitre antérieur (référencé après la flèche) ;

$\nearrow$: à mettre en rapport avec un résultat d'un chapitre ultérieur (référencé après la flèche) ;

$\rightarrow$: à mettre en rapport avec un résultat ultérieur du même chapitre ;

$\leftarrow$: à mettre en rapport avec un résultat antérieur du même chapitre ;

💡 : donne l'idée derrière une proposition ; peut aider la mémorisation ou compréhension ;

📄 : plus de détails dans un autre document, en général le *Méthodes* du chapitre ;

🔍 : contenu hors programme : si on veut l'utiliser dans un problème écrit ou à l'oral, il faut savoir le démontrer ;

📖 : extrait du programme officiel de Mathématiques en MP.

Révisions attendues

1. L'intégralité du cours de 1re année sur les relations de comparaison, les développements limités et équivalents asymptotiques, etc.
2. L'intégralité du cours de 1re année sur l'intégration et le calcul intégral.
3. Théorèmes de Taylor, inégalité des accroissements finis.
4. Convergence uniforme ou simple d'une suite de fonctions, norme infinie.

Vos révisions sont insuffisantes si vous ne parvenez pas à faire ces exercices :

Exercice 1. Déterminer un équivalent asymptotique simple de chaque fonction ci-dessous en $+\infty$.

$$f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2-1}, \qquad g : x \mapsto \frac{\ln(x^4+4)}{x+1}, \qquad h : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln\left(e^{2x}-1\right)} \frac{\ln(1+\ln(3x+1))}{\ln(\operatorname{ch}(3x))},$$
$$j : x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5} - \frac{4}{x^2}, \qquad k : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(\sin(x))} - \frac{1}{x}, \qquad \ell : x \mapsto (x+1)^{\frac{1}{x+1}} - x^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 2. Calculer les limites : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{\tan(x)-x}$, et : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\sin(x))^2}\right)$.

Exercice 3. Avec la formule de Taylor avec reste intégral, l'inégalité des accroissements finis, ou une inégalité de convexité, montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ e^x \geqslant 1+x, \quad \forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ |\arctan(x)| \leqslant |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leqslant |x|.$$
$$\forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x-1,$$

Exercice 4. Calculer $\displaystyle\int_1^e t^n \ln(t)\mathrm{d}t$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$), $\displaystyle\int_1^e t(\ln(t))^2\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 t^2 e^t\mathrm{d}t$, et $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$.

Exercice 5. Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de terme général :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]} \end{cases}, \quad f_n : \begin{cases} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & nx^n\sin(\pi x) \end{cases}, \quad f_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{2n}\ln(x)\mathbb{1}_{]0,1]} \end{cases}.$$

1 Intégration sur un intervalle quelconque

1.1 Définitions et propriétés de base

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont notées a et b, avec : $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, et : $a < b$.

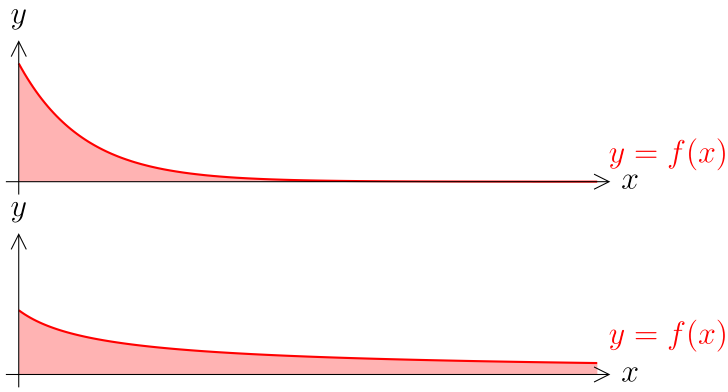
Définition 1 (Convergence d'une intégrale impropre)**.**

Remarque. Les intégrales $\int_I f$ et $\int_I (-f)$ sont de même nature.

Remarque. Cas $I = [a, b[$. Le réel a n'a pas d'importance dans la convergence de $\int_a^b f$.

Interprétation géométrique. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si l'aire sous la courbe de f est finie, même en allant jusqu'à l'infini.

FIGURE 1 – Intégrale convergente et intégrale divergente : interprétation graphique.



💡 C'est étonnant qu'une aire « étalée sur une longueur infinie » puisse être finie, et ce n'est moralement possible que si l'on ne rajoute que des miettes lorsqu'on regarde l'aire au voisinage de $+\infty$. C'est en particulier le cas si f décroît très vite : ce sont les relations de comparaison qui quantifieront ce que signifie concrètement « très vite ».

Définition-Proposition 2 (Intégrale de fonction positive)**.** ↗ II déf. 12

Proposition 3 (Extension des propriétés de base)**.**

Proposition 4 (Relation entre les natures de $\int_a^b f$ et $\sum_{n\geqslant 0} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f$)**.** → ex. 8

Proposition 5 (Caractérisation en termes de primitives)**.**

Exemple 1. Nature de $\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{\sin(t)} \mathrm{d}t$.

Exemple 2. Nature de $\int_0^1 \ln(t) \mathrm{d}t$. ♡

Proposition 6 (Cas d'un prolongement continu)**.**

Remarque. Intégrales $\int_a^b f$, $\int_{]a,b]} f$, $\int_{]a,b[} f$ et $\int_{[a,b[} f$.

Proposition 7 (Intégrales de référence)**.**

Remarque. Attention, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$ converge si et seulement si s est strictement INFÉRIEUR à 1.

Mise en garde 1.

Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ ne prouve jamais que $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge !

Montrer que $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = +\infty$ ne prouve jamais que $\int_0^{b} f(t)\mathrm{d}t$ diverge !

1.2 Comparaison des intégrales de fonctions positives

Lemme 8 (Comparaison des intégrales de fonctions positives).

Théorème 9 (Théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives).

Exemple 3. Si $\lim\limits_{+\infty} f = L \in \mathbb{R}_+^*$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Exercice 6. Montrer que si f est positive et strictement croissante, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Exercice 7. Montrer que si f tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en $+\infty$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Mise en garde 2. Il n'y a pas pour autant de notion de divergence grossière.

Méthode 1. Méthode « $t^\alpha f(t)$ ».

Exemple 4. Nature de l'intégrale de Gauß $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Exemple 5. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t(1-t)^3}}\mathrm{d}t$.

Définition 10 (Convergence absolue et fonction intégrable).

Remarque. Fonction continue sur un segment. Stabilité de l'intégrabilité par restriction.

Proposition 11 (La convergence absolue implique la convergence).

Exemple 6. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{zt^2}\mathrm{d}t$, $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 12 (Espace vectoriel $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{C})$ des fonctions intégrables).

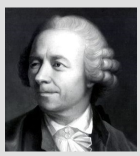
Remarque. On ne peut rien dire en général du produit de fonctions intégrables.

Proposition 13 (Espace vectoriel $\mathrm{L}^2(I,\mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrable).

1.3 Intégration par parties et changement de variable

Proposition 14 (Intégration par parties).

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des énoncés.

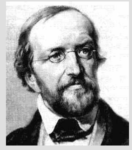


1707 – 1783

Exemple 7 (guidé). La fonction Γ d'Euler : $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

Obtenir la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ en notant la présence d'une exponentielle à décroissance rapide : quelle comparaison cela permet-il ? Obtenir la nature de $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ grâce à un équivalent simple et au théorème de comparaison. Conclure.

Équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$: noter que passer d'un membre de l'égalité à l'autre revient à abaisser l'exposant de t^s. Quelle opération naturelle le permettrait ?



1805 – 1859

♡

Exemple 8 (guidé). Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

Obtenir la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ en intégrant par parties : réfléchir à ce qu'on aimerait avoir au dénominateur pour faciliter l'étude de l'intégrabilité. Cela guide le choix de la fonction à dériver. Attention, si le choix de primitive est mauvais, vous aurez une discontinuité en zéro.

Pour la seconde intégrale : utiliser la relation de Chasles pour minorer $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ par une somme de la forme : $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{J_k} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$, où les J_k sont des intervalles disjoints où le sinus se minore facilement par une quantité strictement positive. Faire la minoration par ladite quantité, et reconnaître une somme de série divergente. Conclure.

Exercice 8. Étudier la nature de l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_-$.

Remarque. Contre-exemple au théorème de comparaison.

Proposition 15 (Changement de variable)**.**

On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.

Exemple 9. Nature de $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$. ← ex. 8

Remarque. On peut ramener toute étude d'intégrabilité au voisinage de 0 ou $+\infty$.

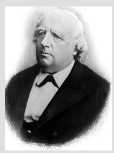
2 Étude asymptotique des intégrales

Théorème 16 (Intégration des relations de comparaison)**.** ← th. 9

Exemple 10. Équivalent quand $x \to +\infty$ de $\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

Exemple 11. Équivalent quand $n \to +\infty$ de $\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.

3 Approximations d'intégrales



1815-1897

Proposition 17 (Approximation par une intégrale sur un segment)**.**

Proposition 18 (Densité des fonctions en escalier)**.**

Théorème 19 (Théorème d'approximation de Weierstraß)**.** → ex. 13

4 Interversions de symboles

Dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

4.1 Passage à la limite sous le signe intégrale

Théorème 20 (Interversion limite-intégrale sur un segment).

Exemple 12. Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^\pi n\sin\left(\frac{x^2}{n}\right)\mathrm{d}x$.

Exemple 13 (guidé). Fonction continue sur un segment dont tous les moments sont nuls. ♡

Utiliser la linéarité pour montrer que $\displaystyle\int_a^b P(x)f(x)\mathrm{d}x = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, puis le théorème de Weierstraß pour en déduire : $\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x = 0$ (appliquer l'égalité précédente en des polynômes bien choisis, et passer à la limite). Soigneusement vérifier l'hypothèse de convergence uniforme. Conclure.


1875 – 1941

Remarque. Ce théorème est faux sur un intervalle non borné.

Théorème 21 (Théorème de convergence dominée).

Démonstration (idée). Sous l'hypothèse de convergence uniforme sur tout segment : introduire un segment J tel que : $\displaystyle\int_{I\setminus J}\varphi \leqslant \varepsilon$. Majorer $\left|\displaystyle\int_J (f_n - f)\right|$ grâce à l'hypothèse de convergence uniforme, et $\left|\displaystyle\int_{I\setminus J}(f_n - f)\right|$ grâce à l'hypothèse de domination.
L'intégrabilité de f_n ou f s'obtient grâce à $|f_n| \leqslant \varphi$ et au théorème de comparaison. □

Ce qui entraîne des anomalies, lorsqu'on passe à la limite dans une intégrale, est lorsqu'on considère des fonctions dont l'aire sous la courbe se concentre dans une zone de plus en plus resserrée (faisant apparaître un pic si l'on est sur un segment), jusqu'à se resserrer en un seul point quand $n \to +\infty$. Puisque la valeur en un point isolé n'est pas prise en compte dans un calcul d'intégrale, ce passage à la limite fait disparaître subitement la masse qui était concentrée en un pic. L'hypothèse de ces deux théorèmes d'interversion est là pour empêcher la création de ces concentrations de masse : soit avec la convergence uniforme, soit avec une domination empêchant les fonctions de devenir arbitrairement grandes.

Méthode 2. Démontrer l'hypothèse de domination : voir *Méthodes* (page 13). 5

Exemple 14. Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(t))^n\mathrm{d}x$.

Exemple 15. Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

4.2 Intégrales à paramètres

Théorème 22 (Théorème de convergence dominée à paramètre continu). ← th. 21

Démonstration (idée). Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite, pour se ramener au calcul d'une limite d'une suite d'intégrales. Utiliser le théorème de convergence dominée, et conclure. □

Corollaire 23 (Théorème de continuité sous le signe intégrale)**.**

Théorème 24 (Théorème de dérivation sous le signe intégrale)**.**

Remarque. La continuité, la dérivabilité sont des notions locales.

Méthode 3. Démontrer l'hypothèse de domination : voir *Méthodes* (page 21). 5.2

Exemple 16. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-xt}}{t} \mathrm{d}t$. ♡

Théorème 25 (Théorème de régularité C^k sous le signe intégrale)**.**

Exercice 9. Le démontrer par récurrence sur k.

Exemple 17. Calcul de $\int_0^1 t^x (\ln(t))^k \mathrm{d}t$ pour tout $(x, k) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$.

Remarque. Ce qu'il faut retenir des hypothèses.

— Fin du chapitre I —

Rappels sur les calculs dans $[0, +\infty]$

— addition : $\forall (x, y) \in [0, +\infty]^2$, $x + y = +\infty \Longleftrightarrow x = +\infty$ ou $y = +\infty$;
— multiplication : $\frac{1}{+\infty} = 0$, et : $\forall x \in]0, +\infty]$, $x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = +\infty$.

En général on ne peut pas donner de sens à $0 \times (+\infty)$ ou $(+\infty) \times 0$... sauf dans le cas très particulier des familles sommables de $[0, +\infty]$ et des intégrales impropres de fonctions positives. On *pose*, uniquement dans ce contexte :

$$0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0.$$

— pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $x < +\infty$, et : $+\infty \leqslant \infty$; en particulier :

$$\forall x \in [0, +\infty], \quad (x \geqslant +\infty \Longrightarrow x = +\infty) \ ;$$

— les inégalités restent compatibles avec l'addition et la multiplication dans $[0, +\infty]$;
— la propriété de borne supérieure dans $\mathbb{R}$ devient, dans $[0, +\infty]$: **toute** partie A de $[0, +\infty]$ admet une borne supérieure. En particulier :

$$\sup(A) = +\infty \Longleftrightarrow A \text{ non majorée, et : } \sup(\emptyset) = 0.$$

— si $A \subseteq B \subseteq [0, +\infty]$, alors : $\sup(A) \leqslant \sup(B)$;
— $\forall \lambda \in [0, +\infty]$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$;
— si $A, B \neq \emptyset$: $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Compléments et approfondissements

1. On appliquera les méthodes du chapitre au calcul des intégrales remarquables $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ (Gauß) et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ (Dirichlet). Un élève de MP⋆ se doit de connaître par cœur au moins une démonstration par intégrale... En comprenant la morale de la démonstration, afin de pouvoir l'appliquer en d'autres circonstances.

2. Parmi les fonctions non usuelles, la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ est la plus près d'en être une. On approfondira l'étude amorcée dans l'exemple 7.
3. Bien que ce soit contre-intuitif pour un étudiant découvrant le concept d'intégration : il est parfois plus simple d'étudier une fonction f en passant par une intégrale à paramètre $x \mapsto \int_I f(t)g(x,t)\mathrm{d}t$. Plusieurs raisons à cela : intégrer fait gagner en régularité, permet de moyenner et donc de créer de l'invariance par certaines opérations, et dans certains cas l'intégration permet de remplacer des opérations analytiques potentiellement pénibles (dérivation) par d'autres enfantines (multiplication).
   L'approche est rentable à condition que, ayant étudié $x \mapsto \int_I f(t)g(x,t)\mathrm{d}t$, on soit capable de « revenir en arrière » pour en déduire des résultats sur f. Une question d'injectivité se pose donc.
   Trois exemples phares sont : la transformation de Laplace, celle de Fourier, et le produit de convolution. Ce dernier est un outil de choix pour approcher une fonction f par une fonction $f * g$ héritant des propriétés de g (si g est de classe C^∞ alors $f * g$ aussi, même si f ne l'est pas ! de même si g est polynomiale, etc.). Nous en déduirons notamment le théorème d'approximation de Weierstraß (théorème 19).
4. La question de l'approximation en intégration (de l'intégrande, de l'intervalle d'intégration, ou de l'intégrale par une somme) est très subtile. Y exceller fait la différence entre les bons et les excellents candidats aux concours. Le document *Méthodes* en fait un état des lieux, mais rien ne vaut la pratique pour en avoir une compréhension fine. On illustrera les différentes formes d'approximation en exercices.

Table des matières

Table des figures