Du cours aux exercices (Aide à la révision du cours)

Chapitre I — Intégration

1 Intégration sur un intervalle quelconque

1.1 Définitions et propriétés de base

Motivation de cette partie

Nous définissons ce qu'est une intégrale sur un intervalle quelconque (intégrale *impropre*), là où les intégrales rencontrées jusqu'à présent étaient systématiquement sur des segments, et on donne les exemples de référence.

Définition 1 (Convergence d'une intégrale impropre)**.**

✓

- Bien noter que la définition ne concerne pas les applications sur un segment. Pourquoi ?
- Montrer qu'une fonction constante non nulle n'est jamais d'intégrale convergente sur $[a, +\infty[$. L'interpréter graphiquement en termes d'aires. Regarder ce que cela donne pour des fonctions dont vous savez calculer des primitives : $\int_a^{+\infty} \cos$, $\int_a^{+\infty} e^x \mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty} x^k \mathrm{d}x$, etc. À chaque fois, vous représenter graphiquement les aires correspondantes, pour forger votre intuition de ce qu'est une intégrale convergente ou non.
- Est-ce que le choix de c a une importance ? Peut-on remplacer « s'il existe $c \in]a, b[$ » par « pour tout $c \in]a, b[$ » ?

★

- Pourquoi la convergence d'une intégrale sur $]a, b[$ n'est pas définie à l'aide de limites ? Pour vous aiguiller dans votre réflexion : étudier la nature de $\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^0 x\mathrm{d}x$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x$. Comparer avec $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_{-a}^a x\mathrm{d}x$. Qu'en pensez-vous ? En déduire une subtilité dans la définition d'une intégrale convergente quand l'intervalle est $]-\infty, +\infty[$ (ou plus généralement de la forme $]a, b[$). Essayer de comprendre pourquoi la définition donnée est meilleure que, simplement, exiger la finitude de $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$ (indice : chercher des absurdités qui seraient facilement impliquées par certaines des propriétés de base de l'intégrale).
- Trouver une reformulation de la convergence sur $I =]a, b]$ de manière équivalente comme la convergence de l'intégrale d'une certaine fonction sur un intervalle semi-ouvert *à droite* ; cette correspondance assurerait que tout théorème démontré avec $I = [a, b[$ serait valable aussi avec $I =]a, b]$.

Remarque.

Remarque.

✓ Quel est l'intérêt de cette remarque ? Songez à celle analogue réalisée pour les séries, et à ce que vous en avez fait.

Interprétation géométrique.

✓

- Varier les exemples. Jouer sur le signe, pour voir si cette interprétation géométrique peut vous induire en erreur.
- Produire des démonstrations rigoureuses pour les exemples proposés.
- Et pour une intégrale sur $]0,1]$? Quelle est l'interprétation graphique ? Ne pas ignorer le cas où $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \pm\infty$.

Définition-Proposition 2 (Intégrale de fonction positive)**.**

✓

- Pour une fonction *négative*, que donne cet énoncé ?
- Donner un exemple de fonction réelle telle que $\lim\limits_{x\to b} \int_a^x f$ n'existe pas.
- Se convaincre de la pertinence de la convention $\int_\emptyset f = 0$. Pourquoi la rappelé-je ?
- Si vous voulez comprendre quoi que ce soit à la démonstration : 1° revoir la définition de borne supérieure et ce qu'elle implique, 2° revoir la démonstration du théorème de la convergence monotone, qui fait le lien entre limite et borne supérieure, et comprendre pourquoi cela reste valable pour les fonctions, 3° revoir la notion de suite minimisante ou maximisante. Revoir, aussi, les propriétés de la borne supérieure DANS $[0, +\infty]$ (ce n'est pas la même chose que dans $\mathbb{R}$ ni même dans $\overline{\mathbb{R}}$: attention !). Elles sont récapitulées à la fin du livret.

★

- Trouver un énoncé qui ne nécessite pas de distinction de cas sur I, et soit valable aussi pour $I =]a, b[$.
- Montrer que les égalités avec des bornes supérieures sont fausses si l'on n'a pas une fonction positive (on reste dans le cas de f réelle). Vous trouverez déjà des contre-exemples avec un SEGMENT I.
- Vérifier les conventions de calcul dans $[0, +\infty]$ (et en particulier, la démonstration de l'identité $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ permet de comprendre pourquoi la convention $0 \times (+\infty) = 0$ est pertinente).
- La partie la plus subtile de la démonstration est, à mon avis, la preuve que $\int_a^b f \leqslant \sup\limits_{J \in \mathscr{J}} \int_J f$. Comprendre pourquoi j'ai procédé ainsi (pour cela : essayez de démontrer la majoration sans vous aider du cours), et dans quelles configurations semblables on peut avoir la même idée.
- Dans la démonstration de (b), j'obtiens directement tout l'énoncé d'un seul coup pour $I = [a, b[$ (l'équivalence, et l'égalité ensembliste). Est-ce possible d'en faire autant pour $I =]a, b[$? Pourquoi ne l'ai-je pas fait ?
- Dans la démonstration de (c), observer où interviennent les deux hypothèses sur la suite $(J_n)_{n\geqslant 0}$.
- Montrer que (c) reste vrai si on rajoute l'une des deux hypothèses suivantes : 1° l'intégrale $\int_I f$ converge, 2° pour toute suite exhaustive de segments $(J_n)_{n\geqslant 0}$, la suite $\left(\int_{J_n} f\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers une même limite.

☢ Dans (c) : si la suite n'est plus croissante, j'affirme qu'une partie de l'énoncé reste valable : laquelle ?

Proposition 3 (Extension des propriétés de base)**.**

✓

- Est-ce que l'ensemble des fonctions d'intégrale divergente est un espace vectoriel ? La réponse est facile.
- Item (d) : si f n'est pas supposée positive, est-ce que la convergence de $\int_J f$ va de soi ?
- Item (e) : revoir si besoin pourquoi la continuité est essentielle.
- Items (d) et (e) : les démontrer sans utiliser la définition-proposition 2. Pourquoi l'ai-je privilégiée ?
- Linéarité dans le cas de fonctions positives : que peut-il se passer si on prend $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ quelconque ?

★ Y a-t-il un lien entre les natures de $\int_I f$, $\int_I \mathrm{Re}(f)$ et $\int_I \mathrm{Im}(f)$? Même question, si f est réelle, entre les natures de $\int_I f$, $\int_I \max(f,0)$ et $\int_I \max(-f,0)$. Y réfléchir éventuellement plus tard, après avoir vu des exemples explicites. L'intérêt de cette réflexion : si c'est vrai, alors nous avons un moyen de nous ramener à des fonctions positives systématiquement.

Proposition 4 (Relation entre les natures de $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f$)**.** → ex. 8

✓

- Dans la démonstration, vérifier *vraiment* que : $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [a, a_n] = [a, b[$.
- Proposer un énoncé analogue avec $I =]a, b]$.
- Vérifier par un contre-exemple que la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f$ ne suffit pas à avoir celle de l'intégrale.
- On utilise souvent cet énoncé avec $I = [a, +\infty[$. Sauriez-vous néanmoins fabriquer une telle suite avec $I = [a, b[$ et $b \neq +\infty$?

★

- Montrer qu'avec une hypothèse plus forte, on peut avoir la réciproque.
- Proposer un énoncé analogue avec $I =]a, b[$. Si vous séchez : y revenir après avoir vu les familles sommables.

Proposition 5 (Caractérisation en termes de primitives)**.**

✓

- Alléger l'énoncé quand $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$.
- Si f est seulement continue par morceaux, que donne cet énoncé ?
- Vérifier le cas positif. Le seul cas à traiter est évidemment celui d'une intégrale divergente.

Remarque.

✓ Généraliser, selon la forme de l'intervalle.

Exemple 1.

Exemple 2. ♡

✓
- Pourquoi passé-je par $-\ln$ plutôt que $\ln$? Est-ce si grave si ne le fais pas ? Pourquoi ?
- Pourquoi fais-je un calcul direct de $\int_0^1(-\ln)$, alors que dans l'exemple précédent je prends soin de passer par $\int_0^x \cos(t)e^{\sin(t)}\mathrm{d}t$ au lieu de calculer directement $\int_0^{+\infty}\cos(t)e^{\sin(t)}\mathrm{d}t$?
- Revoir si besoin le calcul de primitive du logarithme (elle n'est pas usuelle et il faut donc savoir la retrouver).

Proposition 6 (Cas d'un prolongement continu)**.**

✓
- Pourquoi l'énoncé est-il évident si f est continue au lieu d'être continue par morceaux ?
- J'affirme dans la démonstration qu'une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée. Pourquoi ? Et atteint-elle ses bornes ?

Remarque.

✓ Vérifier ce qu'affirme la remarque. Pourquoi n'utilisé-je pas cette remarque pour formuler tous les énoncés du cours dans le cas $I =]a, b[$?

Proposition 7 (Intégrales de référence)**.**

✓
- Commencer à dresser une analogie avec les séries. Vous pouvez même étendre cette analogie en comparant l'intégrale de l'exponentielle décroissante et la série géométrique (en effet $q^n = e^{n\ln(q)}$ est une exponentielle déguisée), mais ce n'est pas le plus important.
- Nature de $\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^s}$: et si $b = +\infty$?
- Reprendre ces intégrales en remplaçant α et s par des nombres complexes. Revoir si besoin comment se calcule la limite d'une fonction complexe.

★ Alléger l'énoncé avec des changements de variable adéquats. Par exemple : pourquoi la nature de $\int_0^{+\infty} e^{\pm t}\mathrm{d}t$ suffit-elle à avoir la nature de $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ pour tout α non nul ?

Remarque.

✓ Appliquer l'observation sur la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, à d'autres fonctions que celles de Riemann. En déduire, à peu de frais, de nouvelles natures connues d'intégrales.

☢ Démontrer ce que je n'affirme que de manière heuristique : si $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ est continue et strictement décroissante, avec $\lim\limits_0 f = +\infty$ et $f(1) = 1$, alors $\int_{]0,1]} f$ et $\int_{[1,+\infty[} f^{-1}$ sont de même nature. On pourra commencer par le cas où f est dérivable.

Mise en garde 1.

★ Se demander s'il y a tout de même des résultats partiels (du type : si une intégrale converge, alors l'intégrande a une limite aux extrémités). Vous pourrez éventuellement y revenir après le traitement de la section suivante.

Après votre révision de cette partie

Le plus important est de retenir : 1° la définition d'une intégrale convergente dans chaque cas (le cas où l'on intègre sur $[a, +\infty[$ est cependant le plus fréquent), 2° les exemples de référence, *surtout les exemples de fonctions de Riemann*, en notant bien la différence selon l'intervalle d'intégration, 3° ce qui change, aussi bien dans la théorie que dans les calculs pratiques, lorsqu'on intègre une fonction positive (ou du moins de signe constant).

1.2 Comparaison des intégrales de fonctions positives

Motivation de cette partie

Comme pour les séries, on étudie la nature de la plupart des intégrales grâce à un théorème de comparaison, qui se décline ici sous plusieurs formes selon la forme de l'intervalle d'intégration. On l'illustre par des exemples, et l'on définit la convergence absolue (qui sert à étudier le cas de fonctions non positives, mais qui, on le verra, a son importance dans les théorèmes d'interversion de symboles).

Lemme 8 (Comparaison des intégrales de fonctions positives)**.**

✓ Remarquer l'analogie avec les énoncés sur les séries à termes positifs, dans ce lemme et le théorème suivant. Comparer les schémas de démonstration, afin de se convaincre que plus généralement : quand on sait démontrer un résultat sur les séries, on sait *souvent* (pas toujours ! attention !) démontrer le même énoncé sur les intégrales, et réciproquement.

★ Dans le prolongement de la remarque ci-dessus : montrer qu'une somme de série EST un cas particulier d'intégrale impropre. En déduire que la théorie des intégrales impropres aurait pu être utilisée pour démontrer presque tous les résultats sur les séries (vérifier néanmoins qu'il n'y a pas de raisonnement circulaire, et attention aux subtilités venant du fait que la convergence de $\left(\int_a^n f\right)_{n\geqslant 0}$ n'équivaut pas à l'existence d'une limite quand $x \to +\infty$ pour $\int_a^x f$).

Théorème 9 (Théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives)**.**

✓
- Comprendre qualitativement, éventuellement avec des dessins à l'appui, pourquoi le cas $]a, b[$ ne peut être couvert par ce théorème. Comprendre alors comment utiliser ce théorème dans ce cas-là. Si l'on n'a pas d'idée : bien relire la définition d'une intégrale convergente sur $]a, b[$, puis les exemples plus bas.
- Remarquer que le lemme 8, au contraire, ne fait aucune hypothèse sur l'intervalle. Pourquoi cette différence ?
- L'hypothèse de signe a-t-elle besoin d'être sur les *deux* fonctions ? Et sur tout l'intervalle ?

★ Essayer de trouver des contre-exemples dans le cas où les fonctions ne sont pas de signe constant. Si vous n'y arrivez pas encore maintenant : y réfléchir plus tard, quand on aura vu des exemples plus variés et non positifs.

Exemple 3.

✓ Bien vérifier que si f tend vers 0, tout peut arriver.

Exercice 1.

Exercice 2.

Mise en garde 2.

✓
- Donner une expression analytique de f. En déduire un calcul analytique de $\int_n^{n+1} f$.
- Sur le même modèle, produire des exemples où la fonction est bornée mais sans limite en l'infini.

★
- Peut-on produire des contre-exemples avec des fonctions monotones ?
- Analyser ce qui permet d'avoir l'implication « $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Rightarrow \lim_{+\infty} u_n = 0$ » et qui ne s'adapte pas au cas des fonctions. En analysant ce qui permet cette implication : 1° *conjecturer* une hypothèse supplémentaire sur f pour que l'implication « $\int_a^{+\infty} f$ converge $\Rightarrow \lim_{+\infty} f = 0$ » soit vraie, 2° comprendre plus généralement quel type d'énoncé peut être vrai avec les séries et faux avec les intégrales.

☢ Si vous avez fait une conjecture ci-dessus : la démontrer.

Méthode 1.

✓	**Lecture conseillée.** *Méthodes*, sections 1 et 2. Ignorer provisoirement ce qui ne concerne pas les fonctions positives.

Exemple 4. ♡

✓

— Bien comprendre pourquoi je me suis placé sur $[1,+\infty[$ alors qu'il n'y a pas pourtant pas de problème de continuité sur $[0,1]$ (ni de positivité) pour $t \mapsto e^{-t^2}$. *C'est très important.* La raison n'est pas la même selon que je raisonne par comparaison ou par un calcul direct.

— Redémontrer la convergence de $\int\limits_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t$ (quand $a > 0$) avec la méthode « $t^\alpha f(t)$ ». Se convaincre que finalement, les intégrales de Riemann suffisent comme intégrales de référence.

— Généraliser, en considérant d'autres intégrales ayant un facteur exponentiel. En déduire une stratégie simple pour obtenir la convergence et qui doit devenir un RÉFLEXE. Est-ce qu'une exponentielle décroissante est *toujours* synonyme d'intégrale convergente ?

Exemple 5.

✓

— À la lumière de cet exemple et du précédent, bien comprendre la nécessité de préciser d'emblée *où* c'est continu, et pourquoi vous vous exposez à des erreurs si vous l'omettez.

— Comment fut trouvé l'exposant de t^α dans l'étude en 0, où l'on a utilisé la méthode « $t^\alpha f(t)$ » ? Ce n'est pas au hasard et il faut être méthodique. Voir *Méthodes* si besoin.

— Redémontrer la convergence de $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ avec la méthode « $t^\alpha f(t)$ ». Être prudent vu que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ ne converge pas à la même condition sur α que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

— Dans cet exemple et le précédent, essayer de voir si on aurait aussi pu remplacer la méthode utilisée par une méthode « $e^{-at}f(t)$ ». Comprendre pourquoi ceci aurait été une très mauvaise idée, et pourquoi les fonctions de Riemann sont des fonctions de référence suffisantes. Ne plus jamais recommencer.

★ Généraliser cet exemple : quelle est la nature de $\int_0^1 \frac{(\ln(t))^\alpha}{t^\beta(1-t)^\gamma}\mathrm{d}t$, selon les valeurs (réelles) de α, β et γ ?

Définition 10 (Convergence absolue et fonction intégrable)**.**

✓ Pourquoi, lorsqu'on étudie l'intégrabilité de $f : [a,b[\to \mathbb{C}$, seule l'intégrabilité au voisinage de b nous intéresse ? Quel lien entre cette intégrabilité et celle sur $[a,b[$?

★

— Est-ce que la propriété « être intégrable » se préserve par convergence simple ? Et uniforme ? On pouvait d'ailleurs se poser la même question avec « être d'intégrale convergente ».

— Est-ce que l'intégrabilité de $f : I \to \mathbb{R}$ implique celle des fonctions positives $\max(f,0)$ et $\max(-f,0)$? Et réciproquement ? Même question avec l'intégrabilité de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ pour f complexe.

Proposition 11 (La convergence absolue implique la convergence)**.**

✓

— Reprendre la démonstration de 1re année qu'une série absolument convergente est convergente. Vérifier si elle s'adapte au cas des intégrales, et se demander pourquoi j'ai choisi de procéder autrement.

— Adapter la démonstration au cas $I =]a,b]$, puis $I =]a,b[$. Il s'avère que contrairement à d'autres propositions où ce cas est pénible, ici c'est relativement direct : pourquoi ?

★

— À quoi « ressemble » une fonction d'intégrale convergente mais non intégrable ? Je parle d'interprétation géométrique. Se poser la question éventuellement plus tard, après avoir vu un exemple explicite.

— Adapter la démonstration pour avoir directement ceci : pour toute suite exhaustive de segments $(J_n)_{n\geqslant 0} = ([a_n,b_n])_{n\geqslant 0}$, la suite $\left(\int_{J_n} f\right)_{n\geqslant 0}$ converge et sa limite ne dépend pas de la suite $(J_n)_{n\geqslant 0}$: faire le lien avec l'item (c) la définition-proposition 2. En fait, dans les (très) anciens programmes, c'est ainsi qu'on définissait l'intégrale d'une fonction intégrable (comme la limite commune obtenue avec toute suite exhaustive de segments), tout en justifiant son existence (et on ne disait pas qu'elle était impropre). On définissait *ensuite* l'intégrale d'une fonction non intégrable en précisant qu'elle était impropre dans ce cas.

Exemple 6.

✓	Se convaincre qu'on comprend l'identité : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\lvert e^z\rvert = e^{\mathrm{Re}(z)}$. Elle reviendra souvent cette année.
☢	Et si $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$, que dire ? Ce n'est pas facile. Y revenir éventuellement plus tard, quand on aura traité des intégrales de fonctions complexes par d'autres moyens que la convergence absolue.

Proposition 12 (Espace vectoriel $\mathrm{L}^1(I, \mathbb{C})$ des fonctions intégrables)**.**

✓
- Se demander s'il en est de même pour les séries : si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont absolument convergentes, est-ce que $\sum_{n\geqslant 0}(u_n + \lambda v_n)$ aussi ? Imiter les démonstrations.
- Est-ce que l'ensemble des fonctions NON intégrables est un espace vectoriel ?

Remarque.

★
- Montrer qu'en ajoutant une hypothèse raisonnable sur f et g, il devient vrai que si f et g sont intégrables sur $[a, +\infty[$ alors leur produit aussi. Essayer ensuite de produire un contre-exemple sans cette hypothèse.
- Et pour les séries ? Est-ce que, si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergent absolument, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n v_n$ converge (absolument) ?
  Ce que je fais là, songez à le faire de vous-mêmes régulièrement. Les cas où la situation diffère sont d'ailleurs plus instructifs que les autres. Faire le lien avec les commentaires formulés dès le début de la section.

Proposition 13 (Espace vectoriel $\mathrm{L}^2(I, K)$ des fonctions de carré intégrable)**.**

✓
- Démontrer l'intégrabilité de fg par un autre moyen que celui du cours.
- Revoir une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la raison pour laquelle il suffit d'avoir une forme bilinéaire *positive* pour qu'elle soit vraie.
- Réviser ce qui est fortement suggéré par l'énoncé, à savoir que $(f, g) \mapsto \int_I fg$ est un produit scalaire (sur... ?).

★ Et si on enlève le module, est-ce que la convergence de $\int_I f^2$ et $\int_I g^2$ implique celle de $\int_I fg$?

Après votre révision de cette partie

1. Bien observer les différentes étapes dans l'étude d'une convergence d'intégrale : continuité, étude au voisinage d'un point problématique, prolongement par continuité quand c'est possible. Tirer au clair ce qu'on fait quand l'intervalle est ouvert (des deux côtés), et pourquoi on ne peut pas utiliser le théorème de comparaison directement. Faites-vous un modèle de rédaction si besoin.
2. Dresser tous les parallèles avec le cas des séries, et ce qui en diffère.
3. Essayer le premier *Savoir-faire à vérifier*.

1.3 Intégration par parties et changement de variable

Motivation de cette partie

Nous généralisons les deux formules connues de calcul intégral au cas des intégrales impropres. En plus de leur application classique au calcul, comme en 1re année, elles sont ici des moyens alternatifs de montrer la convergence de certaines intégrales problématiques (à l'instar du théorème spécial des séries alternées pour les séries), et c'est là la grande nouveauté de ces formules, sur laquelle s'attarder. Nous donnons ainsi un exemple de référence de fonction non intégrable mais d'intégrale convergente.

Proposition 14 (Intégration par parties)**.**

✓

- Proposition 14 : *uniquement en regardant l'égalité*, se demander ce qu'il est nécessaire de supposer sur $f'g$, fg' et $[fg]_a^b$, pour espérer que les trois quantités de la formule existent. Comparer avec les hypothèses, et en déduire qu'il est facilement possible de les retrouver.
- Bien remarquer les différences dans les hypothèses, avec le cas de l'intégration sur un segment.
- **Lecture conseillée**. *Méthodes*, section 4.3.

★

- Est-ce que cette formule est valable si f' et g sont positives *sans hypothèse de convergence* ?
- Est-ce que cette formule conserve la convergence *absolue* ? Un exemple plus loin vous éclairera sans doute.

Exemple 7 (guidé). ♡

✓

- Reprendre l'étude pour s complexe.
- Étude d'intégrabilité au voisinage de 0 : on a $e^{-t}t^{s-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-s}}$, et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-s}}$ diverge toujours d'après la mise en garde 1. Pourtant on n'en a pas déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t$ diverge toujours : comment expliquer cette bizarrerie apparente ? Si besoin, regarder du côté des hypothèses du théorème de comparaison.
- Utiliser cette fonction pour interpoler les coefficients binomiaux.
- Connaissez-vous d'autres fonctions vérifiant de telles équations fonctionnelles ? $f(s+1) = s+f(s)$ par exemple ?

★

Utiliser l'équation fonctionnelle pour en déduire un prolongement de Γ sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. En déduire qu'on peut donner un sens à la factorielle de presque n'importe quel nombre complexe. Comparer avec ce que vous donnent certains logiciels de calcul formel quand on leur demande de calculer $\pi!$, $(1+i)!$ ou $\left(-\frac{3}{2}\right)!$.

Exemple 8 (guidé). ♡

✓

- Essayer de comprendre pourquoi on montre la convergence de l'intégrale avec une intégration par parties, alors qu'on ne l'a pas fait pour tous les exemples précédents : pourquoi était-ce inutile avant, mais décisif ici ? Il est *crucial* de comprendre la motivation de cette technique, pour savoir l'invoquer dans la bonne circonstance.
- Bien comprendre le choix de primitive : pourquoi $t \mapsto 1-\cos(t)$ et non $t \mapsto -\cos(t)$? Qu'est-ce qui aurait posé problème sinon ? Et pourquoi l'ajout de 1 résout ce problème ? Cette constante est-elle choisie au hasard, à tâtons ? En déduire un cadre plus général où l'on intègre par parties en prenant $f-c$ au lieu de f comme primitive de f' (et avec c que vous expliciterez).
- Divergence de $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$: comment ai-je choisi les intervalles de la minoration ? Sont-ils vraiment importants ? Pouvais-je les prendre de longueur variable par exemple ?
- Comment ai-je choisi les intervalles $[k\pi,(k+1)\pi]$ de la relation de Chasles ? Pouvais-je prendre $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$?

★

- **Lecture d'approfondissement.** *Méthodes*, section 3, pour prendre plus de hauteur sur la technique employée. Essayer de redémontrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ après cette lecture. La méthode de cette lecture donne *deux* informations sur cette intégrale, outre sa convergence : lesquelles ? arriveriez-vous à les retrouver *via* la méthode de l'intégration par parties ?

☢

Peut-on donner une estimation de la « vitesse de convergence » de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ et de la « vitesse de divergence » de $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$? Ce que j'entends par là : donner un équivalent (ou un encadrement précis) de $\int_n^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ et $\int_0^n \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

Exercice 3.

★ Le faire. Ce n'est pas facile, bien qu'une analyse géométrique donne l'impression que c'est évident (oscillations de plus en plus grandes). Penser à l'une des mises en garde précédentes pour comprendre pourquoi un argument précis est attendu. Commencer par la convergence absolue, plus simple.

Remarque.

Proposition 15 (Changement de variable)**.**

✓

- Grâce à un changement de variable dans l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$, qui vous ramène à une intégrale de la forme $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, trouver une nouvelle preuve que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$ converge si et seulement si $s < 1$.
- Bien remarquer les différences dans les hypothèses, avec le cas de l'intégration sur un segment.
- Essayer de la démontrer. Comprendre d'où sort cette hypothèse de monotonie, alors que la formule de 1re année (pour les fonctions continues sur un segment) ne fait pas figurer cette hypothèse. En fait, on a besoin de la monotonie y compris sur un segment, si l'on intègre une fonction continue *par morceaux* : se demander ce qui peut poser problème (c'est une complication inutilement technique).
- Faire le changement de variable $u = ax$ dans une intégrale de la forme $\int_0^{+\infty} f(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$. Qu'en pensez-vous ? Et si $u = \frac{1}{x}$, sous quelle hypothèse supplémentaire sur f cela peut donner un résultat non trivial sur $\int_0^{+\infty} f(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$? Connaissez-vous des fonctions vérifiant ladite hypothèse ?

★

- En partant d'une intégrale convergente de la forme $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t$, produire une intégrale convergente de la forme $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(u^\beta)|}{u}\mathrm{d}u$. Ensuite, essayer d'appliquer la méthode de la section 3.1 de *Méthodes* à cette intégrale : la méthode échouera nécessairement, vu que c'est une intégrale convergente. Essayer de comprendre ce qui coince. À l'inverse, arriverez-vous à démontrer la convergence par comparaison à une série ?
- Est-ce que cette formule est valable si f est positive *sans hypothèse de convergence* ?
- Est-ce que la formule du changement de variable conserve la convergence *absolue* ?

Exemple 9. ← ex. 8

✓ Est-ce que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$ converge absolument ?

★ Est-ce que plus généralement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t^\alpha)\mathrm{d}t$ converge ? Et $\int_0^{+\infty} \sin(P(t))\mathrm{d}t$ avec P polynôme ?

Remarque.

✓

- Vérifier les détails qui ont été omis.
- Qu'est-ce que la formule du changement de variable implique pour les intégrales de fonctions paires ? impaires ? La question se pose plus généralement avec les fonctions vérifiant une relation du type $f(t) = f(b - t)$ pour tout t.

Après votre révision de cette partie

1. **Lecture obligatoire.** *Méthodes*, sections 1 et 2. Refaire soi-même cette synthèse (voire une fiche). « Inventer » un exemple type pour chaque situation de l'encart rouge.
2. Bien identifier quand on montre une convergence d'intégrale à l'aide d'une intégration par parties. Récapituler en deux ou trois points les étapes à suivre. L'exemple de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est à savoir traiter les yeux fermés.
3. Regarder les *Savoir-faire à vérifier*.
4. On remarque qu'aucun analogue du théorème spécial des séries alternées n'a été proposé. Sauriez-vous en proposer un ? Voyez-vous un théorème qui, malgré tout, remplit à peu près le même rôle ?

2 Étude asymptotique des intégrales

Motivation de cette partie

Nous donnons des techniques pour trouver des équivalents asymptotiques d'intégrales. Nous découvrons notamment que, sous certaines conditions, il est possible d'intégrer les relations de comparaison ! Chose étonnante en particulier dans le cas des équivalents où, vous le savez, il y a incompatibilité avec beaucoup d'opérations élémentaires.

Théorème 16 (Intégration des relations de comparaison). ← th. 9

✓

- Bien détecter, dans la démonstration, où la positivité intervient. Il y a au moins deux endroits.
- Les hypothèses sont sur la nature de $\int_a^b g$. Aurait-on pu avoir le même théorème en les faisant sur $\int_a^b f$?
- Compléter la démonstration en faisant le cas $b = +\infty$.
- Chercher des contre-exemples à l'équivalence (ou autre relation) des intégrales $\int_a^x f$ et $\int_a^x g$ lorsque les intégrales sur $[a, b[$ *convergent*. Il n'y a pas besoin de chercher très loin.

★

Trouver des contre-exemples dans le cas où g n'est pas de signe constant. Intuitivement : faire en sorte que les aires algébriques se compensent à cause de l'alternance du signe, de sorte que $\int_a^x g$ soit « petit » bien que g soit « gros ». Si vous vous débrouillez bien, vous pouvez même avoir : $\int_a^x g = \underset{x\to b}{o}\left(\int_a^x f\right)$, bien que : $f = \underset{x\to b}{o}(g)$. Vous en déduisez alors un contre-exemple également dans le cas $f \underset{b}{\sim} g$.

Exemple 10.

✓

- Créez une « banque de données » personnelle d'équivalents de référence. Pour cela, raisonnez à l'envers en partant d'abord d'une fonction connue mais « générique » (c'est-à-dire dépendant de paramètres a, b, c, etc., quelconques), puis en trouvant une intégrale non triviale qui lui est équivalente. C'est-à-dire : prenez des produits de vos fonctions de référence préférées (avec exponentiation). Trouvez un équivalent simple de leurs dérivées, et intégrez le résultat obtenu avec le théorème précédent. Si vous faites cela sérieusement, vous connaîtrez des ordres de grandeur de nombreuses intégrales ($\int_0^x t^a e^{t^b}\mathrm{d}t$, $\int_2^x t^a(\ln(t))^b\mathrm{d}t$, etc.), ce qui vous aidera en exercice lorsque vous aurez à calculer des limites du type : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$: vous aurez déjà une idée du comportement de l'intégrale. Le cas spécifique des intégrales avec un facteur exponentiel ou logarithmique est à méditer : on peut parfois prédire l'équivalent obtenu par une analyse qualitative.
- Comprendre comment j'ai pu trouver l'idée de soustraire $\frac{1}{(\ln(t))^2}$. Si vous avez bien fait le travail ci-dessus, cela vous paraîtra plus naturel à terme.
- Au vu de ce qu'on a fait dans cet exemple, et de ce que je raconte ci-dessus : se convaincre que la formule de l'intégration par parties a souvent la même efficacité que ce théorème d'intégration.

Exemple 11.

✓

- Si on veut seulement montrer que $\left(\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 (sans équivalent), que faire de plus simple ?
- Pourquoi est-ce $f(1)$ qui apparaît naturellement et pas, par exemple, $f(0)$? C'est important de le comprendre pour savoir dans quelle direction démarrer.
- Pourquoi penser à remplacer η par $\min(1, \eta)$? Deux raisons à cela ?
- Remplacer t^n par d'autres fonctions dépendant de t^n (exemples : $\mathrm{ch}(t^n)$, $\mathrm{sh}(t^n)$, $\arctan(t^n)$) et voir ce qu'on obtient. C'est là qu'on verra si vous avez compris l'heuristique de l'exemple.

★

En rajoutant de la régularité (f de classe C^∞ pour simplifier), affiner le développement asymptotique. On peut aller à un ordre arbitrairement élevé. Se souvenir de ce qui permet *concrètement* de mesurer l'écart entre f et $f(1)$. Idée extrêmement fréquente en analyse.

Après votre révision de cette partie

Lecture conseillée. *Méthodes*, section 6.2, qui fait un état des lieux des différents moyens d'avoir un équivalent ou développement asymptotique d'une intégrale.

3 Approximations d'intégrales

Motivation de cette partie

Nous donnons trois résultats dont l'intérêt est principalement théorique : l'approximation des intégrales quelconques par des intégrales sur des segments (afin de pouvoir utiliser des résultats uniquement valables sur les segments), et des théorèmes d'approximation. Dans un contexte d'intégration, ils permettent de se ramener à des fonctions plus simples à intégrer (localement constantes, polynomiales).

Proposition 17 (Approximation par une intégrale sur un segment)**.**

✓ Est-ce que ce résultat est vrai si on remplace « f intégrable » par « l'intégrale $\int_I f$ converge » ? Si oui, pourquoi me suis-je limité à cette hypothèse plus forte ? Si non, pourquoi ?

Proposition 18 (Densité des fonctions en escalier)**.**

✓
- Si vous avez vu ce résultat en 1re année : le revoir. C'est une belle application du théorème de Heine. Comprendre son interprétation géométrique.
- Y a-t-il unicité de la suite qui converge uniformément vers f ?
- Réfléchir à ce qui peut être l'intérêt de ce résultat : que peut-on dire des fonctions en escalier en intégration ?

★ S'inspirer de ce résultat pour démontrer d'autres résultats de densité, avec des fonctions à peine plus compliquées que les fonctions en escalier, mais avec f continue.

Théorème 19 (Théorème de Weierstraß)**.** → ex. 13

✓ Y a-t-il unicité de la suite qui converge uniformément vers f ?

★
- Que se passe-t-il sur $\mathbb{R}$? Existe-t-il des fonctions qui ne sont pas limite uniforme d'applications polynomiales ? (Des exercices du chapitre préliminaire en discutent.)
- Que se passe-t-il sur d'autres intervalles bornés ? Par exemple, si f est continue sur $]0,1]$ et limite uniforme de fonctions polynomiales, que peut-on en dire ? Réfléchissez aux propriétés préservées par convergence uniforme.
- Trouver une suite d'applications polynomiales explicite pour les fonctions usuelles (adaptez le segment pour vous simplifier la vie). Vous n'y arriverez peut-être pas pour toutes. Les développements limités peuvent vous aider à conjecturer des applications polynomiales qui conviendraient.

Après votre révision de cette partie

Lecture conseillée. *Méthodes*, section 9, pour avoir une idée du cadre d'utilisation de ces résultats. Le propos reste cependant très théorique et général, et il faudra regarder du côté des exercices pour des applications concrètes.

4 Interversions de symboles

4.1 Passage à la limite sous le signe intégrale

Motivation de cette partie

L'objectif est de voir si l'on peut passer à la limite « comme on pense » dans une intégrale. Nous fournirons toutes sortes d'exemples pour mettre en valeur sous quelles hypothèses c'est licite : l'idée est qu'il faut empêcher l'apparition de pics.

✓
- Contre-exemple : comment trouver l'expression explicite de f_n pour tout n ? (En particulier les pentes.) Pourquoi avoir mis l'expression sous la forme $y = a(x - x_0) + b$ au lieu de $y = ax + b$ pour faciliter son obtention ? Comprendre comment on « pouvait penser » à cet exemple, en « faisant disparaître subitement la masse ».
- Vérifier que la suite de fonctions ainsi définie ne converge pas uniformément vers la fonction nulle.

Théorème 20 (Interversion limite-intégrale sur un segment).

✓
- Chercher pourquoi la démonstration nécessite d'être sur un segment.
- Peut-on retrouver la limite de l'intégrale de l'exemple 11 avec ce théorème ? Et l'équivalent ?

★ Réciproquement, si $(F_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout segment de I vers F, est-ce que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers f ? Méditer sur des exemples antérieurs.

Exemple 12.

✓ Obtenir le calcul ou une majoration de $\|f_n - f\|_\infty$ autrement. Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment ? Sur $\mathbb{R}$? Se représenter visuellement ces fonctions pour comprendre pourquoi « la convergence uniforme (ou non) se voit ».

★ Essayer d'obtenir cette limite *à l'ancienne*, sans ce théorème d'interversion.

Exemple 13. ♡

✓
- Et si f est continue par morceaux ? Peut-on obtenir le même résultat, quitte à se placer sur une bonne subdivision permettant d'utiliser le théorème de Weierstraß ?
- Pour l'interprétation géométrique : faire des révisions de 1re année si besoin, pour en prendre toute la mesure. Y consulter d'autres contre-exemples à l'égalité $E = F \oplus F^\perp$.

★ On démontre dans cet exemple que si $(P_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors $(P_n f)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f^2. Peut-on le généraliser ? Si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers f, est-ce que $(f_n g)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers fg ?

☢ Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, on a : $\mathbb{R}_n[X]^\perp \neq \{0\}$. Êtes-vous capable d'en expliciter des fonctions ?

Remarque.

✓
- Pourquoi, ici, n'ai-je pas déterminé la limite simple *avant* de montrer la convergence uniforme ?
- J'avais expliqué en début de section que c'est l'apparition de « pics » qui produit les contre-exemples. Et pourtant il n'y en a pas ici. Comprendre pourquoi, malgré tout, ce contre-exemple est de même nature.

★ Et si l'on remplace le segment par un intervalle borné, dans le théorème 20 : a-t-on toujours un contre-exemple ?

Théorème 21 (Théorème de convergence dominée).

✓
- **Lecture obligatoire.** *Méthodes*, section 5 (plus spécifiquement la section 5.1) : pour trouver la fonction de domination. Analyser les exemples qui suivent à la lumière de cette lecture.
- Observer que hormis l'hypothèse du domination, on peut retrouver les hypothèses à partir de ce qu'on veut démontrer (pourquoi la continuité par morceaux, et non la continuité ou classe C^1 ?).
- Refaire vos exercices de calcul de limites de suites d'intégrales dans vos feuilles d'exercices de 1re année. Apprécier la plus-value du théorème.
- Réfléchir à ses avantages sur le théorème 20 (il y en a au moins deux). Si vous n'êtes pas inspirés : y revenir plus tard, après quelques exemples (notamment : se convaincre que le théorème 20 NE peut PAS s'appliquer aux exemples 14 et 15). Vous pouvez aussi comparer la difficulté dans la vérification des hypothèses, pour l'exemple 12, selon le théorème utilisé.
- Remarquer que ce théorème ne peut pas s'appliquer lorsqu'on essaie de montrer que la limite est *infinie*. Pourquoi ? Que peut-on faire en ce cas ?

★ Peut-on retrouver la limite de l'intégrale de l'exemple 11 avec ce théorème ? Et l'équivalent ?

☢
— Chercher une suite d'intégrales où le théorème 20 s'applique mais PAS le théorème de convergence dominée.
— En utilisant le fait que les séries soient des cas particuliers d'intégrales impropres, peut-on traduire cet énoncé comme un énoncé sur les séries ?

Méthode 2. 5

✓ **Lecture obligatoire.** *Méthodes*, section 5. Ne pas négliger l'importance de cette lecture : il y aura de l'hypothèse de domination et de la majoration uniforme à toutes les sauces cette année.

Exemple 14.

✓ Comparer avec le calcul de cette limite qui a probablement été fait en 1re année (et si ce n'est pas le cas : essayer de l'obtenir sans théorème d'interversion). Apprécier la valeur ajoutée.

☢ Arrive-t-on à retrouver l'équivalent $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ avec ce théorème ?

Exemple 15. ♡

✓
— Concentrer ses efforts sur l'obtention de φ. Comprendre pourquoi on a dû changer de majoration selon l'intervalle, pourquoi il fallut $n \geqslant 2$, pourquoi la majoration proposée est MÉTHODIQUE et ne nécessite aucun flair. À mettre en parallèle avec la lecture de *Méthodes* exigée.
— Est-ce que l'intégrande converge sur $\mathbb{R}_+$? Sur tout segment de $\mathbb{R}_+$?

Après votre révision de cette partie

1. **Lecture conseillée.** *Méthodes* du chapitre *Suites et séries de fonctions*, section 5.1 : pour apprendre à retrouver les hypothèses. Sauter ce qui concerne des séries. S'exercer quotidiennement jusqu'à ne plus se tromper.
2. **Lecture conseillée.** *Méthodes* du chapitre *Suites et séries de fonctions*, section 5.4. Pour les passages à la limite dans les intégrales.
3. **Lecture obligatoire.** *Méthodes*, section 5 (surtout la section 5.1) : pour trouver la fonction de domination.

4.2 Intégrales à paramètres

Motivation de cette partie

Grâce au théorème de convergence dominée, et en passant du discret au continu grâce à la caractérisation séquentielle de la limite, nous donnons quatre théorèmes sur les intégrales dépendant d'une variable. En particulier, le fait de pouvoir les dériver nous donnera une technique inédite pour calculer des intégrales (en nous ramenant à des intégrales plus simples), là où celles de 1re année échouent.

✓ Puisque cette section fait manipuler des intégrales où apparaissent deux variables (variable d'intégration, et paramètre), si vous craignez de n'être pas au clair là-dessus : fabriquez des exemples d'intégrales simples avec deux variables, mais que vous *savez* calculer (exemples : $\int_0^1 x^t \mathrm{d}x$, $\int_0^1 x^t \mathrm{d}t$, $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+t^2}$, $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{x+t^2}$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}x$, etc.), puis : 1° AVANT de les calculer, demandez-vous de quelle variable elle dépend, et de laquelle elle ne dépend pas ; 2° en déduire par rapport à quelle variable il y aurait du sens de regarder la continuité ou dérivabilité de l'intégrale ; 3° faites le calcul de l'intégrale pour voir si vous vous êtes emmêlé les pinceaux (avec une deuxième vérification à la calculatrice si vous doutez de vous).

Théorème 22 (Théorème de convergence dominée à paramètre continu). ← th. 21

✓

- Comparer cet énoncé avec celui du théorème de convergence dominée. Se convaincre que, *en dehors du vocabulaire*, les hypothèses et conclusions sont les mêmes.
- Observer que hormis l'hypothèse du domination, on peut retrouver les hypothèses et conclusions à partir de ce qu'on veut démontrer (pour que l'interversion ait un sens).
- Remarquer que ce théorème ne peut pas s'appliquer lorsqu'on essaie de montrer que la limite est *infinie*. Pourquoi ? Que peut-on faire en ce cas ?

★ De la même manière qu'on a utilisé la caractérisation séquentielle de la limite pour transformer le théorème de convergence dominée pour des suites en un théorème de convergence dominée pour des fonctions : pourriez-vous faire de même avec le théorème 20, pour avoir un théorème portant sur une famille de fonctions $(f_x)_{x\in I}$ ou une fonction f de deux variables ? Vous aurez notamment à définir la « convergence uniforme en $a \in I$ ». L'énoncé obtenu est-il intéressant ? (Vous pouvez en faire de même avec *tout* théorème passé et à venir sur les suites de fonctions.)

Corollaire 23 (Théorème de continuité sous le signe intégrale).

✓

- **Lecture conseillée** : *Méthodes*, section 5.6. Pour comprendre à quoi servira ce théorème.
- Observer que hormis l'hypothèse du domination, on peut retrouver les hypothèses à partir de ce qu'on veut démontrer (pourquoi la continuité par morceaux, et non la continuité ou classe C^1 ? pourquoi doit-elle être vraie selon t, et non x ? et pour ℓ aussi ?). Observer que ce sont *exactement* les mêmes hypothèses que dans le théorème de convergence dominée, à condition de reformuler l'hypothèse de convergence simple (en réécrivant sa définition). Se servir de cette observation pour retenir plus facilement ce théorème.

★ Trouver un contre-exemple à ce théorème quand on enlève l'hypothèse de domination. Prenez une intégrale à paramètre que vous savez calculer simplement. Si vous avez compris les contre-exemples aux théorèmes d'interversion des suites de fonctions, vous n'aurez pas de mal à en trouver un analogue ici.

☢ Montrer que si f est continue sur $[a,b]\times[c,d]$ (segments), alors la continuité de $x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est automatique. Plus tard (chapitre VI), un théorème rendra ce résultat trivial.

Théorème 24 (Théorème de dérivation sous le signe intégrale).

✓

- Si vous avez peur de vous y perdre avec le rôle des variables x et t, faites comme dans la suggestion de début de section. Avec une autre étape entre 2° et 3° : dérivez sous le signe intégrale (sans vérifier les hypothèses du théorème), et calculez explicitement l'intégrale obtenue. Puis, après l'étape 3°, dérivez le résultat obtenu, et vérifiez que vous obtenez bien la même chose que précédemment.
- S'interroger sur le sens de chaque hypothèse (pourquoi la continuité par morceaux est selon une variable, et pas l'autre ? à quoi sert la classe C^1 ?). Se convaincre qu'il serait bizarre de demander que φ soit continue par morceaux et intégrable sur I au lieu de J. Changer le nom des variables de f ($(u,v)\mapsto f(u,v)$ par exemple), ou les échanger, et voir si on parvient à adapter l'énoncé.
- Démonstration du théorème : être prudent sur les variables (on prend la limite quand $h\to 0$), et sur l'*intervalle* auquel appartient h : comment le définir ?

★

- Trouver un contre-exemple quand on enlève l'hypothèse de domination. Même commentaire que plus haut.
- S'inspirer des démonstrations des théorèmes 23 et 24 pour redémontrer le théorème fondamental de l'analyse, c'est-à-dire : montrer que si $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, alors $F'(x)=f(x)$ (en montrant que $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x)$). Pour y parvenir, vous aurez d'abord besoin d'un changement de variable qui transforme le taux d'accroissement en intégrale à paramètre. On essaiera d'éviter un raisonnement circulaire.

Remarque.

★

- Quelle hypothèse gagne vraiment à se ramener à des segments ? Pourquoi ?
- Relire comment on avait montré que la convergence uniforme sur tout segment suffit dans le cas des suites de fonctions continues. S'en inspirer pour démontrer, ici encore, que la continuité et la dérivabilité peuvent s'obtenir en vérifiant les hypothèses sur tout segment. Si l'on peut fournir un énoncé général, valable pour tout théorème passé et à venir, c'est encore mieux.

Méthode 3. 5.2

✓	**Lecture obligatoire.** *Méthodes*, section 5.2. *C'est très important.* Noter qu'il y a ici quelque chose de sympathique qu'on peut faire, et qui était impossible avec le théorème de convergence dominée.

Exemple 16. ♡

✓	Le reprendre sans se ramener à des segments. Comprendre ce qui coince, et pourquoi il fallait y songer.
☢	Calculer cette intégrale sans passer par les théorèmes de la section. Indication : noter que *si l'on pouvait* scinder l'intégrale en deux, un changement de variable permettrait d'avoir une différence de deux intégrales égales, et on aurait 0. On soigne ce raisonnement en tenant compte du fait qu'on ne puisse pas faire cette scission (pourquoi ?). En déduire un résultat général, plus satisfaisant parce qu'il nécessite des hypothèses minimalistes.

Théorème 25 (Théorème de régularité C^k sous le signe intégrale)**.**

✓	— Et si l'on veut la classe C^∞ d'une intégrale à paramètre, que fait-on ? — Comme dans l'énoncé précédent, on s'interrogera sur le sens des hypothèses, et notamment pourquoi l'hypothèse d'intégrabilité n'est pas la même selon l'ordre de la dérivation.
☢	Essayer de le démontrer pour comprendre où est la très grande difficulté.

Exemple 17. ← ex. 7

✓	— Faire les récurrences que j'ai omises. — S'inspirer de cet exemple pour produire d'autres familles d'intégrales calculées par dérivations successives. Songez à des intégrales que vous savez calculer trivialement et qui dépendent d'une variable x. Les intégrales de référence peuvent vous fournir des exemples si vous manquez d'inspiration. J'affirme que vous pouvez calculer énormément d'intégrales de la forme $\int_I t^k f(t)\mathrm{d}t$ avec f usuelle (introduire une variable x quelque part). — Remarquez que dans la marge du livret, je renvoie à l'exemple 7. Pourquoi ? Quel rapport entre ces intégrales ?
★	Étendre à $x \in]-1, +\infty[$ le calcul effectué. Cela change l'hypothèse de domination et introduit une subtilité.

Remarque.

✓	Voir *Méthodes* du chapitre *Suites et séries de fonctions*, section 5.1, pour plus de détails sur la philosophie des théorèmes d'interversion.

Après votre révision de cette partie

1. **Lecture conseillée.** *Méthodes* du chapitre *Suites et séries de fonctions*, section 5.1 : pour apprendre à retrouver les hypothèses. Sauter ce qui concerne des séries. S'exercer quotidiennement jusqu'à ne plus se tromper.
2. **Lecture conseillée.** *Méthodes* du chapitre *Suites et séries de fonctions*, section 5.4. Pour les passages à la limite dans les intégrales.
3. **Lecture obligatoire.** *Méthodes*, section 5 (surtout la section 5.2) : pour trouver la fonction de domination.
4. Refaire et analyser les exemples du cours et les *Savoir-faire à vérifier* à l'aune de ces conseils.

Table des matières

1 Intégration sur un intervalle quelconque **1**
1.1 Définitions et propriétés de base 1
1.2 Comparaison des intégrales de fonctions positives 4
1.3 Intégration par parties et changement de variable 6

2 Étude asymptotique des intégrales **9**

3 Approximations d'intégrales **10**

4 Interversions de symboles **10**
4.1 Passage à la limite sous le signe intégrale 10
4.2 Intégrales à paramètres 12