Chapitre XII — Espaces préhilbertiens et euclidiens

Charles Hermite
(1822–1901)

David Hilbert
(1862–1943)

Frigyes Riesz
(1880–1956)

Révisions attendues

1. Espaces préhilbertiens et euclidiens de 1re année : revoir les produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Refaire quelques manipulations avec les normes euclidiennes (développer le carré de la norme d'une somme, différence, etc., de vecteurs ; redémontrer le théorème de Pythagore, l'identité du parallélogramme). Revoir la notion d'orthogonalité, en particulier dans des exemples hors de $\mathbb{R}^n$. Pratiquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur quelques exemples.
2. Algèbre linéaire de 1re année. Revoir ce qu'est un projecteur et une symétrie. Savoir retrouver leurs propriétés de base sur la base d'un dessin, refaire quelques exercices où l'on voit comment utiliser la caractérisation de l'image et du noyau d'un projecteur (l'image étant l'ensemble de ses points fixes). Refaire du calcul explicite de projections.
3. Matrices symétriques et antisymétriques, revoir leurs propriétés de base et quelques exercices les manipulant.
4. Réduction des endomorphismes : utilisation des sous-espaces stables. Revoir les exercices où on obtenait des matrices réduites (hors diagonalisation et trigonalisation) à partir de de noyaux ou images supplémentaires.

Vos révisions sont insuffisantes si vous ne parvenez pas à faire ces exercices :

Exercice 1. Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soient $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ trois vecteurs de E. Montrer : $\|\vec{x}-\vec{z}\|^2 \leqslant 2\left(\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{y}-\vec{z}\|^2\right)$.

Exercice 2. Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soient $\vec{x}$, $\vec{y}$ deux vecteurs de E. Montrer : $2 + \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leqslant 2\left(1+\|\vec{x}\|^2\right)\left(1+\|\vec{y}\|^2\right)$.

Exercice 3. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et f un endomorphisme de E tel que : $f^3 = \mathrm{Id}_E$, et : $f \neq \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer qu'on a : $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$.
2. Montrer qu'il existe $\vec{x} \in E$ tel que $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ soit une base de $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
3. En déduire qu'il existe une base dans laquelle f admet pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Montrer que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, et expliciter la projection de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.

1. Soit s une symétrie de E, par rapport à F et parallèlement à G. On suppose E de dimension finie. Montrer : $\mathrm{tr}(s) = \dim(F) - \dim(G)$. En déduire une expression de $\dim(F)$ et $\dim(G)$ en fonction de $\dim(E)$ et $\mathrm{tr}(s)$.
2. Application. Montrer que l'application $f : A \mapsto A^\top$, définie sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, est une symétrie, et donner ses caractéristiques géométriques. En calculant sa trace dans une base naturelle de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, retrouver les dimensions de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$.

1 Formes bilinéaires et hermitiennes : rappels et approfondissements

Notations. Dans toute cette section et la suivante, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un K-espace vectoriel de dimension non nulle. Lorsqu'on écrit $\mathrm{M}_n(K)$ ou $\mathrm{M}_{n,1}(K)$, l'entier naturel n est toujours non nul.

Dans ce cours, toutes les propositions formulées dans des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sont hors programme, *mais deviennent au programme* lorsqu'on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$, à l'exception de celles avec le symbole 🔍 dans la marge.
En traduisant les énoncés dans des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, songez à simplifier toutes les conjugaisons complexes et tous les modules au carré !

1.1 Définitions et exemples

Définition 1 (Forme hermitienne, produit scalaire hermitien).

Notations. On note plutôt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou $(\cdot \mid \cdot)$ les produits scalaires hermitiens.

Remarque. Lien entre produits scalaires hermitiens et euclidiens.

Exemple 1. Exemples usuels. ♡

Remarque. Transconjugaison d'une matrice.

Exemple 2. Produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{C}$.

Exemple 3. Relation $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{X}^\top AY$. Unicité de la matrice représentative d'une forme hermitienne. ♡

Définition-Proposition 2 (Matrice associée à une forme hermitienne, matrices positives, définies positives).

Exemple 4. Matrices de la forme $\overline{A}^\top A$.

Remarque. Toutes les formes hermitiennes ont la même forme.

1.2 Norme euclidienne, orthogonalité, bases orthonormées

On suppose $K = \mathbb{C}$ dans cette section, sauf mention explicite du contraire.

Définition 3 (Forme quadratique associée, norme hermitienne). 🔍

Proposition 4 (Identités du parallélogramme et de polarisation). 🔍

Exemple 5. Identité remarquable : $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(\overline{z}z') + |z'|^2$.

Corollaire 5 (Unicité de la forme hermitienne associée à une forme quadratique). 🔍

Exemple 6. Application à la forme quadratique associée à $(X, Y) \mapsto \overline{X}^\top AY$. ♡

Proposition 6 (Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski). 🔍

Définition 7 (Vecteurs φ-orthogonaux). 🔍

Remarque. Égalité : $A^{\perp_\varphi} = \mathrm{Vect}(A)^{\perp_\varphi}$.

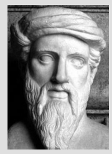
Définition 8 (Famille orthogonale, orthonormale)**.**

Exemple 7. La famille $\left(e_k : x \mapsto e^{ikx}\right)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Proposition 9 (Famille libre de vecteurs orthogonaux)**.**

Théorème 10 (Théorème de Pythagore)**.**

Exemple 8. Interprétation du théorème de Pythagore en probabilités.



~ -580 - ~ -495

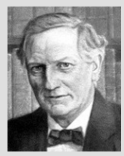
Remarque. La réciproque du théorème de Pythagore est fausse pour $K = \mathbb{C}$.

Théorème 11 (Coordonnées dans une base orthonormée)**.**

Remarque. Sens géométrique CONCRET des produits scalaires par des vecteurs unitaires.

Remarque. Ce théorème motive l'étude de $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle$.

Exemple 9. Matrices de Gram.



1850-1916

Théorème 12 (Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien, $\| \cdot \|$ la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une famille de E. On construit par récurrence une famille ainsi :*

— *si $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$, on pose : $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = \dfrac{1}{\|\vec{e}_1\|}\vec{e}_1$ (et sinon l'algorithme s'arrête) ;*

— *si $k \in [\![2, n]\!]$, on pose : $\vec{u}_k = \vec{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{e}_k, \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i$; si $\vec{u}_k = \vec{0}$ alors l'algorithme s'arrête et sinon : $\vec{v}_k = \dfrac{1}{\|\vec{u}_k\|}\vec{u}_k$.*

Alors :

— *soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est liée, auquel cas l'algorithme s'arrête au plus petit naturel $k \in [\![1, n]\!]$ tel que la famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$ soit liée, et la famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k-1})$ est orthonormée ;*

— *soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est libre, auquel cas $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ est une famille orthonormée de E ; c'est l'unique famille orthonormée telle que :*

  — *pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on ait $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$;*

  — *pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on ait $\langle \vec{v}_k, \vec{e}_k \rangle > 0$.*

Théorème 13 (Sous-espaces supplémentaires, projection orthogonale)**.**

Remarque. L'hypothèse de dimension finie est essentielle.

Exemple 10. Projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de fonctions trigonométriques.

Proposition 14 (Inégalité de Bessel)**.**

Exemple 11. Démonstration du lemme de Riemann-Lebesgue par l'inégalité de Bessel.

2 Endomorphismes adjoints

2.1 Définition et propriétés de base

Notations. Dans l'intégralité de cette section et jusqu'à la fin du chapitre, sauf mention explicite du contraire, $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace euclidien. Il est en particulier de dimension finie sur $\mathbb{R}$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Théorème 15 (Théorème de représentation de Riesz)**.**

Remarque. Le théorème reste valable avec des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Remarque. Le théorème de représentation de Riesz est faux en dimension infinie.

Remarque. On peut expliciter l'isomorphisme réciproque si l'on a une base orthonormée.

Définition 16 (Endomorphisme adjoint)**.**

Proposition 17 (Propriétés de base de l'adjonction)**.**

Proposition 18 (Lien entre endomorphisme adjoint et matrice transposée)**.**

Proposition 19 (Noyau et image d'un adjoint, stabilité de l'orthogonal)**.**

Remarque. On retrouve le fait qu'une matrice A et sa transposée aient le même rang.

2.2 Endomorphismes remarquables

2.2.1 Endomorphismes symétriques et antisymétriques

Définition 20 (Endomorphisme symétrique (ou autoadjoint), cas antisymétrique)**.**

Définition 21 (Symétrie orthogonale, réflexion)**.**

Proposition 22 (Endomorphismes symétriques remarquables)**.**

Exemple 12. Matrice d'une projection orthogonale sur un plan de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 23 (Noyau et image d'un endomorphisme autoadjoint, stabilité de l'orthogonal)**.**

Proposition 24 (Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif)**.**

Exemple 13. Un projecteur orthogonal p est positif.

2.2.2 Isométries

Définition 25 (Isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal))**.**

Remarque. Démonstration matricielle de la troisième caractérisation.

Proposition 26 (Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle)**.**

Mise en garde 1. Cas des projecteurs orthogonaux.

Proposition 27 (Caractérisation matricielle des isométries, image d'une base orthonormée)**.**

Définition 28 (Matrice orthogonale, groupe orthogonal)**.**

Exemple 14. Matrices de permutation. ♡

Remarque. L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $M_n(\mathbb{R})$.

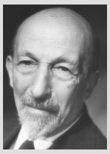
Proposition 29 (Déterminant d'une matrice orthogonale)**.**

Proposition 30 (Matrice de passage entre deux bases orthonormées)**.**

Corollaire 31 (Traduction matricielle de l'algorithme de Gram-Schmidt)**.**

Remarque. Généralisation possible au cas non inversible.

Exemple 15. Inégalité d'Hadamard. ♡



1865-1963

3 Réduction des endomorphismes remarquables

Lemme 32 (Existence d'une droite ou d'un plan stable).

3.1 Réduction des endomorphismes symétriques et antisymétriques

Théorème 33 (Théorème spectral).

Remarque. C'est faux si M est symétrique et à coefficients complexes.

Remarque. Ce théorème caractérise les matrices symétriques réelles.

Corollaire 34 (Caractérisation spectrale des matrices positives, définies positives).

Corollaire 35 (Racine carrée d'une matrice symétrique positive).

Exemple 16. Inégalité : $\forall (A, B) \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, $\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B)$.

Théorème 36 (Réduction des endomorphismes antiautoadjoints).

Remarque. Rang d'un endomorphisme antisymétrique.

Remarque. Caractérisation des endomorphismes antiautoadjoints en dimension 3.

Culture scientifique. Endomorphismes normaux.

3.2 Réduction et classification des isométries vectorielles

3.2.1 Orientation d'un espace vectoriel

Définition 37 (Orientation de l'espace).

> Jusqu'à la fin du chapitre, E est supposé *orienté* en plus d'être euclidien.

Proposition 38 (Automorphismes préservant ou renversant l'orientation).

Définition 39 (Isométrie directe ou indirecte, rotation, groupe spécial orthogonal).

3.2.2 Isométries du plan

Théorème 40 (Classification des matrices orthogonales d'ordre 2).

Remarque. Image de $\exp(\mathrm{A}_2(\mathbb{R})) = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Corollaire 41 (Classification des isométries vectorielles en dimension 2).

Vocabulaire. Différence entre *angle* et *mesure d'angle*.

Interprétation géométrique des matrices de rotation et de réflexion.

Proposition 42 (Angle entre deux vecteurs non nuls).

Remarque. Unicité de l'angle.

Remarque. Rôle de l'exponentielle complexe dans la définition de l'angle.

Proposition 43 (Expression du produit scalaire à l'aide des normes et de l'angle).

Remarque. Isométries diagonalisables.

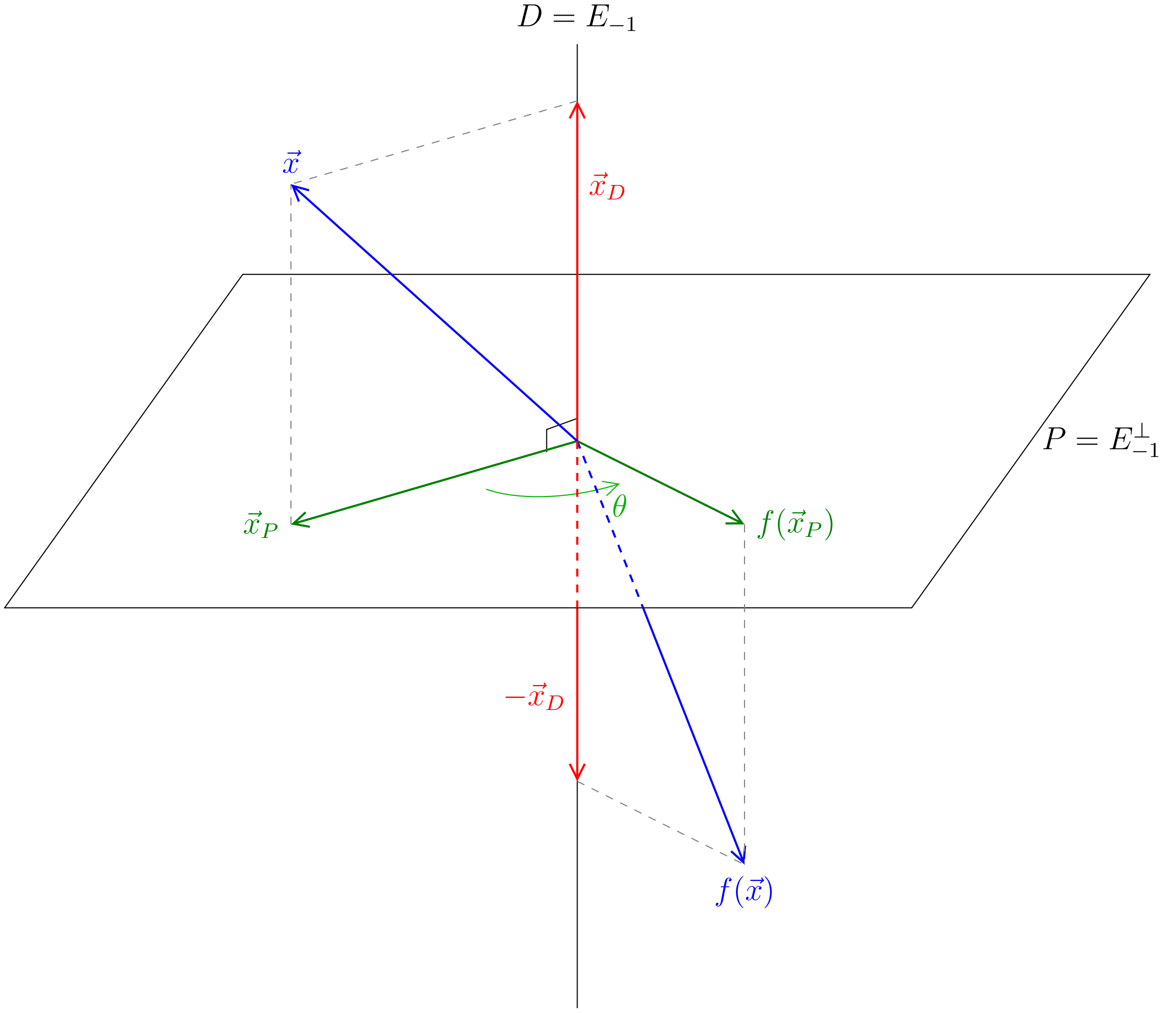
3.2.3 En dimension quelconque, en dimension 3

Proposition 44 (Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie)**.**

Théorème 45 (Réduction des isométries)**.**

Corollaire 46 (Classification des isométries en dimension 3)**.**

FIGURE 1 – Composition commutative d'une rotation dans l'espace et d'une réflexion.



— FIN DU CHAPITRE XII —

Table des matières