Chapitre X — Dérivation et intégration des fonctions vectorielles

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646–1716)

William Henry Young
(1863–1942)

Notations. Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, K un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1 Dérivation des fonctions vectorielles

Définition 1 (Dérivabilité).

Proposition 2 (Existence d'un DL_1).

Proposition 3 (La dérivation se fait composante par composante).

Exemple 1. Application dérivable à valeurs complexes.

Corollaire 4 (Caractérisation des fonctions dérivables constantes).

Corollaire 5 (Théorème de la limite de la dérivée).

Corollaire 6 (Linéarité de la dérivation).

Corollaire 7 (Dérivation d'une composition).

Proposition 8 (Composition avec une application linéaire).

Exemple 2. Conjugaison complexe d'une fonction dérivable.

Exemple 3. Exemples dans $\mathrm{M}_n(K)$.

Remarque. Cette formule généralise la formule bien connue $(u + \lambda v)' = u' + \lambda v'$.

Proposition 9 (Composition avec une application multilinéaire).

Corollaire 10 (Produit scalaire, déterminant de fonctions dérivables).

Remarque. On peut aussi dériver selon les lignes.

Exemple 4. Dérivation de la norme d'une fonction dérivable.

Exemple 5. Dérivation de $t \mapsto (A(t))^{-1}$.

Définition 11 (Classe C^k).

Proposition 12 (Inclusion de $\mathrm{C}^{k+1}(I, E)$ dans $\mathrm{C}^k(I, E)$).

Proposition 13 (La classe C^k se montre composante par composante).

Proposition 14 (Formule de Leibniz).

2 Intégration des fonctions vectorielles

Définition 15 (Fonction vectorielle continue par morceaux)**.**

Définition 16 (Fonction en escalier, intégrale de fonction en escalier)**.**

Proposition 17 (Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier)**.**

Théorème 18 (Densité des fonctions en escalier)**.**

Définition-Proposition 19 (Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux)**.**

Notations.

Théorème 20 (Sommes de Riemann)**.**

Corollaire 21 (Intégrer se fait composante par composante)**.**

Corollaire 22 (Composition avec une application linéaire)**.**

Proposition 23 (Propriétés de base de l'intégrale et théorème fondamental de l'analyse)**.**

Corollaire 24 (Inégalité des accroissements finis)**.**

Mise en garde 1. L'égalité des accroissements finis n'est plus valable : contre-exemple.

Théorème 25 (Théorèmes de Taylor)**.**

Remarque. Beaucoup d'autres résultats se généralisent.

3 Une fonction vectorielle remarquable : l'exponentielle

Proposition 26 (Lien entre exponentielle d'une matrice et d'un endomorphisme associé)**.**

Exemple 6. Exponentielle de : $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & p-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 27 (Exponentielle de matrices semblables, déterminant d'une exponentielle)**.**

Méthode 1. Calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonalisable par interpolation de Lagrange.

Exemple 7. Exponentielle de : $\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque. L'exponentielle de A est un polynôme en A.

Théorème 28 (Dérivée de $t \mapsto \exp(tA)$)**.**

Mise en garde 2. Il n'y a pas de formule analogue pour la dérivée de $t \mapsto \exp(A(t))$.

Théorème 29 (L'exponentielle matricielle transforme somme en produit... s'il y a commutativité)**.**

Mise en garde 3. L'hypothèse de commutativité est impérative.

Remarque. Calcul de $\exp(A)$ quand A est triangulée.

— Fin du chapitre X —

Annexe

Corollaire 5 (Théorème de la limite de la dérivée)**.** *Soit $f : [a,b] \to E$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b]$; on suppose que f' admet une limite à droite $\vec{L} \in E$ en a. Alors f est dérivable en a, et $f'(a) = \vec{L}$.*

Démonstration. On le démontre composante par composante. □

Corollaire 6. *Soient $f, g : I \to E$ deux applications, $\lambda \in K$ et $a \in I$. On suppose que f et g sont dérivables en a. Alors $f + \lambda g$ est dérivable en a, et on a : $(f+\lambda g)'(a) = f'(a) + \lambda g'(a)$.*

Démonstration. On le démontre composante par composante, puisqu'on sait que c'est vrai pour les applications de I dans K (revenir à la définition fonctionne également et est facile). □

Corollaire 7. *Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to K$, $g : J \to E$ deux applications telles que $f(I) \subseteq J$, de sorte que $g \circ f : I \to E$ soit correctement définie. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a, et on a : $(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot (g' \circ f)(a)$.*

Démonstration. On le démontre composante par composante, puisqu'on sait que c'est vrai pour les applications de I dans K (on peut aussi vérifier la définition de la dérivée en faisant une composition convenable de limites, ou effectuer un développement limité de $g \circ f$ en a ; voir si besoin le cours de 1re année). □

Tous ces résultats s'étendent aisément à la dérivabilité sur un intervalle.

Définition 11. *Soit $f : I \to E$ une application. Alors :*

— *on dit que f est de classe C^0 sur I lorsque f est continue sur I, et on pose $f^{(0)} = f$;*

— *on dit que f est de classe C^1 sur I lorsque f est dérivable sur I et f' continue sur I ;*

— *supposons que la dérivée $f^{(k)}$ soit déjà définie pour un entier $k \in \mathbb{N}$; on dit que f est de classe C^{k+1} sur I si $f^{(k)}$ est de classe C^1 sur I ; on pose alors $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.*

On note $\mathrm{C}^k(I,E)$ l'ensemble des fonctions $I \to E$ de classe C^k sur I, et : $\mathrm{C}^\infty(I,E) = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{C}^k(I,E)$ l'ensemble des fonctions $I \to E$ indéfiniment dérivables sur I ; ce sont des espaces vectoriels, et l'application $\begin{cases} \mathrm{C}^k(I,E) & \to & \mathrm{C}^0(I,E) \\ f & \mapsto & f^{(k)} \end{cases}$ est linéaire pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 12. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{C}^{k+1}(I,E) \subseteq \mathrm{C}^k(I,E)$.*

Démonstration. Exercice (cela découle du fait qu'une application dérivable soit continue : chose évidente en utilisant le développement limité d'ordre 1). □

Proposition 13. *Fixons $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. Soit $f : I \to E$ une application, et notons $f_1, \dots, f_n : I \to K$ ses composantes dans la base $\mathcal{B}$, de sorte que $f(x) = \sum\limits_{i=1}^n f_i(x)\vec{e}_i$ pour tout $x \in I$. Alors f est de classe C^k sur I si et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la composante f_i est de classe C^k sur I ; on a dans ce cas : $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $f^{(j)} = \sum\limits_{i=1}^n f_i^{(j)}\vec{e}_i$.*

On étend aux fonctions vectorielles la formule de Leibniz, avec quelques précautions (pour qu'on puisse bien parler de produit de fonctions).

Proposition 14 (Formule de Leibniz)**.** *Soit $k \in \mathbb{N}$, et soient $\lambda : I \to K$ et $f : I \to E$ deux applications de classe C^k sur I. Alors λf est de classe C^k sur I, et on a :*

$$(\lambda f)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^{(k-j)} f^{(j)}.$$

Plus généralement, si E_1, E_2 et F sont trois K-espaces vectoriels de dimensions finies, $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire et $f : I \to E_1$, $g : I \to E_2$ deux fonctions de classe C^k, alors $B(f,g)$ l'est aussi et :

$$(B(f,g))^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B(f^{(k-j)}, g^{(j)}).$$

Démonstration. Exercice (récurrence). □

Définition 15. *Une application $f : [a,b] \to E$ est* continue par morceaux *s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue et possède des limites finies aux bornes x_i et x_{i+1}.*

Si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, on dit que $f : I \to E$ est continue par morceaux si la restriction f à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

L'ensemble $\mathrm{C}^{\mathrm{pm}}(I,E)$ des fonctions continues par morceaux sur I est un espace vectoriel.

Définition 16. *Une application $f : [a,b] \to E$ est appelée une* fonction en escalier *s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ soit constante.*

*Si f est une fonction en escalier et $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision telle que ci-dessus, alors pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ il existe $\vec{c}_i \in E$ tel que : $\forall x \in]x_i, x_{i+1}[,\ f(x) = \vec{c}_i$, et on définit l'*intégrale *de f sur $[a,b]$ par la relation :*

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\vec{c}_i.$$

Le vecteur $\displaystyle\int_a^b f \in E$ ne dépend pas de la subdivision choisie.

La dernière affirmation se démontre comme dans le cas réel.

Proposition 17.
- *(a) L'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f$ est une application linéaire de l'espace vectoriel des fonctions en escalier dans E.*
- *(b) On a : $\displaystyle\int_a^b 1 = b - a$.*
- *(c) Si $f : [a,b] \to E$ est une fonction en escalier, alors $\|f\|_E$ en est aussi une et on a :*

$$\left\| \int_a^b f \right\|_E \leqslant \int_a^b \|f\|_E. \qquad \text{(inégalité triangulaire)}$$

Démonstration. C'est la même démonstration que dans le cas réel. □

Théorème 18. *Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $g : [a,b] \to E$ telle que : $\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.*

Démonstration. C'est la même démonstration que dans le cas réel (chapitre I, proposition 18). □

Théorème 25 (Théorèmes de Taylor)**.** *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f : I \to E$ une application de classe C^k sur I. Soit $a \in I$. Alors :*

- *(a) Pour tout x au voisinage de a, on a :*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n) \qquad \text{(Formule de Taylor-Young)}$$

Si l'on suppose de plus que f est de classe C^{k+1} sur I, alors :

(b) *Pour tout* $x \in [a,b]$, *on a :*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + (x-a)^{k+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(a+t(x-a))\mathrm{d}t.$$

(Formule de Taylor avec reste intégral)

(c) *Pour tout* $x \in [a,b]$, *on a :*

$$\left\| f(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right\|_E \leqslant \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \| f^{(k+1)} \|_{\infty,[a,x]}. \qquad \text{(Formule de Taylor-Lagrange)}$$

Démonstration. Mêmes démonstrations qu'en 1re année. □

Table des matières