Chapitre XI — Équations différentielles linéaires

Józef Hoene-Wroński
(1776–1853)

Augustin Louis Cauchy
(1789–1857)

Thomas Hakon Grönwall
(1877–1932)

Pour résoudre cette équation différentielle, regardez-la jusqu'à ce que la solution vienne d'elle-même.
(George Pólya)

Révisions attendues

1. Revoir le chapitre de 1re année sur la résolution des équations différentielles linéaires.
2. Opérations sur les nombres complexes : savoir identifier la partie réelle ou imaginaire de quantités complexes subtiles.
3. Revoir la réduction des endomorphismes (chapitre V), en particulier la réduction des matrices compagnons et la résolution avec le lemme des noyaux de toutes les équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants.
4. Revoir les propriétés de l'exponentielle matricielle.

Vos révisions sont insuffisantes si vous ne parvenez pas à faire ces exercices :

Exercice 1. Déterminer les applications $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad ty'(t) - y(t) = t.$$

Même question sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Diagonaliser dans $\mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer son exponentielle.

Exercice 3. On pose : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire et le module de $e^{-t(1-it)}$, e^{jt}, $j \cdot e^{j^2 t}$ et $1 - e^{jt}$.

Exercice 4. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $y'' + y' + y = 0$. Reprendre cette question en supposant cette fois y *à valeurs réelles*.

Exercice 5.

1. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y''(t) + y(t) = te^{-t}$.
2. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y''(t) - y(t) = e^t \cos(t)$.

Exercice 6. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) + y(-t) = \cos(t)$. Trouver des équations différentielles vérifiées par $y_1 : t \mapsto \frac{y(t)+y(-t)}{2}$ et $y_2 : t \mapsto \frac{y(t)-y(-t)}{2}$, et en déduire une expression simple de y_1, y_2, puis y.

Motivation

Notations. La lettre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sauf mention explicite du contraire, n est un entier naturel non nul.

1 Retour rapide sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exemple 1. Le lemme de Grönwall. ♡

2 Équations différentielles linéaires : résultats théoriques

2.1 Réduction aux équations différentielles d'ordre 1

Définition 1 (Équation différentielle linéaire : cas général)**.**

Proposition 2 (Conséquences de la structure affine des équations différentielles)**.**

Définition 3 (Problème de Cauchy)**.**

Remarque. Une solution à un problème de Cauchy est indéfiniment dérivable.

2.2 Théorème de Cauchy linéaire et isomorphisme avec K^n

Théorème 4 (Théorème de Cauchy linéaire)**.**

Démonstration (idée). Introduire une suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = f(y_n)$, où f est l'application $y \mapsto \left(t \mapsto \left(\vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} (ay+b)\right)\right)$. Montrer par récurrence que pour tout t dans un compact : $\|f^n(\varphi_1)(t) - f^n(\varphi_2)(t)\| \leqslant \dfrac{M^n|t-t_0|^n}{n!}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$, pour toutes fonctions continues φ_1 et φ_2 et tout entier n, où M est le majorant d'une certaine fonction, dont l'existence est assurée par la restriction à un compact.
Conclure que la série $\sum_{n\geqslant 0}(y_{n+1} - y_n)$ converge uniformément sur tout compact inclus dans I. Utiliser le lien suite-série puis un théorème d'interversion pour montrer que la limite de cette série est une solution du problème de Cauchy intégral.
L'unicité découle d'une bonne utilisation de la majoration ci-dessus. □

Culture scientifique. Le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Remarque. La démonstration n'explicite pas les solutions.

Corollaire 5 (Dimension de l'espace des solutions d'un système différentiel homogène)**.**

Remarque. Conséquence pratique.

Définition 6 (Système fondamental de solutions)**.**

Proposition 7 (Caractérisation des systèmes fondamentaux de solutions)**.**

2.3 Application aux équations différentielles linéaires scalaires

Proposition 8 (Réduction aux systèmes différentiels)**.**

Théorème 9 (Théorème de Cauchy linéaire, cas des équations différentielles scalaires)**.**

Théorème 10 (Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène)**.**

Proposition 11 (Caractérisation des systèmes fondamentaux de solutions : cas scalaire)**.**

2.4 Le wronskien

Définition 12 (Le déterminant wronskien)**.**

Proposition 13 (Calcul explicite du wronskien)**.**

Exemple 2. Cas particulier du wronskien d'une famille de solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2.

Exemple 3. Zéros entrelacés des solutions d'une équation différentielle d'ordre 2. ♡

3 Résolution pratique

3.1 Coefficients constants : utilisation de l'exponentielle matricielle

Proposition 14 (Si A est constante, les solutions de $Y' = AY$ sont des exponentielles)**.**

Remarque. Si la condition initiale est : $Y(t_0) = X_0$.
Remarque. Solutions de $Y' = AY + B$ vérifiant : $Y(t_0) = X_0$.
Remarque. L'isomorphisme réciproque de $\Phi_0 : Y \mapsto Y(0)$ est ici explicite.

Corollaire 15 (Système fondamental de solutions de $Y' = AY$, quand A est diagonalisable)**.**

Exemple 4. Solutions du système différentiel : $\left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & 3y_1 + y_2 - 4y_3, \\ y_2' & = & -8y_1 - 2y_2 + 12y_3, \\ y_3' & = & -2y_1 - y_2 + 5y_3. \end{array}\right.$

Méthode 1. Si A n'est pas diagonalisable.

Exemple 5. Lien entre spectre de A et comportement en $+\infty$ des solutions de $Y' = AY$. ♡

3.2 Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients non constants

3.2.1 Méthode d'abaissement de l'ordre

Exemple 6. Détermination d'un système fondamental de solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 ← VIII ex. 11

$$\forall x \in \,]0,1[\,, \quad x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x) = 0. \qquad (E)$$

Autre méthode. Utilisation du wronskien.

3.2.2 Méthode de variation des constantes

Proposition 16 (Méthode de variation des constantes : ordre 2)**.**

Exemple 7. Solutions de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = \frac{2t+1}{t^2} e^t. \qquad (E)$$

Autres moyens de trouver une solution particulière. Lorsque le second membre est de la forme : $e^{\alpha t}P(t)$, où $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$, il n'est pas nécessaire d'utiliser la méthode de variation des constantes. On peut procéder ainsi :

— Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$: on cherche une solution de (E) sous la forme $t \mapsto e^{\alpha t}Q(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P ;

— Si α est racine simple de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$: on cherche une solution de (E) sous la forme $t \mapsto e^{\alpha t}Q(t)$, où Q est un polynôme de degré $\deg(P) + 1$, ou bien sous la forme $t \mapsto e^{\alpha t}tR(t)$, où R est un polynôme de même degré que P ;

— Si α est racine double de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$: on cherche une solution de (E) sous la forme $t \mapsto e^{\alpha t}Q(t)$ où Q est un polynôme de degré $\deg(P) + 2$, ou bien sous la forme $t \mapsto e^{\alpha t}t^2R(t)$, où R est un polynôme de même degré que P.

— Fin du chapitre XI —

Table des matières

1 Retour rapide sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1 **3**

2 Équations différentielles linéaires : résultats théoriques **3**

2.1 Réduction aux équations différentielles d'ordre 1 3

2.2 Théorème de Cauchy linéaire et isomorphisme avec K^n 3

2.3 Application aux équations différentielles linéaires scalaires 4

2.4 Le wronskien 4

3 Résolution pratique **5**

3.1 Coefficients constants : utilisation de l'exponentielle matricielle 5

3.2 Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients non constants 5