# Du cours aux exercices (savoir-faire à vérifier)

**Chapitre préliminaire — Convergence des séries numériques ou de fonctions**

Les principaux acquis à vérifier sont :

**Lien suite-série, suites de Cauchy.**

★ 1. Montrer qu'une suite converge en montrant qu'elle est de Cauchy ou en utilisant le lien suite-série. ☐

**Convergence des suites de fonctions.**

✓ 1. Étudier la convergence simple ou uniforme d'une suite de fonctions explicite. (🗎) ☐

★ 2. Montrer une implication du type : « $(\spadesuit)_n$ CVU $\Longrightarrow (\clubsuit)_n$ CVU ». ☐

☢ 3. Montrer une implication du type : « $(\clubsuit)_n$ CVS + Hypothèse $\Longrightarrow (\clubsuit)_n$ CVU ». (🗎) ☐

L'icône « (🗎) » signifie que les documents *Méthodes* donnent des compléments sur ces savoir-faire.

## Lien suite-série, suites de Cauchy

★ Montrer qu'une suite converge en montrant qu'elle est de Cauchy ou en utilisant le lien suite-série.

**Exemples.**

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. Soit $f$ une application uniformément continue sur $]a,b]$. Montrer que $f$ se prolonge par continuité en $a$.
2. Démontrer qu'il existe un réel $\gamma_1$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{(\ln(n))^2}{2} + \gamma_1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
3. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues sur un segment $I = [a,b]$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $x \in I$, on a : $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{|f_n(x) - f_{n-1}(x)|}{2}$. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $I$.

## Convergence des suites de fonctions

✓ Étudier la convergence simple ou uniforme d'une suite de fonctions explicite.

**Exemples.** Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions dont les termes généraux sont définis ci-dessous ; d'abord sur tout l'intervalle de définition, puis sur des segments inclus dedans dans le cas où il n'y a pas convergence uniforme sur tout l'intervalle :

(a) $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{n(1+x^n)} \end{cases}$ , (b) $g_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-nx}\sin(nx) \end{cases}$ , (c) $h_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n\dfrac{x+n^2}{1+n^3x} \end{cases}$

(d) $j_n : \begin{cases} [0,1[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & nx^n \end{cases}$ , (e) $k_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1+x^n}{\sqrt{x}+x^{2n}} \end{cases}$ , (f) $\ell_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n\arctan\left(\dfrac{x}{n}\right) \end{cases}$ .

★ Montrer une implication du type : « $(\spadesuit)_n$ CVU $\Longrightarrow$ $(\clubsuit)_n$ CVU ».

**Exemples.** La notation $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. De même pour $J$.

1. Soient $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et $(g_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de fonctions définies sur $I$, et convergeant uniformément sur $I$ vers deux fonctions bornées, notées $f$ et $g$ respectivement. Montrer que $(f_ng_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $I$ vers $fg$.
2. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur $I$. Soit $g : J \to I$ une application. Montrer que $(f_n \circ g)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $J$.
3. Soit $(f_n : I \to \mathbb{R})_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur $I$. Montrer que $\left(\dfrac{f_n}{1+f_n^2}\right)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $I$.

☢ Montrer une implication du type : « $(\clubsuit)_n$ CVS + Hypothèse $\Longrightarrow$ $(\clubsuit)_n$ CVU ».

**Exemples.**

1. Soit $(f_n : I \to \mathbb{R})_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de même monotonie, qui converge simplement sur un *segment* $I$ vers une fonction constante. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $I$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On pose : $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\left(x \mapsto e^{ixk}\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}\right)$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions à valeurs dans $E$, qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$. Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

## Lien suite-série, suites de Cauchy

★ Montrer qu'une suite converge en montrant qu'elle est de Cauchy ou en utilisant le lien suite-série. □

**Réponse.**

1. Pour montrer que $f$ admet une limite finie en $a$, il suffit de montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ convergeant vers $a$, la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers une même limite $\ell$. On passe par la caractérisation séquentielle afin de pouvoir utiliser les suites de Cauchy. C'est-à-dire : montrons que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ convergeant vers $a$, la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy. Pour ce faire, nous devons savoir majorer $|f(u_m) - f(u_n)|$ : c'est l'uniforme continuité qui le permet.

   Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f$ est uniformément continue sur $]a, b]$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in ]a, b]^2$ vérifiant : $|x - y| \leqslant \eta$, on ait : $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Or, si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite à valeurs dans $]a, b]$ convergeant vers $a$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, on ait : $|u_n - a| \leqslant \frac{\eta}{2}$. Pour tous entiers $m, n \geqslant N$, on a donc : $|u_m - u_n| \leqslant |u_m - a| + |a - u_n| \leqslant \eta$. Par ce qui précède, pour tous entiers $m, n \geqslant N$ on a : $|f(u_m) - f(u_n)| \leqslant \varepsilon$. Ceci montre que $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy, donc convergente (cette étape est à savoir redémontrer, puisque les suites de Cauchy ne sont pas au programme).

   Ceci vaut pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ convergeant vers $a$. Montrons que la limite ne dépend pas de la suite choisie. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ une autre suite convergeant vers $a$. Alors, pour tout $n$ suffisamment grand on a : $|u_n - v_n| \leqslant \eta$ (nous vous laissons quantifier correctement cette étape), ce qui permet d'écrire : $0 \leqslant |f(u_n) - f(v_n)| \leqslant \varepsilon$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(u_n) - f(v_n)) = 0$. Ceci assure que $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ et $(f(v_n))_{n\geqslant 0}$, dont on sait déjà qu'elles convergent, ont la même limite $\ell$. Ainsi, par caractérisation séquentielle, $f$ admet une limite (finie) en $a$ : d'où le prolongement par continuité en $a$.

2. Posons : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{(\ln(n))^2}{2}$. Ce qui est demandé revient à démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge, et il est plus simple pour cela de passer par la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$, puisque $u_{n+1} - u_n$ ne fait plus intervenir de somme :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}\left((\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2\right) \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\ln(n(n+1)) \\
&= \ln(n+1)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\ln(n) \\
&= \left(\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\ln(n) \\
&= \left(\ln(n) + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\ln(n) \\
&= \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

   Or le théorème des croissances comparées permet de démontrer : $\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. On en déduit, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge, et toujours par comparaison que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument donc converge. Par le lien suite-série, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel $\gamma_1$ : d'où le résultat.

3. Une récurrence facile implique : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{|f_1(x) - f_0(x)|}{2^n}$. Comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (f_{n+1}(x) - f_n(x))$ converge absolument donc converge par

comparaison de séries à termes positifs. Par le lien suite-série, la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers un réel qu'on note $f(x)$. Montrons que la convergence de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vers $f$ est uniforme. Toujours par le lien suite-série, on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in I$, $f(x)-f_n(x)=\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(f_{k+1}(x)-f_k(x))$. Grâce à l'inégalité triangulaire et la majoration ci-dessus, on en déduit : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in I$, $|f(x)-f_n(x)|\leqslant \frac{1}{2^{n-1}}|f_1(x)-f_0(x)|$. Comme $f_1-f_0$ est continue sur $I$ qui est un segment, cette fonction est bornée en valeur absolue par une constante $M$ d'après le théorème des bornes atteintes, et donc finalement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|f-f_n\|_\infty\leqslant\frac{M}{2^{n-1}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Le théorème des gendarmes implique que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $I$ vers $f$.
**Remarque.** On peut aussi montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy au sens de la norme infinie, en montrant : $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2$, $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant\sum\limits_{k=n}^{n+p-1}|f_{k+1}(x)-f_k(x)|\leqslant\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\frac{M}{2^k}=\frac{M}{2^{n-1}}$.

## Convergence des suites de fonctions

✓ Étudier la convergence simple ou uniforme d'une suite de fonctions explicite. ☐

**Réponse.**
*(a) Suite* $(f_n)_{n\geqslant 1}$. On étudie d'abord la convergence simple. Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Si $x\in[0{,}1[$ alors $x^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc : $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{x}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Si $x=1$ alors $f_n(1)=\frac{1}{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Si $x>1$ alors $x^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et donc :

$$f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{x}{nx^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{nx^{n-1}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

On constate donc que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$. On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f=0$. Une étude de variations démontre alors que pour tout entier $n\geqslant 2$, on a :

$$\|f_n-f\|_\infty=\left|(f_n-f)\left((n-1)^{-\frac{1}{n}}\right)\right|=\frac{(n-1)^{-\frac{1}{n}}}{n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\exp\left(-\frac{\ln(n-1)}{n}\right)}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

(pour ce passage à la limite, on utilise le fait que $\frac{\ln(n-1)}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par croissances comparées). Ainsi $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $f=0$.

*(b) Suite* $(g_n)_{n\geqslant 0}$. On étudie d'abord la convergence simple. Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Si $x=0$ alors on a immédiatement : $g_n(0)=0\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Si $x>0$, alors : $0\leqslant|g_n(x)|\leqslant e^{-nx}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty}g_n(x)=0$. On en déduit que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $g=0$. Pour tout entier $n$ non nul, on a :

$$\|g_n-g\|_\infty\geqslant\left|g_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right|=e^{-\frac{\pi}{2}}\underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow}0,$$

donc $(g_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $g=0$.

Regardons à présent s'il y a convergence uniforme sur les segments : soit $[a,b]\subseteq\mathbb{R}_+$. Si $a=0$, alors $\frac{\pi}{2n}\in[a,b]=[0,b]$ pour tout $n$ assez grand (puisque $\frac{\pi}{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$), et dans ce cas on peut reprendre le raisonnement ci-dessus pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[a,b]$. Si $a>0$, par contre, on peut écrire : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[a,b]$, $|g_n(x)-g(x)|=e^{-nx}|\sin(nx)|\leqslant e^{-na}$. Par propriété de la borne supérieure : $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant\|g_n-g\|_\infty\leqslant e^{-na}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty}\|g_n-g\|_\infty=0$. On en déduit que $(g_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment n'ayant pas 0 pour extrémité.

À noter que cette idée de distinguer $a=0$ et $a>0$ ne vient pas de nulle part : tracer $g_n$ pour différentes valeurs de $n$, pour se rendre compte que la « bosse glissante », qui empêche la convergence uniforme, se rapproche indéfiniment de 0. C'est donc le point qui pose problème.

*(c) Suite* $(h_n)_{n\geqslant 0}$. On étudie d'abord la convergence simple. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$h_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\cdot\frac{n^2}{n^3x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}.$$

On en déduit que $(h_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction inverse $h : x\mapsto\frac{1}{x}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$|h_n(x)-h(x)| = \left|n\frac{x+n^2}{1+n^3x}-\frac{1}{x}\right| = \left|\frac{nx(x+n^2)-(1+n^3x)}{(1+n^3x)x}\right| = \left|\frac{nx^2-1}{(1+n^3x)x}\right|.$$

On voit alors qu'en prenant $x=\frac{1}{n^3}$, on obtient, pour tout entier $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ :

$$\left|h_n\left(\frac{1}{n^3}\right)-h\left(\frac{1}{n^3}\right)\right| = \frac{n^3}{2}\left(1-\frac{1}{n^5}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ ; sinon, il y aurait : $\|h_n-h\|_\infty \geqslant \left|h_n\left(\frac{1}{n^3}\right)-h\left(\frac{1}{n^3}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui contredirait le fait que $\|h_n-h\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On peut aussi trouver le maximum par une étude de variations. Il est atteint en $x=\frac{\sqrt{n^6-n}-n^3}{n}$ (pour $n\geqslant 1$), et on a alors pour tout $n$ au voisinage de $+\infty$ :

$$\|h_n-h\|_\infty = \frac{2n}{n^3-\sqrt{n^6-n}} = \frac{2n}{n^3\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n^5}}\right)} = \frac{2}{n^2}\times\frac{1}{\cancel{1}-\left(\cancel{1}-\frac{1}{2n^5}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2\times\frac{1}{2n^5}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4n^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

et on conclut la même chose.

Regardons s'il y a convergence uniforme sur les segments : soit $[a,b]\subseteq\mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $x\in[a,b]$ et tout entier $n$ suffisamment grand (pour que $nx^2-1>0$), on a :

$$|h_n(x)-h(x)| = \frac{nx^2-1}{(1+n^3x)x} \leqslant \frac{nb^2-1}{(1+n^3a)a}.$$

Par propriété de la borne supérieure, pour tout $n$ au voisinage de $+\infty$ on a : $0\leqslant\|h_n-h\|_\infty\leqslant\frac{nb^2-1}{(1+n^3a)a}$. Or :

$$\frac{nb^2-1}{(1+n^3a)a} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nb^2}{n^3a^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\cdot\frac{b^2}{a^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty}\|h_n-h\|_\infty=0$. Ainsi $(h_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $h : x\mapsto\frac{1}{x}$ pour tout $[a,b]\subseteq\mathbb{R}_+^*$.

*(d) Suite* $(j_n)_{n\geqslant 0}$. Le théorème des croissances comparées permet de démontrer que $(j_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction nulle $j=0$. Pour la convergence uniforme, notons qu'on est en présence de fonctions de la forme « polynôme en $n$ × fonction puissance ». Nous avons expliqué dans *Méthodes* pourquoi en général il n'y a pas convergence uniforme dans ce cas, en donnant une piste pour le démontrer. Pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a $1-\frac{1}{n}\in[0,1[$, et :

$$\|j_n-j\|_\infty \geqslant \left|j_n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

puisqu'il est classique de démontrer que $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$. On n'a donc pas convergence uniforme sur $[0,1[$. En revanche il y a convergence uniforme sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $[0,1[$, en utilisant le fait que par croissances comparées : $\|j_n-j\|_\infty=\|j_n\|_\infty=nb^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Remarque.** À partir du chapitre VII, le théorème de la double limite permettra en deux lignes de contredire la convergence uniforme dans ce genre d'exemple, puisque : $\lim\limits_{x\to1}\lim\limits_{n\to+\infty}j_n(x)\neq\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to1}j_n(x)$ (ceci équivaut à $0\neq+\infty$).

*(e) Suite* $(k_n)_{n\geqslant 0}$. On étudie d'abord la convergence simple. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Si $x \in ]0,1[$, alors $(x^n)_{n\geqslant 0}$ et $(x^{2n})_{n\geqslant 0}$ convergent vers 0, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Si $x=1$, alors trivialement : $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(x) = 1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$. Si $x>1$, alors : $k_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{x^{2n}} = \frac{1}{x^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En conclusion, $(k_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers :

$$k : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in ]0,1], \\ 0 & \text{si } x \in ]1,+\infty[. \end{cases} \end{cases}$$

Comme $k$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (discontinuité en 1) alors que $k_n$ l'est pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence ne peut pas être uniforme. Par le même argument, $(k_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ dont l'intérieur contient 1. Si le segment est de la forme $[a,1]$ avec $a<1$, on a toujours un problème de convergence uniforme mais la contradiction est plus subtile. On a en effet, en imitant un calcul fait pour l'exemple (d) ci-dessus :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \|k_n - k\|_{\infty,[a,1]} \geqslant \left| k_n\left(1-\frac{1}{n}\right) - k\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-1}+e^{-2}}{1+e^{-2}} > 0.$$

Prenons à présent $[a,b] \subseteq ]0,1[$. Pour tout $x \in [a,b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|k_n(x) - k(x)| = \frac{x^{n-1}\left(x^{\frac{1}{2}} - x^n\right)}{1+x^{2n-1/2}} \leqslant b^{n-1/2},$$

donc : $\|k_n - k\|_{\infty,[a,b]} \leqslant b^{n-1/2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ : on en déduit qu'il y a convergence uniforme sur $[a,b] \subseteq ]0,1[$.

Enfin, si $[a,b] \subseteq ]1,+\infty[$, on a pour tout $x \in [a,b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ : $|k_n(x) - k(x)| = \frac{1+x^n}{\sqrt{x}+x^{2n}} \leqslant \frac{2x^n}{x^{2n}} = \frac{1}{x^n} \leqslant \frac{1}{a^n}$, ce qui donne un majorant de la norme infinie qui converge vers 0. Il y a donc convergence uniforme sur tout segment $[a,b] \subseteq ]1,+\infty[$ (et même sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a>1$).

*(f) Suite* $(\ell_n)_{n\geqslant 1}$. On étudie d'abord la convergence simple. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme : $\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a : $\ell_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, donc $(\ell_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $\ell : x \mapsto x$. La convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ est fausse, puisque l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \|\ell_n - \ell\|_\infty \geqslant |\ell_n(n) - \ell(n)| = n\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

En revanche il y a convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+$. En effet, soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $x \in [a,b]$ : $|\ell_n(x) - \ell(x)| = n\left|\arctan\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right|$. On reconnaît une « différence petite » entre une fonction et la partie régulière de son développement limité à l'ordre 1 : *L'art de la majoration* nous encourage à la majorer avec l'inégalité de Taylor-Lagrange. Comme la dérivée seconde de l'arc tangente est $x \mapsto -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, elle est majorée en valeur absolue par 1 par exemple, et on en déduit : $\forall u \in \mathbb{R},\ |\arctan(u) - u| \leqslant u^2$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall x \in [a,b], \quad |\ell_n(x) - \ell(x)| \leqslant n \cdot \frac{x^2}{2n^2} \leqslant \frac{b^2}{2n}.$$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $0 \leqslant \|\ell_n - \ell\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{b^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\ell_n - \ell\|_{\infty,[a,b]} = 0$. D'où le résultat : $(\ell_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+$ vers $\ell$.

★ Montrer une implication du type : « $(\spadesuit)_n$ CVU $\Longrightarrow$ $(\clubsuit)_n$ CVU ». ☐

**Réponse.**

1. On s'inspire de la démonstration, dans le cas réel ou complexe, du fait que si deux suites convergent alors leur produit aussi. Soit $x \in I$. On fait apparaître les quantités qu'on sait être proches, à savoir $f_n(x) - f(x)$ et $g_n(x) - g(x)$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$ :

$$\begin{aligned} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= |(f_n(x) - f(x) + f(x))g_n(x) - f(x)g(x)| \\ &= |(f_n(x) - f(x))g_n(x) + f(x)(g_n(x) - g(x))| \\ &\leqslant |f_n(x) - f(x)| \cdot |g_n(x)| + |f(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| \\ &\leqslant \|f_n - f\|_\infty \cdot |g_n(x)| + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Si l'on parvient à majorer $|g_n(x)|$ par une constante (ne dépendant pas de $x$ ni $n$), c'est gagné. C'est là que l'hypothèse bornée sur $g$ intervient. En effet, comme $(g_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $I$ vers $g$, pour tout $n$ suffisamment grand et pour tout $x \in I$ on a : $|g(x) - g_n(x)| \leqslant 1$. D'après l'inégalité triangulaire renversée, on en déduit, pour tout $n$ assez grand : $\forall x \in I$, $|g_n(x)| \leqslant 1 + |g(x)| \leqslant 1 + \|g\|_\infty$. En résumé, pour tout $n$ assez grand :

$$\forall x \in I, \quad 0 \leqslant |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leqslant (\|f_n - f\|_\infty \cdot (1 + \|g\|_\infty) + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty)\,.$$

Le majorant ne dépend pas de $x$. Par propriété de la borne supérieure, c'est donc aussi un majorant de la norme infinie de $f_n g_n - fg$, et on voit qu'il converge vers 0 puisque $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et $(g_n)_{n\geqslant 0}$ convergent uniformément vers $f$ et $g$ respectivement. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n g_n - fg\|_\infty = 0$, d'où le résultat.

2. Soit $f$ la limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$. On a : $\forall x \in I$, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \|f - f_n\|_{\infty,I}$. Or pour tout $x \in J$ on a : $g(x) \in I$, donc : $\forall x \in J$, $|f(g(x)) - f_n(g(x))| \leqslant \|f - f_n\|_{\infty,I}$. Cette majoration étant indépendante de $x$, par propriété de la borne supérieure on a : $0 \leqslant \|f \circ g - f_n \circ g\|_{\infty,J} \leqslant \|f - f_n\|_{\infty,I}$. On en déduit aisément le résultat voulu grâce au théorème des gendarmes.

3. Lire *L'art de la majoration* permet de comprendre les majorations effectuées. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1], \quad \left|\frac{f_n(x)}{1 + (f_n(x))^2} - \frac{f(x)}{1 + (f(x))^2}\right| &= \left|\frac{f_n(x)\left(1 + (f(x))^2\right) - f(x)\left(1 + (f_n(x))^2\right)}{\left(1 + (f_n(x))^2\right)\left(1 + (f(x))^2\right)}\right| \\ &= \frac{\left|f_n(x)\left(1 + (f(x))^2\right) - f(x)\left(1 + (f_n(x))^2\right)\right|}{\left(1 + (f_n(x))^2\right)\left(1 + (f(x))^2\right)}\end{aligned}$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, $\left(1 + (f_n(x))^2\right)\left(1 + (f(x))^2\right) \geqslant 1 \cdot 1 = 1$. Par passage à l'inverse :

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|\frac{f_n(x)}{1 + (f_n(x))^2} - \frac{f(x)}{1 + (f(x))^2}\right| \leqslant \left|f_n(x)\left(1 + (f(x))^2\right) - f(x)\left(1 + (f_n(x))^2\right)\right|.$$

En développant, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$ :

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_n(x)}{1 + (f_n(x))^2} - \frac{f(x)}{1 + (f(x))^2}\right| &= \left|f_n(x) + f_n(x)(f(x))^2 - f(x) - f(x)(f_n(x))^2\right| \\ &= \left|f_n(x) - f(x) + f_n(x)(f(x))^2 - f(x)(f_n(x))^2\right| \\ &= |(f_n(x) - f(x)) + f_n(x)f(x)(f(x) - f_n(x))| \\ &= |(f_n(x) - f(x)) \cdot (1 - f(x)f_n(x))| \\ &= |f_n(x) - f(x)| \cdot |1 - f(x)f_n(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty \cdot |1 - f(x)f_n(x)| \\ &\leqslant \|f_n - f\|_\infty \cdot (1 + |f(x)| \cdot |f_n(x)|) \leqslant \|f_n - f\|_\infty \cdot (1 + \|f\|_\infty \cdot \|f_n\|_\infty)\,.\end{aligned}$$

Comme $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $f$, on a pour tout $n$ assez grand : $\|f_n\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty$ (argument analogue à celui utilisé dans la première question), et donc, pour tout $n$ assez grand :

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|\frac{f_n(x)}{1 + (f_n(x))^2} - \frac{f(x)}{1 + (f(x))^2}\right| \leqslant \|f_n - f\|_\infty \cdot \left(1 + 2(\|f\|_\infty)^2\right).$$

Par propriété de la borne supérieure, pour tout $n$ assez grand :

$$0 \leqslant \left\|\frac{f_n}{1 + f_n^2} - \frac{f}{1 + f^2}\right\|_\infty \leqslant \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \cdot \left(1 + 2(\|f\|_\infty)^2\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et on conclut avec le théorème des gendarmes.

**Remarque.** On pourrait démontrer bien plus rapidement le résultat voulu grâce au fait que l'application $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ soit 1-lipschitzienne.

☢ Montrer une implication du type : « $(\clubsuit)_n$ CVS + Hypothèse $\Longrightarrow$ $(\clubsuit)_n$ CVU ». ☐

**Réponse.**

1. Notons $I=[\alpha,\beta]$, avec : $\alpha\leqslant\beta$. Soit $a\in\mathbb{R}$ tel que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $I$ vers $x\mapsto a$. Quitte à remplacer $f_n$ par $f_n-a$ (ce qui n'affecte pas la monotonie), on peut supposer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle. Quitte à changer $f_n$ en $-f_n$, supposons que $f_n$ est décroissante pour tout $n\in\mathbb{N}$. Soit $\varepsilon>0$. Il est facile de se convaincre que $|f_n|$ atteint son maximum en $\alpha$ ou en $\beta$ (le montrer !). Or, par convergence simple vers la fonction nulle, il existe $N_1\in\mathbb{N}$ et $N_2\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n\geqslant\max(N_1,N_2)$, on ait : $|f_n(\alpha)|\leqslant\varepsilon$, et : $|f_n(\beta)|\leqslant\varepsilon$. Par conséquent : $\forall n\geqslant\max(N_1,N_2)$, $\forall x\in I$, $|f_n(x)|\leqslant\varepsilon$. Ceci démontre que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle.
   On retrouve cette idée récurrente que le passage de la convergence simple à la convergence uniforme est possible si l'on parvient à se ramener à un nombre fini de points (ici $\alpha$ et $\beta$).

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $(a_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant p-1}\in\mathbb{C}^p$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{p-1}a_{n,k}e^{ixk}$. Si l'on parvient à montrer que : 1° $f$ s'écrit aussi sous la forme $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{p-1}a_ke^{ixk}$, 2° que $(a_{n,k})_{n\geqslant 0}$ converge vers $a_k$ pour tout $k$, alors il est facile de se convaincre que la convergence uniforme en découlerait aussitôt (en majorant $f_n-f$ par $\sum\limits_{k=0}^{p-1}|a_{n,k}-a_k|$). En fait, nous allons démontrer 2° (la convergence de $(a_{n,k})_{n\geqslant 0}$ pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$), ce qui impliquera 1° puis la convergence uniforme.
   Pour cela, l'idée est d'exprimer $(a_{n,k})_{n\geqslant 0}$ en fonction de ce qu'on *sait* être convergent : $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ pour tout $x$. Nous y parviendrons après inversion du système $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{p-1}a_{n,k}e^{ixk}$, écrit pour suffisamment de valeurs de $x$ (il en faut au moins $p$). Soient, donc, $x_0,\ldots,x_{p-1}$ des réels. Fixons $n\in\mathbb{N}$ provisoirement. Pour que le système : $\forall i\in[\![0,p-1]\!]$, $f_n(x_i)=\sum\limits_{k=0}^{p-1}a_{n,k}e^{ikx_i}$ soit résoluble, il suffit que la matrice $\left(\left(e^{ikx_i}\right)\right)_{0\leqslant i,k\leqslant p-1}=\left(\left(\left(e^{ix_i}\right)^k\right)\right)_{0\leqslant i,k\leqslant p-1}\in\mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ soit inversible : comme c'est une matrice de Vandermonde, il suffit pour cela de prendre les $x_i$ tous distincts modulo $2\pi$ (ce qui est évidemment possible vu que $]0,2\pi[$ est un ensemble infini), afin que les $e^{ix_i}$ soient distincts également.
   Faisons un tel choix de $x_i$. Le système précédent est donc inversible, et les formules de Cramer impliquent que pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$, $a_{n,k}$ s'écrit exclusivement comme somme, produit et quotient des $f_n(x_i)$, qui ont tous une limite quand $n\to+\infty$. Par opération sur les limites, $(a_{n,k})_{n\geqslant 0}$ converge pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$, vers un complexe qu'on note $a_k$. En passant à la limite quand $n\to+\infty$ dans : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{p-1}a_{n,k}e^{ixk}$, la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vers $f$ implique : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{p-1}a_ke^{ixk}$.
   On a démontré les points 1° et 2° annoncés plus haut ; on conclut en écrivant :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\quad 0\leqslant|f_n(x)-f(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{p-1}|a_{n,k}-a_k|,$$
   de sorte que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant\|f_n-f\|_\infty\leqslant\sum\limits_{k=0}^{p-1}|a_{n,k}-a_k|$. Le majorant tend vers 0 d'après ce qui précède, donc par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_\infty=0$. D'où le résultat : $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f$.