Du cours aux exercices

Chapitre préliminaire — Convergence des séries numériques ou de fonctions

1 Aide à la révision du cours

1.1 Séries télescopiques et suites de Cauchy

Motivation de cette partie

On donne de nouvelles méthodes pour montrer la convergence de suites par des moyens détournées, en particulier lorsque la limite candidate est inconnue ou que son existence est déjà un problème en soi (cas des sommes de séries par exemple). Cela passe par une étude quantitative précise de $u_{n+1} - u_n$ (lien suite-série) ou de $u_{n+p} - u_n$ (suites de Cauchy).

Proposition 1 (Lien suite-série)**.**

✓

- Dans le cas de convergence, que peut-on dire du *reste* de la série télescopique ? Pourquoi son expression peut potentiellement être intéressante ?
- La proposition donne un lien entre la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et celle de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$. Peut-on trouver des liens entre d'autres propriétés de cette suite et de cette série ? (signe, caractère borné, monotonie, etc.).

Exemple 1. ♡

✓ Se demander pourquoi ce développement est *très* intéressant.

★

- Regarder si une comparaison série-intégrale permet de trouver ce développement asymptotique. C'est lié à l'exercice qui suit.
- Obtient-on un développement asymptotique à deux termes avec d'autres séries de Riemann, suivant la même méthode ?

Exercice 1.

Exercice 2.

★ Regarder si une comparaison série-intégrale permet de trouver ce développement asymptotique.

Exercice 3.

✓ On note que $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1} - u_n)$ n'est pas spécialement plus simple. Qu'est-ce qui serait plus simple que la différence de termes consécutifs ? Comment s'y ramener ? Plus généralement, pour quel type de suite cette idée serait fructueuse ?

Exemple 2 (guidé). ♡

✓

- Revoir dans le cours de 1re année où vous utilisiez des applications contractantes, et comment vous faisiez pour montrer *en pratique* qu'une application l'est.
- Vérifier qu'on sait démontrer qu'une application lipschitzienne est continue.

★

- Le traiter en montrant que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy.
- Obtenir un majorant de $|\ell - u_n|$. Il est en effet utile d'avoir conscience que le lien suite-série et les suites de Cauchy permettent *aussi*, bien souvent, d'avoir une information sur l'écart de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à sa limite.

Définition 2 (Suite de Cauchy)**.**

✓

- Étudier des suites usuelles et regarder si elles sont de Cauchy. Si oui, déterminer explicitement le rang N qui assure la majoration $|u_{n+p} - u_n| \leqslant \varepsilon$, *si possible*.
- Se convaincre de l'équivalence des deux formulations proposées (avec $|u_{n+p} - u_n|$ et $|u_m - u_n|$).

Proposition 3 (Condition suffisante pour être une suite de Cauchy)**.**

✓ Détailler ce que je n'ai pas détaillé. Quand est-ce que cette condition suffisante peut être préférable à la définition ?

★ Cette condition suffisante est-elle nécessaire ?

Exemple 3.

✓

- Proposer d'autres contre-exemples (une infinité, idéalement). Qu'ont-ils tous en commun, « qualitativement » ?
- Écrire en termes epsilonesques le fait que : $\forall p \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+p} - u_n) = 0$, pour repérer la différence avec une suite de Cauchy. Si on devait décrire cette différence en termes « concrets », que diriez-vous ?

Proposition 4 (Une suite convergente est de Cauchy)**.**

✓ Se convaincre que ce résultat est naturel visuellement, et que l'idée de faire apparaître $|u_n - \ell|$ et $|u_m - \ell|$ *via* l'inégalité triangulaire l'est tout autant.

Proposition 5 (Une suite de Cauchy converge)**.**

✓

- Chercher ce qui n'aurait pas marché avec une suite vérifiant : $\forall p \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+p} - u_n) = 0$. Cela met l'accent sur l'importance du caractère *uniforme* de la majoration $|u_m - u_n| \leqslant \varepsilon$.
- Comparer la démonstration qu'une suite de Cauchy est bornée, avec celle qu'une suite convergente est bornée.

★

- Comprendre pourquoi utiliser le théorème de Bolzano-Weierstraß est une idée *naturelle*, au vu des difficultés soulevées en introduction de ce cours et qu'on veut justement résoudre. Remarquer que vous l'aviez déjà utilisé en 1re année à des fins similaires.

☢ En s'inspirant de cette démonstration, se demander : une fois qu'on a démontré qu'une suite est bornée, et qu'elle admet donc des sous-suites convergentes, que lui manque-t-il pour montrer qu'elle converge ?

Exercice 4.

★ Le faire. Si vous parvenez à chaque fois à traduire le critère de Cauchy à l'aide du lien suite-série, vous pourrez vous dispenser plus facilement de cette notion hors programme.

Corollaire 6 (La convergence absolue implique la convergence)**.**

✓

- Dans plusieurs démonstrations sur les suites de Cauchy, je préfère écrire $|u_m - u_n| \leqslant \varepsilon$. Ici, j'ai préféré raisonner avec $|S_{n+p} - S_n|$. Pourquoi ? Est-ce arbitraire ? Sous quelle condition remplacer m par $n+p$ est plus avantageux ?
- Comparer avec la démonstration de l'année dernière. Quels sont les avantages et défauts de chaque démonstration ? Laquelle est la plus naturelle, c'est-à-dire la plus proche de ce que vous auriez naïvement essayé ?
- Noter ici et ailleurs un schéma récurrent, lorsqu'on montre un résultat du type « $\bigstar$ converge $\Longrightarrow$ $\clubsuit$ converge » : on montre que $\clubsuit$ est de Cauchy en utilisant le fait que $\bigstar$ le soit en tant que suite convergente.

★ Vérifier que, peu importe la démonstration de ce corollaire, elle dépend toujours d'une propriété *centrale* de $\mathbb{R}$ que n'a pas $\mathbb{Q}$. Faire le lien avec la caractérisation à isomorphisme près de $\mathbb{R}$ (que vous avez sans doute vue en 1re année) et la remarque culturelle du cours.

Exercice 5.

★ Faire l'exercice. Deux intérêts : 1° c'est un autre exemple où l'on voit que le lien suite-série et les suites de Cauchy sont intimement liés, 2° on verra d'autres espaces que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ où la convergence absolue implique la convergence (non trivialement). Ainsi on en déduira que dans ces mêmes espaces, les suites de Cauchy convergent (et donc tout ce qu'on a démontré grâce à elles dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ reste valable dans ces autres espaces).

Après votre révision de cette partie

Connaître par cœur les trois résultats classiques de cette partie : l'existence de la constante d'Euler, le théorème du point fixe de Banach-Picard, la convergence des suites de Cauchy. Soit on les réutilisera, soit leur schéma de démonstration nous inspirera en d'autres contextes. Retenir la philosophie du lien suite-série et des suites de Cauchy.

Lecture conseillée. *Méthodes*, *Étudier des suites en passant par des séries télescopiques.* Il est inutile de tout lire.

1.2 Convergence des suites de fonctions

Motivation de cette partie

Une préoccupation majeure de l'analyse de 2e année est de savoir si les opérations classiques de l'analyse (dérivation, intégration, etc.) peuvent passer à la limite « comme on pense ». Ou, de manière presque équivalente : si les propriétés d'une fonction dépendant d'une variable n se conservent par passage à la limite quand $n \to +\infty$. Mais pour cela, encore faut-il comprendre ce qu'est un passage à la limite pour des suites de *fonctions*, et c'est l'objet de cette section.

Avec les notions de norme infinie et de convergence *uniforme*, nous donnons un sens précis à l'idée qu'une fonction soit proche d'une autre, et qu'une fonction soit la limite d'autres fonctions quand $n \to +\infty$, en partant d'une interprétation visuelle en termes de graphes. Nous illustrons que c'est une « bonne » notion de convergence, au sens où elle préserve des propriétés par passage à la limite, en donnant l'exemple de la continuité. Nous donnons des moyens *pratiques* de démontrer une telle convergence, grâce à ce qu'on appelle la convergence *simple*.

Définition 7 (Suite de fonctions)**.**

Définition 8 (Convergence simple)**.**

✓ S'il y a convergence simple sur I, y a-t-il convergence simple sur tout sous-intervalle de I ? Et réciproquement, s'il y a convergence simple sur tout sous-intervalle strict de I, y a-t-il convergence simple sur I ?

Définition 9 (Norme infinie d'une fonction)**.**

✓

- Calculer la norme infinie de fonctions usuelles, en faisant varier l'intervalle I (prendre des segments, des intervalles non bornés, etc.). Fabriquer un exemple de fonction définie à l'aide d'un quotient.
- Les normes infinies nécessitent parfois d'être à l'aise dans les calculs d'extremums. Si vous avez besoin d'entraînement, reprenez des études de variation de 1re année, et déduisez-en à chaque fois la norme infinie de la fonction étudiée (ou du moins une majoration ou minoration de cette norme).

★

- Propriétés $(*)$ et $(\dagger)$: voir comment elles permettent de montrer rigoureusement que la norme infinie de $x \mapsto x(1-x)$ et $x \mapsto 1 - e^{-x}$ (sur $[0,1]$ et $\mathbb{R}_+$) sont respectivement $\frac{1}{4}$ et 1 (prendre M égal au maximum dans $(\dagger)$, puis faire de bons choix de x dans $(*)$ pour avoir une inégalité dans les deux sens, puis l'égalité).
- Et s'il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $|f(x_n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$, qu'est-ce que cela implique entre M et $\|f\|_\infty$?

Proposition 10 (La norme infinie est une norme)**.**

✓ Se demander si la norme infinie vérifie d'autres propriétés analogues à celles de la valeur absolue : a-t-on l'inégalité triangulaire renversée ? A-t-on $\|fg\|_\infty = \|f\|_\infty \|g\|_\infty$? A-t-on une condition nécessaire et suffisante simple pour que l'égalité $\|f + g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ soit vraie ?

★ La démonstration de l'égalité $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$ peut paraître tortueuse. Se convaincre que, au vu des propriétés $(*)$ et $(\dagger)$ qui définissent une borne supérieure, toute égalité entre normes infinies doit passer par une telle contorsion. Cette réflexion vous poursuivra dès qu'un objet sera défini comme une borne supérieure ou inférieure, comme un plus grand ou plus petit élément (pgcd, ppcm, adhérence et intérieur d'une partie, somme d'une famille sommable, ordre d'un élément, sous-groupe engendré par une partie, distance à une partie... les exemples ne manqueront pas).

Définition 11 (Convergence uniforme)**.**

✓

— Observer que $\|f_n - f\|_\infty$ ne peut pas dépendre d'une des variables (n ou x, laquelle ?), systématiquement. Se convaincre que le contraire serait anormal, étant donné le sens intuitif de la norme infinie. *C'est très important.*

— Se convaincre que s'il y a convergence uniforme sur un intervalle I, il y a convergence uniforme sur tout intervalle J strictement inclus dans I. La réciproque est-elle vraie ?

★

— Réfléchir à quelques propriétés basiques de la convergence uniforme : si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et $(g_n)_{n\geqslant 0}$ convergent uniformément sur I, est-ce que $(f_n+g_n)_{n\geqslant 0}$ et $(f_n \cdot g_n)_{n\geqslant 0}$ aussi ? Et $\left(\frac{1}{f_n}\right)_{n\geqslant 0}$ (lorsque ce quotient existe) ?

— Si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément, est-ce que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée (au sens où il existerait $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant M$) ? Penser à d'autres propriétés des suites réelles ou complexes qui pourraient éventuellement se généraliser ici (si une suite converge, toutes ses suites extraites convergent vers la même limite, etc.).

Proposition 12 (La convergence uniforme implique la convergence simple)**.**

✓

— J'affirme que si on enlève « vers f » de la proposition (pour seulement écrire : « si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément, alors elle converge simplement »), alors cette proposition est presque sans intérêt. Pourquoi ?

— **Lecture obligatoire** : *Méthodes*, *Convergence uniforme d'une suite de fonctions*. Comparer notamment la remarque sur les suites de fonctions qui ne convergent pas uniformément, avec l'observation de la section *Cas particulier fréquent : une fonction « puissance × polynôme en n »*.

★ Écrire en termes epsilonesques la définition de la convergence simple afin de comprendre la différence avec la convergence uniforme. En déduire ce qui empêche moralement la réciproque de cette proposition d'être vraie.

Proposition 13 (Convergence uniforme d'une suite de Cauchy de fonctions)**.**

★

— Reprendre quelques exercices et propositions démontrés avec les suites de Cauchy réelles ou complexes, avec le lien suite-série. Essayer de regarder quels résultats analogues on obtient en les adaptant au contexte des suites de fonctions. L'un d'entre eux sera très important pour démontrer le théorème de Cauchy linéaire sur les équations différentielles.

— Reprendre ici l'observation déjà faite pour le corollaire 6, sur les résultats du type « ★ converge $\Longrightarrow$ ♣ converge ». Cette démonstration permet une observation proche : laquelle ?

Proposition 14 (La convergence uniforme préserve la continuité en un point)**.**

✓ Chercher à comprendre pourquoi on « pouvait penser » à la majoration de $|f(x) - f(a)|$ par les trois termes de la démonstration, en traduisant qualitativement les hypothèses de l'énoncé. Se demander ensuite pourquoi on prend $n = N$ en fin de démonstration : qu'est-ce qui serait faux si l'on gardait un $n \geqslant N$ arbitraire ?

★

— Pourquoi la démonstration effectuée ne marcherait pas pour montrer que la convergence simple préserve la continuité ? Il semble à première vue qu'on puisse pourtant faire la même chose (comme $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ et $f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$, la différence est inférieure à ε au-delà d'un certain rang). Comprendre cela, c'est plus généralement comprendre l'utilité des majorations *uniformes* partout en analyse.

— On a commencé par majorer $|f_n(x) - f(x)|$ et $|f_n(a) - f(a)|$, et *ensuite* on a majoré $|f_N(x) - f_N(a)|$. Pouvait-on procéder dans l'ordre contraire ?

— À l'inverse, est-ce qu'une suite de fonctions discontinues en un point peut converger uniformément vers une fonction continue en ce point ?

Corollaire 15 (La convergence uniforme préserve la continuité sur un intervalle)**.**

✓

— Jusqu'à présent (et en particulier en 1re année), cette idée de vérifier une hypothèse sur tout segment d'un intervalle (au lieu de l'intervalle entier) n'est jamais apparue. Elle sera fréquente cette année. Pourquoi ?

— Pourquoi vérifier la convergence uniforme sur tout segment ? L'énoncé aurait-il été aussi vrai en remplaçant « segment » par « voisinage » ? par « intervalle borné » (qu'il soit fermé ou non) ? Si oui, alors pourquoi le segment a-t-il ma préférence ?

— Est-ce que « convergence uniforme sur tout segment de I » équivaut à « convergence uniforme sur I » ? C'est TRÈS important. Se poser la même question pour la convergence simple. Dans le même ordre d'idée : s'il y a convergence uniforme sur $[a, b]$ et $[b, c]$, y a-t-il convergence uniforme sur $[a, c]$?

★

Se poser la question de la préservation des propriétés dans un cadre plus général : si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement (ou uniformément) vers une fonction f et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n vérifie une propriété $\mathcal{P}$, est-ce que f vérifie $\mathcal{P}$? Se la poser pour différentes propriétés : le signe, la monotonie, la stricte monotonie, le caractère borné, la convexité, la stricte convexité, l'uniforme continuité, le caractère lipschitzien, le fait d'être linéaire ou affine, en escalier, etc. D'abord pour la convergence simple (où c'est plus facile à trancher), puis la convergence uniforme si c'est faux pour la convergence simple. Parfois la réponse dépend de l'intervalle (segment ou non), ou du quantificateur existentiel de la propriété (la constante qui majore dans le cas borné, la constante de Lipschitz dans le cas lipschitzien, etc.). Il faudra prendre le temps de se poser la question à TOUTE NOUVELLE NOTION cette année.
En début d'année vous manquerez peut-être trop d'expérience pour répondre à ces différentes questions : vous pourrez les reprendre après avoir vu quelques exemples.

On peut se poser la question inverse : si f vérifie $\mathcal{P}$, est-ce que f_n vérifie $\mathcal{P}$ au moins pour tout n assez grand ?

Après votre révision de cette partie

1. **Lecture conseillée.** *L'art de majoration.* Ce document répertorie des erreurs trop fréquentes, et donne des méthodes de majoration qui serviront beaucoup par la suite.
2. Essayer les exercices des *Savoir-faire à vérifier*, page 7.
3. Méditer sur l'importance du caractère uniforme des majorations, que ce soit pour la convergence uniforme des suites de fonctions ou la définition des suites de Cauchy, et pourquoi c'est ce qui fait tout marcher.

2 Savoir-faire à vérifier

Les principaux acquis à vérifier sont :

Lien suite-série, suites de Cauchy.

★ 1. Montrer qu'une suite converge en montrant qu'elle est de Cauchy ou en utilisant le lien suite-série. ☐

Convergence des suites de fonctions.

✓ 1. Étudier la convergence simple ou uniforme d'une suite de fonctions explicite. (🗎) ☐

★ 2. Montrer une implication du type : « $(\spadesuit)_n$ CVU $\Longrightarrow (\clubsuit)_n$ CVU ». ☐

☢ 3. Montrer une implication du type : « $(\clubsuit)_n$ CVS + Hypothèse $\Longrightarrow (\clubsuit)_n$ CVU ». (🗎) ☐

L'icône « (🗎) » signifie que les documents *Méthodes* donnent des compléments sur ces savoir-faire.

Lien suite-série, suites de Cauchy

★ Montrer qu'une suite converge en montrant qu'elle est de Cauchy ou en utilisant le lien suite-série.

Exemples.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. Soit f une application uniformément continue sur $]a, b]$. Montrer que f se prolonge par continuité en a.
2. Démontrer qu'il existe un réel γ_1 tel que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{(\ln(n))^2}{2} + \gamma_1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
3. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues sur un segment $I = [a, b]$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $x \in I$, on a : $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{|f_n(x) - f_{n-1}(x)|}{2}$. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I.

Convergence des suites de fonctions

✓ Étudier la convergence simple ou uniforme d'une suite de fonctions explicite.

Exemples. Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions dont les termes généraux sont définis ci-dessous ; d'abord sur tout l'intervalle de définition, puis sur des segments inclus dedans dans le cas où il n'y a pas convergence uniforme sur tout l'intervalle :

(a) $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{n(1+x^n)} \end{cases}$, (b) $g_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-nx}\sin(nx) \end{cases}$, (c) $h_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n\dfrac{x+n^2}{1+n^3x} \end{cases}$

(d) $j_n : \begin{cases} [0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & nx^n \end{cases}$, (e) $k_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1+x^n}{\sqrt{x}+x^{2n}} \end{cases}$, (f) $\ell_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n\arctan\left(\dfrac{x}{n}\right) \end{cases}$.

★ Montrer une implication du type : « $(\spadesuit)_n$ CVU $\Longrightarrow$ $(\clubsuit)_n$ CVU ».

Exemples. La notation I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. De même pour J.

1. Soient $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et $(g_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de fonctions définies sur I, et convergeant uniformément sur I vers deux fonctions bornées, notées f et g respectivement. Montrer que $(f_n g_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers fg.
2. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur I. Soit $g : J \to I$ une application. Montrer que $(f_n \circ g)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur J.
3. Soit $(f_n : I \to \mathbb{R})_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur I. Montrer que $\left(\dfrac{f_n}{1+f_n^2}\right)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I.

☢ Montrer une implication du type : « $(\clubsuit)_n$ CVS + Hypothèse $\Longrightarrow$ $(\clubsuit)_n$ CVU ».

Exemples.

1. Soit $(f_n : I \to \mathbb{R})_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de même monotonie, qui converge simplement sur un *segment* I vers une fonction constante. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I.
2. Soit $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On pose : $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\left(x \mapsto e^{ixk}\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}\right)$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions à valeurs dans E, qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

Lien suite-série, suites de Cauchy

> ★ Montrer qu'une suite converge en montrant qu'elle est de Cauchy ou en utilisant le lien suite-série. □

Réponse.

1. Pour montrer que f admet une limite finie en a, il suffit de montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ convergeant vers a, la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers une même limite ℓ. On passe par la caractérisation séquentielle afin de pouvoir utiliser les suites de Cauchy. C'est-à-dire : montrons que pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ convergeant vers a, la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy. Pour ce faire, nous devons savoir majorer $|f(u_m) - f(u_n)|$: c'est l'uniforme continuité qui le permet.

   Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur $]a,b]$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in]a,b]^2$ vérifiant : $|x-y| \leqslant \eta$, on ait : $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Or, si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite à valeurs dans $]a,b]$ convergeant vers a, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, on ait : $|u_n - a| \leqslant \frac{\eta}{2}$. Pour tous entiers $m, n \geqslant N$, on a donc : $|u_m - u_n| \leqslant |u_m - a| + |a - u_n| \leqslant \eta$. Par ce qui précède, pour tous entiers $m, n \geqslant N$ on a : $|f(u_m) - f(u_n)| \leqslant \varepsilon$. Ceci montre que $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy, donc convergente (cette étape est à savoir redémontrer, puisque les suites de Cauchy ne sont pas au programme).

   Ceci vaut pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ convergeant vers a. Montrons que la limite ne dépend pas de la suite choisie. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ une autre suite convergeant vers a. Alors, pour tout n suffisamment grand on a : $|u_n - v_n| \leqslant \eta$ (nous vous laissons quantifier correctement cette étape), ce qui permet d'écrire : $0 \leqslant |f(u_n) - f(v_n)| \leqslant \varepsilon$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(u_n) - f(v_n)) = 0$. Ceci assure que $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ et $(f(v_n))_{n\geqslant 0}$, dont on sait déjà qu'elles convergent, ont la même limite ℓ. Ainsi, par caractérisation séquentielle, f admet une limite (finie) en a : d'où le prolongement par continuité en a.

2. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{(\ln(n))^2}{2}$. Ce qui est demandé revient à démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge, et il est plus simple pour cela de passer par la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$, puisque $u_{n+1} - u_n$ ne fait plus intervenir de somme :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}\left((\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2\right)\\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(n(n+1))\\
&= \ln(n+1)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(n)\\
&= \left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(n)\\
&= \left(\ln(n) + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\ln(n)\\
&= \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

   Or le théorème des croissances comparées permet de démontrer : $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. On en déduit, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ converge, et toujours par comparaison que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument donc converge. Par le lien suite-série, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel γ_1 : d'où le résultat.

3. Une récurrence facile implique : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{|f_1(x) - f_0(x)|}{2^n}$. Comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{2^n}$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (f_{n+1}(x) - f_n(x))$ converge absolument donc converge par

comparaison de séries à termes positifs. Par le lien suite-série, la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers un réel qu'on note $f(x)$. Montrons que la convergence de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vers f est uniforme. Toujours par le lien suite-série, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ f(x) - f_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$. Grâce à l'inégalité triangulaire et la majoration ci-dessus, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f(x)-f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}|f_1(x)-f_0(x)|$. Comme $f_1 - f_0$ est continue sur I qui est un segment, cette fonction est bornée en valeur absolue par une constante M d'après le théorème des bornes atteintes, et donc finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, \|f - f_n\|_\infty \leqslant \frac{M}{2^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Le théorème des gendarmes implique que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers f.
Remarque. On peut aussi montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy au sens de la norme infinie, en montrant : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{M}{2^k} = \frac{M}{2^{n-1}}$.

Convergence des suites de fonctions

✓ Étudier la convergence simple ou uniforme d'une suite de fonctions explicite. □

Réponse.
(a) Suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$. On étudie d'abord la convergence simple. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Si $x \in [0,1[$ alors $x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc : $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $x = 1$ alors $f_n(1) = \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $x > 1$ alors $x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc :

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{nx^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{nx^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On constate donc que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f = 0$. Une étude de variations démontre alors que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = \left|(f_n - f)\left((n-1)^{-\frac{1}{n}}\right)\right| = \frac{(n-1)^{-\frac{1}{n}}}{n\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\exp\left(-\frac{\ln(n-1)}{n}\right)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(pour ce passage à la limite, on utilise le fait que $\frac{\ln(n-1)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées). Ainsi $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $f = 0$.

(b) Suite $(g_n)_{n\geqslant 0}$. On étudie d'abord la convergence simple. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Si $x = 0$ alors on a immédiatement : $g_n(0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $x > 0$, alors : $0 \leqslant |g_n(x)| \leqslant e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$. On en déduit que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $g = 0$. Pour tout entier n non nul, on a :

$$\|g_n - g\|_\infty \geqslant \left|g_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| = e^{-\frac{\pi}{2}} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0,$$

donc $(g_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $g = 0$.

Regardons à présent s'il y a convergence uniforme sur les segments : soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+$. Si $a = 0$, alors $\frac{\pi}{2n} \in [a,b] = [0,b]$ pour tout n assez grand (puisque $\frac{\pi}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$), et dans ce cas on peut reprendre le raisonnement ci-dessus pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[a,b]$. Si $a > 0$, par contre, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], |g_n(x) - g(x)| = e^{-nx}|\sin(nx)| \leqslant e^{-na}$. Par propriété de la borne supérieure : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \|g_n - g\|_\infty \leqslant e^{-na} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g_n - g\|_\infty = 0$. On en déduit que $(g_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment n'ayant pas 0 pour extrémité.

À noter que cette idée de distinguer $a = 0$ et $a > 0$ ne vient pas de nulle part : tracer g_n pour différentes valeurs de n, pour se rendre compte que la « bosse glissante », qui empêche la convergence uniforme, se rapproche indéfiniment de 0. C'est donc le point qui pose problème.

(c) Suite $(h_n)_{n\geqslant 0}$. On étudie d'abord la convergence simple. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$h_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \cdot \frac{n^2}{n^3 x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}.$$

On en déduit que $(h_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction inverse $h : x \mapsto \frac{1}{x}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$|h_n(x) - h(x)| = \left| n\frac{x+n^2}{1+n^3x} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{nx(x+n^2) - (1+n^3x)}{(1+n^3x)x} \right| = \left| \frac{nx^2-1}{(1+n^3x)x} \right|.$$

On voit alors qu'en prenant $x = \frac{1}{n^3}$, on obtient, pour tout entier $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$\left| h_n\left(\frac{1}{n^3}\right) - h\left(\frac{1}{n^3}\right) \right| = \frac{n^3}{2}\left(1 - \frac{1}{n^5}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$; sinon, il y aurait : $\|h_n - h\|_\infty \geqslant \left| h_n\left(\frac{1}{n^3}\right) - h\left(\frac{1}{n^3}\right) \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui contredirait le fait que $\|h_n - h\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On peut aussi trouver le maximum par une étude de variations. Il est atteint en $x = \frac{\sqrt{n^6-n}-n^3}{n}$ (pour $n \geqslant 1$), et on a alors pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\|h_n - h\|_\infty = \frac{2n}{n^3 - \sqrt{n^6-n}} = \frac{2n}{n^3\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n^5}}\right)} = \frac{2}{n^2} \times \frac{1}{\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{2n^5} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2 \times \frac{1}{2n^5}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4n^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

et on conclut la même chose.

Regardons s'il y a convergence uniforme sur les segments : soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $x \in [a,b]$ et tout entier n suffisamment grand (pour que $nx^2 - 1 > 0$), on a :

$$|h_n(x) - h(x)| = \frac{nx^2-1}{(1+n^3x)x} \leqslant \frac{nb^2-1}{(1+n^3a)a}.$$

Par propriété de la borne supérieure, pour tout n au voisinage de $+\infty$ on a : $0 \leqslant \|h_n - h\|_\infty \leqslant \frac{nb^2-1}{(1+n^3a)a}$. Or :

$$\frac{nb^2-1}{(1+n^3a)a} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nb^2}{n^3a^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \cdot \frac{b^2}{a^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|h_n - h\|_\infty = 0$. Ainsi $(h_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ pour tout $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+^*$.

(d) Suite $(j_n)_{n\geqslant 0}$. Le théorème des croissances comparées permet de démontrer que $(j_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction nulle $j = 0$. Pour la convergence uniforme, notons qu'on est en présence de fonctions de la forme « polynôme en n × fonction puissance ». Nous avons expliqué dans *Méthodes* pourquoi en général il n'y a pas convergence uniforme dans ce cas, en donnant une piste pour le démontrer. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a $1 - \frac{1}{n} \in [0,1[$, et :

$$\|j_n - j\|_\infty \geqslant \left| j_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

puisqu'il est classique de démontrer que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$. On n'a donc pas convergence uniforme sur $[0,1[$. En revanche il y a convergence uniforme sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $[0,1[$, en utilisant le fait que par croissances comparées : $\|j_n - j\|_\infty = \|j_n\|_\infty = nb^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque. À partir du chapitre VII, le théorème de la double limite permettra en deux lignes de contredire la convergence uniforme dans ce genre d'exemple, puisque : $\lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{n\to+\infty} j_n(x) \neq \lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to 1} j_n(x)$ (ceci équivaut à $0 \neq +\infty$).

(e) Suite $(k_n)_{n\geqslant 0}$. On étudie d'abord la convergence simple. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Si $x \in]0,1[$, alors $(x^n)_{n\geqslant 0}$ et $(x^{2n})_{n\geqslant 0}$ convergent vers 0, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Si $x=1$, alors trivialement : $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(x) = 1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$. Si $x>1$, alors : $k_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{x^{2n}} = \frac{1}{x^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En conclusion, $(k_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers :

$$k : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0,1], \\ 0 & \text{si } x \in]1,+\infty[. \end{cases} \end{cases}$$

Comme k n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (discontinuité en 1) alors que k_n l'est pour tout $n\in\mathbb{N}$, la convergence ne peut pas être uniforme. Par le même argument, $(k_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ dont l'intérieur contient 1. Si le segment est de la forme $[a,1]$ avec $a<1$, on a toujours un problème de convergence uniforme mais la contradiction est plus subtile. On a en effet, en imitant un calcul fait pour l'exemple (d) ci-dessus :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \|k_n - k\|_{\infty,[a,1]} \geqslant \left| k_n\left(1-\frac{1}{n}\right) - k\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-1}+e^{-2}}{1+e^{-2}} > 0.$$

Prenons à présent $[a,b] \subseteq]0,1[$. Pour tout $x\in[a,b]$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$|k_n(x)-k(x)| = \frac{x^{n-1}\left(x^{\frac{1}{2}} - x^n\right)}{1+x^{2n-1/2}} \leqslant b^{n-1/2},$$

donc : $\|k_n - k\|_{\infty,[a,b]} \leqslant b^{n-1/2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: on en déduit qu'il y a convergence uniforme sur $[a,b]\subseteq]0,1[$.

Enfin, si $[a,b] \subseteq]1,+\infty[$, on a pour tout $x\in[a,b]$ et tout $n\in\mathbb{N}$: $|k_n(x)-k(x)| = \frac{1+x^n}{\sqrt{x}+x^{2n}} \leqslant \frac{2x^n}{x^{2n}} = \frac{1}{x^n} \leqslant \frac{1}{a^n}$, ce qui donne un majorant de la norme infinie qui converge vers 0. Il y a donc convergence uniforme sur tout segment $[a,b]\subseteq]1,+\infty[$ (et même sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a>1$).

(f) Suite $(\ell_n)_{n\geqslant 1}$. On étudie d'abord la convergence simple. Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Comme : $\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a : $\ell_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, donc $(\ell_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $\ell : x\mapsto x$. La convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ est fausse, puisque l'on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \|\ell_n - \ell\|_\infty \geqslant |\ell_n(n) - \ell(n)| = n\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

En revanche il y a convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+$. En effet, soit $[a,b]\subseteq\mathbb{R}_+$. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $x\in[a,b]$: $|\ell_n(x)-\ell(x)| = n\left|\arctan\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right|$. On reconnaît une « différence petite » entre une fonction et la partie régulière de son développement limité à l'ordre 1 : *L'art de la majoration* nous encourage à la majorer avec l'inégalité de Taylor-Lagrange. Comme la dérivée seconde de l'arc tangente est $x\mapsto -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, elle est majorée en valeur absolue par 1 par exemple, et on en déduit : $\forall u\in\mathbb{R}$, $|\arctan(u) - u| \leqslant u^2$. On en déduit :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall x\in[a,b], \quad |\ell_n(x)-\ell(x)| \leqslant n\cdot\frac{x^2}{2n^2} \leqslant \frac{b^2}{2n}.$$

On en déduit : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $0\leqslant \|\ell_n-\ell\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{b^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\ell_n - \ell\|_{\infty,[a,b]} = 0$. D'où le résultat : $(\ell_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]\subseteq\mathbb{R}_+$ vers ℓ.

★ Montrer une implication du type : « $(\spadesuit)_n$ CVU $\Longrightarrow$ $(\clubsuit)_n$ CVU ». □

Réponse.

1. On s'inspire de la démonstration, dans le cas réel ou complexe, du fait que si deux suites convergent alors leur produit aussi. Soit $x\in I$. On fait apparaître les quantités qu'on sait être proches, à savoir $f_n(x)-f(x)$ et $g_n(x)-g(x)$. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in I$:

$$\begin{aligned} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= |(f_n(x)-f(x)+f(x))g_n(x) - f(x)g(x)| \\ &= |(f_n(x)-f(x))g_n(x) + f(x)(g_n(x)-g(x))| \\ &\leqslant |f_n(x)-f(x)|\cdot|g_n(x)| + |f(x)|\cdot|g_n(x)-g(x)| \\ &\leqslant \|f_n-f\|_\infty\cdot|g_n(x)| + \|f\|_\infty\|g_n-g\|_\infty. \end{aligned}$$

Si l'on parvient à majorer $|g_n(x)|$ par une constante (ne dépendant pas de x ni n), c'est gagné. C'est là que l'hypothèse bornée sur g intervient. En effet, comme $(g_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers g, pour tout n suffisamment grand et pour tout $x \in I$ on a : $|g(x) - g_n(x)| \leqslant 1$. D'après l'inégalité triangulaire renversée, on en déduit, pour tout n assez grand : $\forall x \in I$, $|g_n(x)| \leqslant 1 + |g(x)| \leqslant 1 + \|g\|_\infty$. En résumé, pour tout n assez grand :

$$\forall x \in I, \quad 0 \leqslant |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leqslant (\|f_n - f\|_\infty \cdot (1 + \|g\|_\infty) + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty)\,.$$

Le majorant ne dépend pas de x. Par propriété de la borne supérieure, c'est donc aussi un majorant de la norme infinie de $f_n g_n - fg$, et on voit qu'il converge vers 0 puisque $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et $(g_n)_{n\geqslant 0}$ convergent uniformément vers f et g respectivement. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n g_n - fg\|_\infty = 0$, d'où le résultat.

2. Soit f la limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$. On a : $\forall x \in I$, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \|f - f_n\|_{\infty,I}$. Or pour tout $x \in J$ on a : $g(x) \in I$, donc : $\forall x \in J$, $|f(g(x)) - f_n(g(x))| \leqslant \|f - f_n\|_{\infty,I}$. Cette majoration étant indépendante de x, par propriété de la borne supérieure on a : $0 \leqslant \|f \circ g - f_n \circ g\|_{\infty,J} \leqslant \|f - f_n\|_{\infty,I}$. On en déduit aisément le résultat voulu grâce au théorème des gendarmes.

3. Lire *L'art de la majoration* permet de comprendre les majorations effectuées. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall x \in [0{,}1], \quad \left|\frac{f_n(x)}{1 + (f_n(x))^2} - \frac{f(x)}{1 + (f(x))^2}\right| = \left|\frac{f_n(x)\left(1 + (f(x))^2\right) - f(x)\left(1 + (f_n(x))^2\right)}{\left(1 + (f_n(x))^2\right)\left(1 + (f(x))^2\right)}\right|$$
$$= \frac{\left|f_n(x)\left(1 + (f(x))^2\right) - f(x)\left(1 + (f_n(x))^2\right)\right|}{\left(1 + (f_n(x))^2\right)\left(1 + (f(x))^2\right)}$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0{,}1]$, $\left(1 + (f_n(x))^2\right)\left(1 + (f(x))^2\right) \geqslant 1 \cdot 1 = 1$. Par passage à l'inverse :

$$\forall x \in [0{,}1], \quad \left|\frac{f_n(x)}{1 + (f_n(x))^2} - \frac{f(x)}{1 + (f(x))^2}\right| \leqslant \left|f_n(x)\left(1 + (f(x))^2\right) - f(x)\left(1 + (f_n(x))^2\right)\right|.$$

En développant, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0{,}1]$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f_n(x)}{1 + (f_n(x))^2} - \frac{f(x)}{1 + (f(x))^2}\right| &= \left|f_n(x) + f_n(x)(f(x))^2 - f(x) - f(x)(f_n(x))^2\right| \\
&= \left|f_n(x) - f(x) + f_n(x)(f(x))^2 - f(x)(f_n(x))^2\right| \\
&= |(f_n(x) - f(x)) + f_n(x)f(x)(f(x) - f_n(x))| \\
&= |(f_n(x) - f(x)) \cdot (1 - f(x)f_n(x))| \\
&= |f_n(x) - f(x)| \cdot |1 - f(x)f_n(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty \cdot |1 - f(x)f_n(x)| \\
&\leqslant \|f_n - f\|_\infty \cdot (1 + |f(x)| \cdot |f_n(x)|) \leqslant \|f_n - f\|_\infty \cdot (1 + \|f\|_\infty \cdot \|f_n\|_\infty)\,.
\end{aligned}$$

Comme $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f, on a pour tout n assez grand : $\|f_n\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty$ (argument analogue à celui utilisé dans la première question), et donc, pour tout n assez grand :

$$\forall x \in [0{,}1], \quad \left|\frac{f_n(x)}{1 + (f_n(x))^2} - \frac{f(x)}{1 + (f(x))^2}\right| \leqslant \|f_n - f\|_\infty \cdot \left(1 + 2(\|f\|_\infty)^2\right).$$

Par propriété de la borne supérieure, pour tout n assez grand :

$$0 \leqslant \left\|\frac{f_n}{1 + f_n^2} - \frac{f}{1 + f^2}\right\|_\infty \leqslant \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \cdot \left(1 + 2(\|f\|_\infty)^2\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et on conclut avec le théorème des gendarmes.

Remarque. On pourrait démontrer bien plus rapidement le résultat voulu grâce au fait que l'application $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ soit 1-lipschitzienne.

☢ Montrer une implication du type : « $(\clubsuit)_n$ CVS + Hypothèse $\Longrightarrow$ $(\clubsuit)_n$ CVU ». □

Réponse.

1. Notons $I = [\alpha, \beta]$, avec : $\alpha \leqslant \beta$. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur I vers $x \mapsto a$. Quitte à remplacer f_n par $f_n - a$ (ce qui n'affecte pas la monotonie), on peut supposer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle. Quitte à changer f_n en $-f_n$, supposons que f_n est décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il est facile de se convaincre que $|f_n|$ atteint son maximum en α ou en β (le montrer !). Or, par convergence simple vers la fonction nulle, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, on ait : $|f_n(\alpha)| \leqslant \varepsilon$, et : $|f_n(\beta)| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent : $\forall n \geqslant \max(N_1, N_2)$, $\forall x \in I$, $|f_n(x)| \leqslant \varepsilon$. Ceci démontre que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle.
   On retrouve cette idée récurrente que le passage de la convergence simple à la convergence uniforme est possible si l'on parvient à se ramener à un nombre fini de points (ici α et β).

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant p-1} \in \mathbb{C}^p$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_{n,k} e^{ixk}$. Si l'on parvient à montrer que : 1° f s'écrit aussi sous la forme $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k e^{ixk}$, 2° que $(a_{n,k})_{n\geqslant 0}$ converge vers a_k pour tout k, alors il est facile de se convaincre que la convergence uniforme en découlerait aussitôt (en majorant $f_n - f$ par $\sum\limits_{k=0}^{p-1} |a_{n,k} - a_k|$). En fait, nous allons démontrer 2° (la convergence de $(a_{n,k})_{n\geqslant 0}$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$), ce qui impliquera 1° puis la convergence uniforme.
   Pour cela, l'idée est d'exprimer $(a_{n,k})_{n\geqslant 0}$ en fonction de ce qu'on *sait* être convergent : $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ pour tout x. Nous y parviendrons après inversion du système $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_{n,k} e^{ixk}$, écrit pour suffisamment de valeurs de x (il en faut au moins p). Soient, donc, $x_0, \ldots, x_{p-1}$ des réels. Fixons $n \in \mathbb{N}$ provisoirement. Pour que le système : $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$, $f_n(x_i) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_{n,k} e^{ikx_i}$ soit résoluble, il suffit que la matrice $\left(\left(e^{ikx_i}\right)\right)_{0\leqslant i,k\leqslant p-1} = \left(\left(\left(e^{ix_i}\right)^k\right)\right)_{0\leqslant i,k\leqslant p-1} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ soit inversible : comme c'est une matrice de Vandermonde, il suffit pour cela de prendre les x_i tous distincts modulo 2π (ce qui est évidemment possible vu que $]0{,}2\pi[$ est un ensemble infini), afin que les e^{ix_i} soient distincts également.
   Faisons un tel choix de x_i. Le système précédent est donc inversible, et les formules de Cramer impliquent que pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $a_{n,k}$ s'écrit exclusivement comme somme, produit et quotient des $f_n(x_i)$, qui ont tous une limite quand $n \to +\infty$. Par opération sur les limites, $(a_{n,k})_{n\geqslant 0}$ converge pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, vers un complexe qu'on note a_k. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_{n,k} e^{ixk}$, la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vers f implique : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k e^{ixk}$.
   On a démontré les points 1° et 2° annoncés plus haut ; on conclut en écrivant :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} |a_{n,k} - a_k|,$$
   de sorte que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \|f_n - f\|_\infty \leqslant \sum\limits_{k=0}^{p-1} |a_{n,k} - a_k|$. Le majorant tend vers 0 d'après ce qui précède, donc par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. D'où le résultat : $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

3 Feuilles d'exercices

3.1 Indications et commentaires

L'icône « (🗎) » indique que les documents *Méthodes* donnent des conseils plus généraux.

Lien suite-série et suites de Cauchy

Exercice 1. (🗎) Montrer que la suite des sommes partielles n'est pas une suite de Cauchy, en minorant $\sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{\sigma(n)}{n^2}$. D'abord minorer trivialement $\dfrac{1}{n^2}$. Ensuite, utiliser le fait que les $\sigma(n)$ soient tous distincts et entiers pour minorer $\sum_{n=N}^{N+p} \sigma(n)$. Conclure par un bon choix de p.

> **Commentaires.** Quand le terme général d'une série contient une permutation de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, on ne peut minorer $\sigma(n)$ autrement que par 1 si l'on raisonne sur les sommes partielles, et en général cela ne nous enseigne rien. Raisonner sur une « tranche de Cauchy » (c'est le nom donné aux sommes de la forme $\sum_{n=N+1}^{N+p} u_n$) est le meilleur moyen d'avoir une minoration non triviale, profitant du fait que les termes $\sigma(n)$ ne peuvent pas tous être « petits ». Après avoir résolu l'exercice, on se demandera pourquoi la même méthode, mais appliquée à la somme $\sum_{n=1}^{N} u_n$, ne permet pas de conclure.

Exercice 2. (🗎) Utiliser le lien suite-série (comme dans le cours, dans l'exemple de la constante d'Euler), ou bien démontrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée grâce à une comparaison série-intégrale. Cette dernière méthode n'est cependant pas dans l'esprit de ce chapitre préliminaire.

> **Commentaires.** L'idée du lien suite-série ne sort pas de nulle part. On l'a dit dans le cours : c'est pertinent d'y recourir dans deux situations : 1° quand la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est inconnue (ou que son existence est déjà un problème en soi), 2° quand $u_{n+1} - u_n$ est plus simple à étudier que u_n. Et c'est le cas ici, puisque $u_{n+1} - u_n$ nous permet d'éliminer la somme dont le comportement asymptotique nous embarrasse.
> La comparaison série-intégrale, en revanche, est facile à motiver, dans la mesure où c'est un des meilleurs outils pour encadrer une somme non calculable. Elle nous ramène en effet à des intégrales, ce qu'on sait calculer plus souvent (grâce au théorème fondamental de l'analyse, entre autres).

Exercice 3. (Interpolation de la factorielle sur $\mathbb{R}_+^*$) (🗎)

1. La série $\sum_{n\geqslant 1} (f_{n+1}(x) - f_n(x))$ n'est pas spécialement agréable à étudier (rien ne se simplifie). En revanche, si l'on pose : $u_n(x) = \ln(f_n(x))$, la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} (u_{n+1}(x) - u_n(x))$ est très simple à obtenir par les méthodes classiques.
2. Exprimer $f_n(x+1)$ en fonction de $f_n(x)$ et prendre $n \to +\infty$. Par récurrence, on en déduit $f(n) = n!$.

> **Commentaires.** Le lien suite-série est pertinent notamment quand le comportement asymptotique de $u_{n+1} - u_n$ est plus simple à étudier que celui de u_n. C'est ce qui motive cette approche dans l'exercice 2, parce que $u_{n+1} - u_n$ élimine la somme. En revanche, lorsque le terme général fait intervenir des produits, des factorielles, etc. : les simplifications n'apparaissent pas en étudiant $u_{n+1} - u_n$ mais plutôt $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ce qui nécessite d'utiliser la propriété de morphisme du logarithme (pour qu'une différence s'écrive comme un quotient). D'où l'idée de la première question, qui n'est plus si saugrenue.

Exercice 4. (Convergence d'un produit)

1. S'inspirer de la démonstration que si une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors son terme général converge vers 0.
2. La première inégalité découle d'une récurrence sur N_2, et la seconde de la convexité de l'exponentielle.
3. Montrer que la suite $\prod_{n\geqslant 0} (1+u_n)$ est de Cauchy grâce à la question précédente et au fait que $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ soit convergente. Noter que $e^\varepsilon - 1 = e^\varepsilon - e^0$ est une « différence petite » au sens de *L'art de la majoration*.

Commentaires. Lorsque j'ai motivé l'utilisation des suites de Cauchy pour les suites dont l'existence de la limite est déjà un problème en soi, cela désignait en particulier les sommes de série (lorsqu'on n'a pas de monotonie des sommes partielles). Puisque les sommes et les produits sont très proches (on passe de l'un à l'autre *via* l'exponentielle ou le logarithme ; d'où l'apparition de l'exponentielle dans la résolution de l'exercice), il n'y a rien d'étonnant qu'une observation faite dans un cas reste valable pour l'autre.

Exercice 5. (Critère de Cauchy) Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers a, montrer que $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ converge en vérifiant qu'elle est de Cauchy. Ne pas oublier de vérifier que si deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers a, alors $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ et $(f(v_n))_{n\geqslant 0}$ ont même limite (ce qui est plutôt facile grâce à l'hypothèse de l'énoncé).

Commentaires. L'idée pour traiter cet exercice est un lieu commun de l'analyse : quand on connaît un résultat sur les suites (ici : le fait que les suites de Cauchy convergent), on en déduit à peu de frais un résultat sur les fonctions *via* la caractérisation séquentielle de la limite. Ou, si cette caractérisation n'apparaît pas : toute propriété sur des fonctions quantifiées avec un $\varepsilon > 0$ universel induit une propriété séquentielle en remplaçant ε par $\frac{1}{n}$ (ou par $\frac{1}{2^n}$, ou par n, etc., cela dépend de ce qu'on veut). Cette idée apparaît partout dans votre cours de 1re année, et reviendra par exemple au moment d'étudier les intégrales à paramètres au chapitre I, les parties fermées et les parties denses au chapitre VI, etc. L'intérêt du critère de Cauchy démontré dans cet exercice est le même que pour les suites de Cauchy. C'est pratique en particulier lorsque nous n'avons pas d'information sur la limite candidate ℓ de $f(x)$, ou lorsque son existence est un problème en soi (ce qui nous empêche d'étudier $|\ell - f(x)|$). Vous pouvez en juger lors du traitement des exercices 6 et 8. Noter qu'un bon usage du lien suite-série permet de s'affranchir des suites de Cauchy (qui sont hors programme).

Exercice 6. (Le vrai théorème de la limite de la dérivée)

1. Comme f' admet une limite finie en a, elle est bornée à son voisinage. Conclure avec l'inégalité des accroissements finis.
2. Montrer que f vérifie le critère de Cauchy (exercice 5).
3. Utiliser la première question.
4. Simplifier le taux d'accroissement grâce à l'égalité des accroissements finis, et reconnaître une composition de limites.

Commentaires. Se convaincre que l'idée de vérifier le critère de Cauchy est naturelle, au vu de ce que j'en dis plus haut.

☢ **Exercice 7. (Nombre de rotation de Poincaré)**

1. Regarder pour $n = 0$ ce que doit vérifier k, et s'assurer que si k convient pour $n = 0$, il convient pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prendre l'image par f dans l'encadrement déduit du résultat pour $n = 0$, et utiliser la croissance de la fonction. Simplifier les extrémités de l'encadrement en notant que $f(x+\ell) = f(x)+\ell$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$. Diviser par n la majoration de l'énoncé pour en déduire que $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ et $(u_n(y))_{n\geqslant 0}$ ont même limite (si elles existent).
2. Encadrer $f^m(0)$ par deux entiers, et prendre l'image par f^m. Simplifier le résultat obtenu grâce à l'identité déjà mentionnée dans la question précédente.
3. Prendre $m = n$, et en déduire un encadrement de $f^{mn}(0)$ par récurrence. Il en résulte des majorations de $|u_{mn}(0)-u_n(0)|$ et de $|u_{mn}(0)-u_m(0)|$. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy. Obtenir l'encadrement de la limite demandé en passant à la limite dans une inégalité vérifiée par $|u_m(0) - u_1(0)|$.

Exercice 8. (Prolongement des fonctions uniformément continues)

1. Si g et h sont deux fonctions qui conviennent, montrer qu'elles sont égales sur tout élément de A, et en déduire par densité et passage à la limite qu'elles sont égales partout.
2. Montrer que $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy. Pour cela, démontrer que $|x_m - x_n| \leqslant \eta$ pour n et m assez grand, et utiliser l'uniforme continuité.
3. Vérifier que $|x_n - y_n| \leqslant \eta$ pour n assez grand, et conclure grâce à l'uniforme continuité.
   Remarque. Cette question et la précédente sont superflues si on utilise l'exercice 5.

4. Pour $g_{|A} = f$: prendre une suite constante à valeurs dans A. Pour l'uniforme continuité de g : majorer $|g(x)-g(y)|$ en approchant x et y par des suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans A, afin de se ramener (*via* l'inégalité triangulaire) à des évaluations de f en des éléments de A. Utiliser l'uniforme continuité de f d'une part, et le fait que $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n)$ (idem pour $g(y)$) d'autre part.

Commentaires. Vouloir poser $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ est une idée naturelle. Mais on n'a aucun moyen de connaître $g(x)$ de manière *a priori*. On est dans le cadre d'utilisation des suites de Cauchy : montrer l'existence d'une limite lorsque rien ne nous permet de la connaître et de la manipuler. Noter qu'un bon usage du lien suite-série permet de s'affranchir des suites de Cauchy (qui sont hors programme).
Cet exercice est très loin d'être anecdotique : on peut très bien remplacer l'espace de départ par un espace autrement plus compliqué, un espace de fonctions continues par morceaux par exemple, et A par une partie dense de cet espace de fonctions (on définira ce qu'est une partie dense en dehors de $\mathbb{R}$, lorsque nous serons au chapitre VI, mais vous avez déjà vu de tels exemples sans le savoir : vous avez vu en 1re année, au moment de définir l'intégrale d'une fonction, qu'on peut approcher toute fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier, et d'aussi près que l'on veut ; cela peut se reformuler en disant que l'espace des fonctions en escalier sur un segment est dense dans l'espace des fonctions continues par morceaux). On garde la définition de l'uniforme continuité rappelée dans l'énoncé de l'exercice. Le résultat de prolongement reste valable : on a seulement besoin que l'espace d'arrivée soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour y utiliser que les suites de Cauchy convergent.
Cet énoncé nous dit alors que, pour définir un opérateur en toute fonction, il suffit de le définir en toute fonction d'une partie plus simple et petite A, tant qu'elle est dense (et que l'opérateur est uniformément continu). C'est exactement ce que vous avez fait pour définir l'intégrale d'une fonction en 1re année ! D'abord vous la définissez pour des fonctions en escalier, où l'affaire est très simple puisque ce sont des somme d'aires de rectangle, et ensuite vous l'étendez par densité à toute fonction continue par morceaux. Que c'est commode ! Commode parce que le travail d'explicitation n'a été fait que pour des fonctions très simples à manipuler. Cela marche parce que l'application $f : g \mapsto \int_a^b g$ est $(b-a)$-lipschitzienne donc uniformément continue sur $\mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{R})$ (c'est-à-dire, on a : $\forall (g,g') \in \mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{R})^2$, $|f(g)-f(g')| \leqslant (b-a)\|g-g'\|_\infty$, par croissance de l'intégrale).

C'est exactement avec cette stratégie que le mathématicien définit la transformée de Fourier (et plein d'autres opérateurs) d'abord avec des fonctions qui l'arrangent bien, avant de l'étendre à toute fonction par densité.

Convergence des suites de fonctions : mise en pratique

✓ **Exercice 9. (🗎)** C'est standard. Plusieurs normes infinies peuvent s'étudier avec un tableau de variation. Dans les cas (b) et (d), l'étude de $f_n(x)-f(x)$ fait apparaître une « différence petite », ainsi que définie dans *L'art de la majoration*. Utile pour la majorer en vue d'obtenir la convergence uniforme sur les segments. Pour (c) : noter que c'est l'exponentielle décroissante qui fait tendre $f_n(x)$ vers 0 par croissances comparées. Penser aux conseils du document *Méthodes* sur la convergence uniforme des suites de fonctions. Pour (e) : remarquer que pour $nx \approx 1$, on a $f_n(x) \approx (\sin(1))^2$. Cela semble indiquer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,\pi[$. Rendre rigoureux cet argument par de bons choix de x tels que $nx \approx 1$. Pour (f) : la fonction est de la forme « polynôme en n × fonction puissance ». Il en question dans f_n le document *Méthodes* suscité.

Commentaires. Lors du traitement de cet exercice, on s'attardera sur les points suivants, qui vont beaucoup vous aider à traiter toutes les questions de convergence uniforme : 1° reconnaître les « différences petites », et voir comment on réagit à chaque fois qu'on en croise, 2° comprendre comment choisir les évaluations de $f_n - f$ qui permettent de contredire la convergence uniforme (une interprétation graphique étant souvent instructive), 3° noter que les cas où il n'y a pas convergence uniforme sont souvent de la forme « polynôme en n × fonction puissance », et j'en parle dans le document *Méthodes*.

Lorsque vous aurez vu le théorème de la double limite au chapitre VII, vous pourrez consulter cet exercice d'un œil nouveau.

✓ **Exercice 10. (🗎)** La convergence simple est classique. La convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ est contredite par un bon choix de x dépendant de n. Sur des segments : écrire que $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$ (c'est toujours une bonne idée quand on a une quantité de la forme $a_n^{b_n}$), et noter que la convergence uniforme revient à étudier une « différence petite » au sens de *L'art de la majoration*. On sait alors comment les majorer efficacement.

Remarque. La convergence uniforme peut également être contredite en raisonnant comme dans l'exercice 26. Il faut alors démontrer que la limite simple n'est pas polynomiale, en notant qu'elle vérifie une propriété qu'aucune application polynomiale ne peut vérifier.

> **Commentaires.** Lors du traitement de cet exercice, on s'attardera sur les points suivants, qui vont beaucoup vous aider à traiter toutes les questions de convergence uniforme : 1° reconnaître les « différences petites », et voir comment on réagit à chaque fois qu'on en croise, 2° comprendre comment choisir les évaluations de $f_n - f$ qui permettent de contredire la convergence uniforme (une interprétation graphique étant souvent instructive).

✓ **Exercice 11.** Dans les deux cas, remarquer que la limite simple n'est pas continue sur [0,1].

> **Commentaires.** Regarder la continuité de la fonction limite candidate, ou (lorsqu'il y a continuité) comparer ses limites aux extrémités avec les limites des fonctions f_n, permet parfois de conclure sans étude approfondie. À privilégier, pour minimiser les calculs ! C'est souvent le cas, en particulier, lorsqu'on est en présence de fonctions puissances.

Exercice 12. (Fonction discontinue en tout réel, obtenue à l'aide de limites simples de fonctions continues)

1. Vérifier que si $x \in \mathbb{Q}$ alors $|\cos(n!\pi x)| = 1$ pour tout n assez grand, tandis que $|\cos(n!\pi x)| < 1$ sinon.
2. Immédiat à partir de la question précédente.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Utiliser la densité des rationnels et des irrationnels dans $\mathbb{R}$ pour montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - a| < \eta$ et $|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) - \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a)| > \frac{1}{2}$.

Exercice 13. Les méthodes standards d'étude des suites récurrentes permettent de démontrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur [0,2] vers $x \mapsto 2$. Remarquer que $t \mapsto \sqrt{t+2}$ est k-lipschitzienne avec k très petit pour en déduire que $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant 2k^n$ pour tout x. Prendre $p \to +\infty$, et conclure (autre approche : majorer $|f_{n+1}(x) - f_n(x)|$, toujours grâce au caractère lipschitzien de $t \mapsto \sqrt{t+2}$, et utiliser une somme télescopique pour en déduire un majorant de $|f(x) - f_n(x)|$).

Cette stratégie est à comparer avec la démonstration du théorème de Banach-Picard dans le cours.

> **Commentaires.** L'étude des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ n'est pas singulièrement différente quand $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de fonctions, du moins dans le cas où f est contractante. La démonstration du théorème du point fixe de Banach-Picard est un modèle de raisonnement qui apparaît en de nombreux endroits des mathématiques, y compris quand on n'étudie pas des fonctions de la variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{R}$. À connaître par cœur !

Exercice 14. Les méthodes standards d'étude des suites récurrentes permettent de démontrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ vers $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{\left]0,\frac{1}{2}\right]}$. Noter que cette fonction n'est pas continue en 0 : qu'en déduit-on vis-à-vis de la convergence uniforme ?

✓ **Exercice 15.** C'est standard. Pour l'observation attendue : regarder la régularité de la limite f de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ en 0.

Convergence uniforme : fonctions abstraites

Exercice 16.

1. Montrer que $\|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{3}$ pour tout n assez grand et tout p, et conclure.
2. S'inspirer de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ pour produire des fonctions f_n vérifiant $f_n(x) \in \{0,1\}$ pour tous n et x, et dont la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ sans être stationnaire.

> **Commentaires.** Cet exercice donne une autre illustration des suites de Cauchy, lorsqu'on sait pourtant déjà qu'une suite converge : pour avoir un contrôle sur $|\ell - u_n|$ à l'aide d'un contrôle sur $|u_{n+p} - u_n|$. On l'utilise semblablement dans l'exercice 26, ou pour avoir l'estimation $|\ell - u_n| = \underset{n\to+\infty}{O}(k^n)$ dans la démonstration du théorème de Banach-Picard.

☢ **Exercice 17.** Utiliser l'hypothèse de l'énoncé pour montrer que $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant M|x - y|$ pour tous x, y et n. On en déduire que si x et y sont proches, alors $f_n(x)$ et $f_n(y)$ aussi. Or la continuité assure qu'il en est de même pour $f(x)$ et $f(y)$. Introduire une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ qui permet de se ramener systématiquement à la situation où $f_n(x)$ et $f_n(y)$ sont proches (ainsi que $f(x)$ et $f(y)$), afin d'en déduire que $f_n(x)$ et $f(x)$ sont également proches. Les y seront des points de la subdivision.

Si vous quantifiez les choses correctement, vous verrez que la continuité de f ne suffit pas pour que la proximité mentionnée ci-dessus soit *uniforme*. Réfléchir à la façon de régler ce problème, grâce à une donnée de l'énoncé non citée ci-dessus.

Commentaires. Lorsqu'un exercice nous dit que sous certaines hypothèses, l'implication « convergence simple $\Longrightarrow$ convergence uniforme » est correcte, cela part souvent du même principe : on utilise la convergence simple en un nombre FINI de points a_i, de sorte que $|f(a_i) - f_n(a_i)| \leqslant \varepsilon$ soit petit simultanément (i.e. pour tout i et pour tout n au-delà d'un rang commun à tous les indices i). Une hypothèse de l'énoncé nous assure alors qu'entre deux a_i et a_{i+1}, la différence reste « petite ». Voir les exercices 23 et 24. On peut trouver d'autres hypothèses (voir les exercices 27, 28 et 29), mais le principe reste le même (se ramener à la convergence simple en un nombre fini de points). Il en est question dans *Méthodes*, section *Montrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions abstraite*.

Notons enfin le rôle du segment dans tous ces exercices. C'est lui qui permet de se ramener à un nombre fini de points. C'est une idée importante qui réapparaîtra lorsque nous manipulerons des ensembles *compacts* (et c'est ce qui fait une grande partie de leur intérêt).

Exercice 18.

1. Immédiat si l'on démontre que le cosinus est lipschitzien grâce à l'inégalité des accroissements finis.
2. Écrire la définition de l'uniforme continuité de g, et s'assurer que $|f_n(x) - f(x)|$ est inférieur au module d'uniforme continuité η pour n assez grand (et, surtout, pour tout x).
3. Les fonctions puissances fournissent les exemples de fonctions continues les plus problématiques dans les questions d'uniformité.

Commentaires. L'étude de $|g \circ f_n(x) - g \circ f(x)|$, avec $(f_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge uniformément vers f, nous met en présence d'une « différence petite » au sens de *L'art de la majoration*. Lorsque nous ne pouvons pas utiliser l'inégalité des accroissements finis, ni une formule de Taylor (ici il n'y a pas de dérivabilité *a priori*), ce sont les hypothèses d'uniforme continuité ou de caractère lipschitzien (parfois aussi la convexité) qui les remplacent au mieux.

Exercice 19.

1. Les hypothèses assurent que $|f_n(x) - f(x)|$ (pour tout x) et $|f(\spadesuit) - f(\clubsuit)|$ (pour $\spadesuit$ et $\clubsuit$ proches) sont petits. Majorer $|f_n(f_n(x)) - f(f(x))|$ en fonction de telles quantités grâce à l'inégalité triangulaire.

   Pour un contre-exemple à la convergence uniforme : prendre une fonction f_n (très simple) dont la croissance est suffisamment importante. C'est ce qui assure que $f_n(f_n(\bigstar))$ et $f(f(\bigstar))$ puissent être éloignés bien que $f_n(\bigstar)$ et $f(\bigstar)$ soient proches.
2. Reprendre les majorations de la question précédente, en utilisant le fait que f soit uniformément continue pour majorer $|f(\spadesuit) - f(\clubsuit)|$ plus efficacement.
3. Prendre pour f_n des fonctions indicatrices convenables.

Exercice 20. Écrire en termes epsilonesques le fait que f tende vers 0 en l'infini et que f soit continue en 0. Pour x « grand », majorer $|f(nx)|$ grâce à cette traduction ; pour x « petit », majorer $\left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right|$ de même. Remarquer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$: cela permet de majorer à chaque fois le facteur non considéré.

Vous aurez à réfléchir sur le rang N au-delà duquel, pour $n \geqslant N$, on a $|g(x)| \leqslant \varepsilon$ (indépendamment de x). Il doit être choisi de sorte que, si x n'est pas suffisamment petit pour qu'on puisse majorer $\left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right|$ par un facteur epsilonesque, alors nx est suffisamment grand pour que $|f(nx)|$ soit epsilonesque. Ne pas perdre de vue que si N dépend de x, alors la convergence ne peut être uniforme.

Exercice 21.

1. Les hypothèses assurent que $|f_n(\bigstar) - f(\bigstar)|$ est petit pour n assez grand, ainsi que $|u_n - \ell|$ (et donc $|f(u_n) - f(\ell)|$ aussi par continuité). Exprimer $|f_n(u_n) - f(\ell)|$ à l'aide de telles quantités.
2. Prendre $f_n : x \mapsto x^n$ et une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ bien choisie convergeant vers le réel problématique 1.
3. L'existence de x_n provient du théorème des valeurs intermédiaires. Si l'on note f_n l'application $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$, noter que $f_{n+1} \geqslant f_n$ pour en déduire que $f_n(x_n) = 1$ implique $f_n(x_{n+1}) \leqslant 1$ puis que $x_{n+1} \leqslant x_n$. Minorer trivialement x_n pour en déduire la convergence de la suite.

Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $[0,u_2]$ vers $x\mapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$. Pour la convergence uniforme : noter que $|f_n(x)-f(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$. Majorer ceci indépendamment de x, et utiliser le fait que $u_2<1$ pour conclure. Appliquer enfin la première question pour avoir le résultat.

Remarque. Une fois qu'on a vu la théorie des séries entières, ou *a minima* la notion de convergence normale, on peut se contenter de dire que $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ est de rayon de convergence 1, et donc converge normalement sur tout segment inclus dans $]-1,1[$.

> **Commentaires.** Pour la première question : toujours bien analyser ce qui est « petit » par hypothèse, pour savoir à quoi se ramener *via* l'inégalité triangulaire.

☢ Exercice 22.

1. Prendre des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ constantes et étudier $(f_n(u_n))_{n\geqslant 0}$ dans ces cas-là.
2. Utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité (idée naturelle puisque nous avons une hypothèse de l'énoncé exprimée séquentiellement). Raisonner par l'absurde. Par hypothèse de l'énoncé, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ construite par votre raisonnement par l'absurde vérifie : $\forall k\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(u_k) = f(u_k)$. L'utiliser pour construire une suite extraite $\left(f_{\varphi(n)}(u_{\varphi(n)})\right)_{n\geqslant 0}$ qui ne converge pas et contredit l'hypothèse de l'énoncé.
3. Raisonner par l'absurde. En déduire l'existence de $\varepsilon>0$ et d'une extractrice φ telle que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|f-f_{\varphi(n)}\|_\infty \geqslant \varepsilon$. Justifier l'existence de x_n tel que : $|f(x_n)-f_{\varphi(n)}(x_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, et utiliser le théorème de Bolzano-Weierstraß pour avoir une contradiction.

★ Exercice 23. (Théorèmes de Dini)

1. Grâce à l'hypothèse de croissance, montrer que $(\|f_n-f\|_\infty)_{n\geqslant 0}$ converge vers un réel positif ℓ. Si $\ell>0$, utiliser la définition d'une borne supérieure puis le théorème de Bolzano-Weierstraß pour montrer qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $(f-f_n)(c)\geqslant \frac{\ell}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et en déduire une contradiction (vous aurez à un moment besoin d'écrire une inégalité du type : $f(x_{\varphi(k)}) \geqslant f_n(x_{\varphi(k)}) + \frac{\ell}{2}$: notez bien les deux indices n et k).
2. (🗎) Utiliser le fait que f soit uniformément continue (pourquoi ?) pour en déduire que $|f(x)-f(y)|$ est « petit » pour x et y proches. Introduire une subdivision de $[a,b]$ avec des segments suffisamment petits pour utiliser ce fait. Majorer ensuite $|f_n(a_i)-f(a_i)|$ à l'aide de la convergence simple (où les a_i sont les points de la subdivision), puis ramener $|f_n(x)-f(x)|$ à des quantités de la forme $|f_n(a_i)-f(a_i)|$ ou $|f(x)-f(y)|$ (avec x et y proches) *via* l'inégalité triangulaire. La croissance de f_n interviendra pour majorer $|f_n(a_i)-f_n(x)|$.

> **Commentaires.** Lorsqu'un exercice nous dit que sous certaines hypothèses, l'implication « convergence simple $\Longrightarrow$ convergence uniforme » est correcte, cela part souvent du même principe : on utilise la convergence simple en un nombre FINI de points a_i, de sorte que $|f(a_i)-f_n(a_i)|\leqslant\varepsilon$ soit petit simultanément (i.e. pour tout i et pour tout n au-delà d'un rang commun à tous les indices i). Une hypothèse de l'énoncé nous assure alors qu'entre deux a_i et a_{i+1}, la différence reste « petite ». Voir les exercices 17 et 24. On peut trouver d'autres hypothèses (voir les exercices 27, 28 et 29), mais le principe reste le même (se ramener à la convergence simple en un nombre fini de points). Il en est question dans *Méthodes*, section *Montrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions abstraite*.
> Notons enfin le rôle du segment dans tous ces exercices. C'est lui qui permet de se ramener à un nombre fini de points. C'est une idée importante qui réapparaîtra lorsque nous manipulerons des ensembles *compacts* (et c'est ce qui fait une grande partie de leur intérêt).
>
> La première question de cet exercice est cependant une exception notable à ce principe de finitude, même si le théorème de Bolzano-Weierstraß joue souvent le même rôle. Noter sa commodité pour « forcer » des suites à converger quand on en a besoin.

Exercice 24.

1. (🗎) Raisonnement analogue à celui de l'exercice 17. Noter que par un passage à la limite adéquat, f est aussi lipschitzienne.

2. Soit $[\alpha, \beta] \subseteq]a, b[$. Utiliser le théorème des pentes croissantes pour montrer qu'on peut se ramener au cas précédent. D'abord vérifier qu'aux extrémités de l'intervalle, $\left(\frac{f_n(\alpha')-f_n(\alpha)}{\alpha'-\alpha}\right)_{n\geqslant 0}$ et $\left(\frac{f_n(\beta')-f_n(\beta)}{\beta'-\beta}\right)_{n\geqslant 0}$ convergent pour α' et β' bien choisis (afin d'obtenir la constante k).

> **Commentaires.** Lorsqu'un exercice nous dit que sous certaines hypothèses, l'implication « convergence simple $\Longrightarrow$ convergence uniforme » est correcte, cela part souvent du même principe : on utilise la convergence simple en un nombre FINI de points a_i, de sorte que $|f(a_i) - f_n(a_i)| \leqslant \varepsilon$ soit petit simultanément (i.e. pour tout i et pour tout n au-delà d'un rang commun à tous les indices i). Une hypothèse de l'énoncé nous assure alors qu'entre deux a_i et a_{i+1}, la différence reste « petite ». Voir les exercices 17 et 23. On peut trouver d'autres hypothèses (voir les exercices 27, 28 et 29), mais le principe reste le même (se ramener à la convergence simple en un nombre fini de points). Il en est question dans *Méthodes*, section *Montrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions abstraite*.
>
> Notons enfin le rôle du segment dans tous ces exercices. C'est lui qui permet de se ramener à un nombre fini de points. C'est une idée importante qui réapparaîtra lorsque nous manipulerons des ensembles *compacts* (et c'est ce qui fait une grande partie de leur intérêt).

Propriétés préservées par passage à la limite

Exercice 25. Il est raisonnable de conjecturer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent respectivement vers le maximum et le minimum de f. Attention cependant car les extremums peuvent être atteints en plusieurs points simultanément : cela veut dire que si x_n est un point quelconque tel que $f(x_n) = u_n$, espérer que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge est illusoire (imaginez qu'il oscille entre le plus petit et le plus grand point où le maximum est atteint). C'est ce qui complique le raisonnement.

Néanmoins on peut raisonner sur une suite extraite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ (pourquoi ?). Vérifier que si ℓ est sa limite, alors $f(\ell) \geqslant f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ (passer à la limite dans l'inégalité $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \geqslant f_{\varphi(n)}(x)$, en notant bien qu'il n'est pas tout à fait trivial que le majorant tend vers $f(\ell)$: voir l'exercice 21). Cela montre que f atteint son maximum en ℓ. Montrer ensuite que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(\ell)$ grâce au fait que ce soit une suite bornée (pourquoi ?) avec une unique valeur d'adhérence (pourquoi ?). De même pour $(v_n)_{n\geqslant 0}$.

> **Commentaires.** L'usage du théorème de Bolzano-Weierstraß dans cet exercice est typique, et explique pourquoi ce théorème est si sympathique : il permet de « forcer » la convergence d'une suite, quand il nous arrangerait bien qu'elle soit convergente. Cela a cependant un prix : on passe par une suite extraite.
>
> Souvent, ce n'est pas bien grave, parce qu'on a seulement besoin *d'une* suite vérifiant une certaine propriété et qui converge, peu importe laquelle. Ici c'est plus gênant parce qu'on veut vraiment que ce soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge : pour ce faire, il est très utile de savoir démontrer qu'une suite bornée n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence (les valeurs d'adhérence étant les limites des sous-suites extraites convergentes), est toujours convergente. Cela utilise un raisonnement par l'absurde et (encore !) le théorème de Bolzano-Weierstraß.

★ **Exercice 26.** Montrer que $\|P_m - P_n\|_\infty \leqslant 1$ pour tous n et m assez grands. En déduire que $P_m - P_n$ est un polynôme constant pour tous n et m assez grand, et que cela définit une suite constante $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ convergente. Il suffit alors de passer à la limite convenablement dans l'égalité $P_m = P_n + \alpha_n$.

> **Commentaires.** Cet exercice donne une autre illustration des suites de Cauchy, lorsqu'on sait pourtant déjà qu'une suite converge : pour avoir un contrôle sur $|\ell - u_n|$ à l'aide d'un contrôle sur $|u_{n+p} - u_n|$. C'est ainsi que l'on peut avoir l'estimation $|\ell - u_n| = \underset{n\to+\infty}{O}(k^n)$ dans la démonstration du théorème de Banach-Picard, ou que l'on montre qu'une suite de *fonctions* de Cauchy converge. Ici : on tire plus d'informations d'une majoration de $\|P_{n+p} - P_n\|_\infty$ que de $\|f - P_n\|_\infty$, du fait qu'une application polynomiale ne soit que rarement bornée sur $\mathbb{R}$.
>
> Cet exercice permet de comprendre pourquoi l'hypothèse du théorème de Weierstraß (segment) est absolument essentielle.

Exercice 27. (🗎) Se souvenir qu'un polynôme de degré au plus p est caractérisé par $p + 1$ de diverses manières : par $p + 1$ coefficients, ou par ses valeurs en $p + 1$ évaluations, ou par la valeur de ses $p + 1$ dérivées successives en un point, etc. Parmi toutes ces données qui caractérisent, se demander lesquelles se comportent le mieux par passage à la limite, et comment les P_n s'expriment à l'aide de ces données. C'est ainsi qu'on arrivera à démontrer que f est polynomiale par passage à la limite.

Commentaires. Il faut connaître toutes les façons de caractériser un polynôme de degré borné par un nombre fini de données, dont la pertinence dépend du problème en présence.

Ce résultat est à lire en parallèle de toutes les démonstrations que vous croiserez du théorème de Weierstraß, où les polynômes construits sont de degré de plus en plus élevé. C'est une nécessité, et c'est raccord avec les quelques identités que vous connaissez : $\frac{1}{1-x} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$, $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, etc.

Exercice 28. (🖹) Même principe que dans l'exercice précédent.

Commentaires. Il faut connaître toutes les façons de caractériser un polynôme de degré borné par un nombre fini de données, dont la pertinence dépend du problème en présence.
On illustre là encore en quoi l'implication « convergence simple $\Longrightarrow$ convergence uniforme » nécessite souvent de se ramener à un nombre FINI de points. C'est plus facile pour les polynômes que les applications quelconques, suivant la remarque ci-dessus.

Ce résultat est à lire en parallèle de toutes les démonstrations que vous croiserez du théorème de Weierstraß, où les polynômes construits sont de degré de plus en plus élevé. C'est une nécessité, et c'est raccord avec les quelques identités que vous connaissez : $\frac{1}{1-x} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$, $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, etc.

☢ **Exercice 29. (🖹) (Une généralisation de l'exercice précédent)** C'est le même principe que dans l'exercice précédent : montrer qu'il suffit d'un nombre fini de données pour caractériser une fonction dans E. C'est la partie difficile de l'exercice.

Considérer une base $(g_1, \ldots, g_d)$ de E. Montrer par récurrence l'existence de réels $x_1, \ldots, x_d$ tels que $\det\Big(\big(g_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant d}\Big) \neq 0$ (dans l'hérédité, vous aurez à développer par rapport à une colonne ce déterminant, avec d'abord un x_{d+1} quelconque, afin d'écrire ce déterminant comme une combinaison linéaire des $g_i(x_{d+1})$; utiliser le fait qu'ils soient supposés libres pour montrer que le déterminant doit être non nul). Exprimer les fonctions f_n dans la base $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ ainsi : $f_n = \sum\limits_{i=1}^{d} a_{n,i} g_i$. Si l'on montre que chaque suite de coordonnées $(a_{n,i})_{n\geqslant 0}$ converge, c'est gagné. Pour cela, évaluer en les $x_1, \ldots, x_d$, et inverser le système (c'est là que le résultat sur le déterminant intervient) pour exprimer les $a_{n,i}$ en fonction des f_n. Conclure.

Commentaires. On illustre là encore en quoi l'implication « convergence simple $\Longrightarrow$ convergence uniforme » nécessite souvent de se ramener à un nombre FINI de points (c'est raisonnable d'espérer une telle chose grâce à l'hypothèse dimensionnelle, qui est là pour permettre de la finitude). L'immense difficulté, ici, est de comprendre comment fabriquer les points auxquels il suffit de se ramener. En cela, savoir démontrer l'existence de réels $x_1, \ldots, x_p$ tels que $\det\big(\left(g_i(x_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}\big) \neq 0$ est très utile.

Pour l'idée d'inverser le système pour obtenir la convergence des $(a_{n,i})_{n\geqslant 0}$: il n'y a rien de très sorcier si l'on met en parallèle ce que l'on SAIT (la convergence de $(f_n)_{n\geqslant 0}$) et ce qu'on VEUT (la convergence de $(a_{n,i})_{n\geqslant 0}$ pour tout i). On se demande alors comment relier ce qu'on veut à ce qu'on sait, et cela revient à inverser le système.

Exercice 30. Même approche que la démonstration qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Commentaires. Toujours bien analyser ce qui est « petit » par hypothèse, pour savoir à quoi se ramener *via* l'inégalité triangulaire.

3.2 Classement des exercices par thèmes

CVU d'une suite abstraite	16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 27, 28, 29
CVU d'une suite définie par récurrence	13, 14
CVU d'une suite explicite	9, 10, 15
CVS + (H) implique CVU	17, 23, 24, 27, 28, 29
« Différences petites »	4, 6, 9, 10, 15, 17, 18, 19, 24
Lien suite-série	2, 3, 13
Quasi-démonstration du cours	2, 4, 13, 30
Rôle du segment ou du compact	17, 23, 24, 25, 27, 28
Suites de Cauchy	1, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 26
Théorème de Bolzano-Weierstraß	22, 23, 25
Théorème de Heine	17, 23
Uniforme continuité	8, 17, 18, 19, 23
Utilisation de la CVU	11, 14, 16, 21, 25

Table des matières