Chapitre préliminaire — Convergence des suites numériques ou de fonctions

Leonhard Euler
(1707–1786)

Augustin Louis Cauchy
(1789–1857)

Émile Picard
(1856–1941)

Comment lire ce livret

Ce chapitre préliminaire est particulièrement court, et donc le livret associé est très différent de ceux que vous aurez à la rentrée prochaine : son parcours se dispense d'explications approfondies. Il ne contient qu'un plan du chapitre, avec quelques indications pour les démonstrations classiques à retravailler chez soi. Les exercices proposés sont des applications directes du cours. Ils n'ont pas vocation à être tous traités en classe entière.

Interprétation des différents symboles. Ils sont généralement dans la marge.

🔍 : indique les définitions et résultats hors programme ; ceci implique en particulier que : 1° c'est de la lecture d'approfondissement, 2° ils doivent être redémontrés si vous voulez en faire usage aux concours : maîtrisez-les !

Il n'y a pas d'autre symbole utilisé dans ce cours préliminaire.

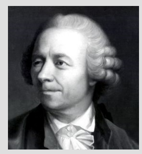
Introduction

Ce chapitre fournit des compléments dans l'étude de la convergence des suites numériques. La difficulté est lorsqu'on veut étudier la convergence d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ pour laquelle on n'a pas la moindre idée de sa limite ℓ, ou lorsque son existence est déjà un problème en soi. On contourne la difficulté en étudiant la taille de $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$, ou $(u_{n+p}-u_n)_{n\geqslant 0}$ plus généralement.

1 Séries télescopiques et suites de Cauchy

Proposition 1 (Lien suite-série)**.**

Exemple 1. Existence d'un réel γ tel que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$ (constante d'Euler). ♡


1707-1783

Exercice 1. Obtenir la convergence de la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)_{n\geqslant 1}$ plus classiquement en démontrant qu'elle est décroissante et minorée.

Exercice 2.

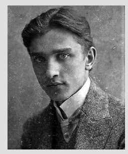
1. Démontrer qu'il existe un réel γ_1 tel que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k}=\frac{(\ln(n))^2}{2}+\gamma_1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$. Comment, d'ailleurs, pouvait-on conjecturer le premier terme de ce développement asymptotique ?
2. Soit $\alpha\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Généraliser l'étude à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln(k))^\alpha}{k}$.


1692-1770

Exercice 3. Utiliser le lien suite-série pour démontrer la convergence de la suite $\displaystyle\left(\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}{n!}\right)_{n\geqslant 1}$.

Sa limite s'avère être $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ *(formule de Stirling).*

Exemple 2 (guidé). Théorème du point fixe de Banach-Picard. ♡


1892-1945

Idée. Introduire une suite définie par récurrence par : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$ (et $u_0\in\mathbb{R}$). Montrer : $|u_{n+1}-u_n|=\underset{n\to+\infty}{O}(k^n)$, et en déduire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge par le lien suite-série. Montrer que sa limite ℓ est un point fixe de f.

Approfondissements possibles : montrer l'unicité du point fixe, et que la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers ℓ est en $O(k^n)$. Ce théorème peut également se démontrer avec les suites de Cauchy (voir ci-dessous).

Définition 2 (Suite de Cauchy).

Proposition 3 (Condition suffisante pour être une suite de Cauchy).

Exemple 3. Exemple de suite qui N'est PAS de Cauchy malgré les apparences.

Proposition 4 (Une suite convergente est de Cauchy).

Proposition 5 (Une suite de Cauchy converge).

Démonstration (idée). Montrer qu'une suite de Cauchy complexe est bornée et utiliser le théorème de Bolzano-Weierstraß. Conclure en majorant $|\ell - u_n|$ où ℓ est la limite d'une sous-suite convenable. □

Exercice 4. Redémontrer la proposition 5 par un bon usage du lien suite-série.

Remarques culturelles. Espaces complets. Construction de $\mathbb{R}$.

Corollaire 6 (La convergence absolue implique la convergence).

Exercice 5. Nous avons démontré que la proposition 5 implique le corollaire 6. Montrer que l'implication réciproque est vraie aussi.

2 Convergence des suites de fonctions

Définition 7 (Suite de fonctions).

Définition 8 (Convergence simple).

Définition 9 (Norme infinie d'une fonction).

La norme infinie de $f-g$ représente l'écart entre f et g : plus $\|f-g\|_\infty$ est petite, et plus les graphes de f et g sont « proches », la plus grande différence possible ayant justement pour valeur $\|f-g\|_\infty$. Par conséquent, dire que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur f (c'est-à-dire : $\|f_n - f\|_\infty$ converge vers 0), c'est dire que l'écart entre le graphe de f_n et celui de f devient arbitrairement petit quand n augmente.

Proposition 10 (La norme infinie est une norme).

Définition 11 (Convergence uniforme).

Proposition 12 (La convergence uniforme implique la convergence simple).

Proposition 13 (Convergence uniforme d'une suite de Cauchy de fonctions).

Proposition 14 (La convergence uniforme préserve la continuité en un point).

Corollaire 15 (La convergence uniforme préserve la continuité sur un intervalle).

Table des matières