Du cours aux exercices (Aide à la révision du cours)

Chapitre préliminaire — Convergence des séries numériques ou de fonctions

1 Séries télescopiques et suites de Cauchy

Motivation de cette partie

On donne de nouvelles méthodes pour montrer la convergence de suites par des moyens détournées, en particulier lorsque la limite candidate est inconnue ou que son existence est déjà un problème en soi (cas des sommes de séries par exemple). Cela passe par une étude quantitative précise de $u_{n+1} - u_n$ (lien suite-série) ou de $u_{n+p} - u_n$ (suites de Cauchy).

Proposition 1 (Lien suite-série)**.**

✓

— Dans le cas de convergence, que peut-on dire du *reste* de la série télescopique ? Pourquoi son expression peut potentiellement être intéressante ?

— La proposition donne un lien entre la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et celle de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$. Peut-on trouver des liens entre d'autres propriétés de cette suite et de cette série ? (signe, caractère borné, monotonie, etc.).

Exemple 1. ♡

✓ Se demander pourquoi ce développement est *très* intéressant.

★

— Regarder si une comparaison série-intégrale permet de trouver ce développement asymptotique. C'est lié à l'exercice qui suit.

— Obtient-on un développement asymptotique à deux termes avec d'autres séries de Riemann, suivant la même méthode ?

Exercice 1.

Exercice 2.

★ Regarder si une comparaison série-intégrale permet de trouver ce développement asymptotique.

Exercice 3.

✓ On note que $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1} - u_n)$ n'est pas spécialement plus simple. Qu'est-ce qui serait plus simple que la différence de termes consécutifs ? Comment s'y ramener ? Plus généralement, pour quel type de suite cette idée serait fructueuse ?

Exemple 2 (guidé). ♡

✓

— Revoir dans le cours de 1re année où vous utilisiez des applications contractantes, et comment vous faisiez pour montrer *en pratique* qu'une application l'est.

— Vérifier qu'on sait démontrer qu'une application lipschitzienne est continue.

★

— Le traiter en montrant que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy.

— Obtenir un majorant de $|\ell - u_n|$. Il est en effet utile d'avoir conscience que le lien suite-série et les suites de Cauchy permettent *aussi*, bien souvent, d'avoir une information sur l'écart de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à sa limite.

Définition 2 (Suite de Cauchy)**.**

✓	— Étudier des suites usuelles et regarder si elles sont de Cauchy. Si oui, déterminer explicitement le rang N qui assure la majoration $\lvert u_{n+p}-u_n\rvert \leqslant \varepsilon$, *si possible*. — Se convaincre de l'équivalence des deux formulations proposées (avec $\lvert u_{n+p}-u_n\rvert$ et $\lvert u_m-u_n\rvert$).

Proposition 3 (Condition suffisante pour être une suite de Cauchy)**.**

✓	Détailler ce que je n'ai pas détaillé. Quand est-ce que cette condition suffisante peut être préférable à la définition ?
★	Cette condition suffisante est-elle nécessaire ?

Exemple 3.

✓	— Proposer d'autres contre-exemples (une infinité, idéalement). Qu'ont-ils tous en commun, « qualitativement » ? — Écrire en termes epsilonesques le fait que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+p}-u_n)=0$, pour repérer la différence avec une suite de Cauchy. Si on devait décrire cette différence en termes « concrets », que diriez-vous ?

Proposition 4 (Une suite convergente est de Cauchy)**.**

✓	Se convaincre que ce résultat est naturel visuellement, et que l'idée de faire apparaître $\lvert u_n-\ell\rvert$ et $\lvert u_m-\ell\rvert$ *via* l'inégalité triangulaire l'est tout autant.

Proposition 5 (Une suite de Cauchy converge)**.**

✓	— Chercher ce qui n'aurait pas marché avec une suite vérifiant : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+p}-u_n)=0$. Cela met l'accent sur l'importance du caractère *uniforme* de la majoration $\lvert u_m-u_n\rvert \leqslant \varepsilon$. — Comparer la démonstration qu'une suite de Cauchy est bornée, avec celle qu'une suite convergente est bornée.
★	— Comprendre pourquoi utiliser le théorème de Bolzano-Weierstraß est une idée *naturelle*, au vu des difficultés soulevées en introduction de ce cours et qu'on veut justement résoudre. Remarquer que vous l'aviez déjà utilisé en 1re année à des fins similaires.
☢	En s'inspirant de cette démonstration, se demander : une fois qu'on a démontré qu'une suite est bornée, et qu'elle admet donc des sous-suites convergentes, que lui manque-t-il pour montrer qu'elle converge ?

Exercice 4.

★	Le faire. Si vous parvenez à chaque fois à traduire le critère de Cauchy à l'aide du lien suite-série, vous pourrez vous dispenser plus facilement de cette notion hors programme.

Corollaire 6 (La convergence absolue implique la convergence)**.**

✓	— Dans plusieurs démonstrations sur les suites de Cauchy, je préfère écrire $\lvert u_m-u_n\rvert \leqslant \varepsilon$. Ici, j'ai préféré raisonner avec $\lvert S_{n+p}-S_n\rvert$. Pourquoi ? Est-ce arbitraire ? Sous quelle condition remplacer m par $n+p$ est plus avantageux ? — Comparer avec la démonstration de l'année dernière. Quels sont les avantages et défauts de chaque démonstration ? Laquelle est la plus naturelle, c'est-à-dire la plus proche de ce que vous auriez naïvement essayé ? — Noter ici et ailleurs un schéma récurrent, lorsqu'on montre un résultat du type « $\bigstar$ converge $\Longrightarrow$ $\clubsuit$ converge » : on montre que $\clubsuit$ est de Cauchy en utilisant le fait que $\bigstar$ le soit en tant que suite convergente.
★	Vérifier que, peu importe la démonstration de ce corollaire, elle dépend toujours d'une propriété *centrale* de $\mathbb{R}$ que n'a pas $\mathbb{Q}$. Faire le lien avec la caractérisation à isomorphisme près de $\mathbb{R}$ (que vous avez sans doute vue en 1re année) et la remarque culturelle du cours.

Exercice 5.

★ Faire l'exercice. Deux intérêts : 1° c'est un autre exemple où l'on voit que le lien suite-série et les suites de Cauchy sont intimement liés, 2° on verra d'autres espaces que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ où la convergence absolue implique la convergence (non trivialement). Ainsi on en déduira que dans ces mêmes espaces, les suites de Cauchy convergent (et donc tout ce qu'on a démontré grâce à elles dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ reste valable dans ces autres espaces).

Après votre révision de cette partie

Connaître par cœur les trois résultats classiques de cette partie : l'existence de la constante d'Euler, le théorème du point fixe de Banach-Picard, la convergence des suites de Cauchy. Soit on les réutilisera, soit leur schéma de démonstration nous inspirera en d'autres contextes. Retenir la philosophie du lien suite-série et des suites de Cauchy.

Lecture conseillée. *Méthodes*, *Étudier des suites en passant par des séries télescopiques*. Il est inutile de tout lire.

1.1 Convergence des suites de fonctions

Motivation de cette partie

Une préoccupation majeure de l'analyse de 2[e] année est de savoir si les opérations classiques de l'analyse (dérivation, intégration, etc.) peuvent passer à la limite « comme on pense ». Ou, de manière presque équivalente : si les propriétés d'une fonction dépendant d'une variable n se conservent par passage à la limite quand $n \to +\infty$. Mais pour cela, encore faut-il comprendre ce qu'est un passage à la limite pour des suites de *fonctions*, et c'est l'objet de cette section.

Avec les notions de norme infinie et de convergence *uniforme*, nous donnons un sens précis à l'idée qu'une fonction soit proche d'une autre, et qu'une fonction soit la limite d'autres fonctions quand $n \to +\infty$, en partant d'une interprétation visuelle en termes de graphes. Nous illustrons que c'est une « bonne » notion de convergence, au sens où elle préserve des propriétés par passage à la limite, en donnant l'exemple de la continuité. Nous donnons des moyens *pratiques* de démontrer une telle convergence, grâce à ce qu'on appelle la convergence *simple*.

Définition 7 (Suite de fonctions)**.**

Définition 8 (Convergence simple)**.**

✓ S'il y a convergence simple sur I, y a-t-il convergence simple sur tout sous-intervalle de I ? Et réciproquement, s'il y a convergence simple sur tout sous-intervalle strict de I, y a-t-il convergence simple sur I ?

Définition 9 (Norme infinie d'une fonction)**.**

✓
- Calculer la norme infinie de fonctions usuelles, en faisant varier l'intervalle I (prendre des segments, des intervalles non bornés, etc.). Fabriquer un exemple de fonction définie à l'aide d'un quotient.
- Les normes infinies nécessitent parfois d'être à l'aise dans les calculs d'extremums. Si vous avez besoin d'entraînement, reprenez des études de variation de 1[re] année, et déduisez-en à chaque fois la norme infinie de la fonction étudiée (ou du moins une majoration ou minoration de cette norme).

★
- Propriétés $(*)$ et $(\dagger)$: voir comment elles permettent de montrer rigoureusement que la norme infinie de $x \mapsto x(1-x)$ et $x \mapsto 1-e^{-x}$ (sur $[0,1]$ et $\mathbb{R}_+$) sont respectivement $\frac{1}{4}$ et 1 (prendre M égal au maximum dans $(\dagger)$, puis faire de bons choix de x dans $(*)$ pour avoir une inégalité dans les deux sens, puis l'égalité).
- Et s'il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $|f(x_n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$, qu'est-ce que cela implique entre M et $\|f\|_\infty$?

Proposition 10 (La norme infinie est une norme)**.**

✓ Se demander si la norme infinie vérifie d'autres propriétés analogues à celles de la valeur absolue : a-t-on l'inégalité triangulaire renversée ? A-t-on $\|fg\|_\infty = \|f\|_\infty \|g\|_\infty$? A-t-on une condition nécessaire et suffisante simple pour que l'égalité $\|f+g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ soit vraie ?

★ La démonstration de l'égalité $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$ peut paraître tortueuse. Se convaincre que, au vu des propriétés $(*)$ et $(\dagger)$ qui définissent une borne supérieure, toute égalité entre normes infinies doit passer par une telle contorsion. Cette réflexion vous poursuivra dès qu'un objet sera défini comme une borne supérieure ou inférieure, comme un plus grand ou plus petit élément (pgcd, ppcm, adhérence et intérieur d'une partie, somme d'une famille sommable, ordre d'un élément, distance à une partie... les exemples ne manqueront pas).

Définition 11 (Convergence uniforme)**.**

✓
- Observer que $\|f_n - f\|_\infty$ ne peut pas dépendre d'une des variables (n ou x, laquelle ?), systématiquement. Se convaincre que le contraire serait anormal, étant donné le sens intuitif de la norme infinie. *C'est très important.*
- Se convaincre que s'il y a convergence uniforme sur un intervalle I, il y a convergence uniforme sur tout intervalle J strictement inclus dans I. La réciproque est-elle vraie ?

★
- Réfléchir à quelques propriétés basiques de la convergence uniforme : si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et $(g_n)_{n\geqslant 0}$ convergent uniformément sur I, est-ce que $(f_n + g_n)_{n\geqslant 0}$ et $(f_n \cdot g_n)_{n\geqslant 0}$ aussi ? Et $\left(\frac{1}{f_n}\right)_{n\geqslant 0}$ (lorsque ce quotient existe) ?
- Si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément, est-ce que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée (au sens où il existerait $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant M$) ? Penser à d'autres propriétés des suites réelles ou complexes qui pourraient éventuellement se généraliser ici (si une suite converge, toutes ses suites extraites convergent vers la même limite, etc.).

Proposition 12 (La convergence uniforme implique la convergence simple)**.**

✓
- J'affirme que si on enlève « vers f » de la proposition (pour seulement écrire : « si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément, alors elle converge simplement »), alors cette proposition est presque sans intérêt. Pourquoi ?
- **Lecture obligatoire** : *Méthodes*, *Convergence uniforme d'une suite de fonctions*. Comparer notamment la remarque sur les suites de fonctions qui ne convergent pas uniformément, avec l'observation de la section *Cas particulier fréquent : une fonction « puissance × polynôme en n »*.

★ Écrire en termes epsilonesques la définition de la convergence simple afin de comprendre la différence avec la convergence uniforme. En déduire ce qui empêche moralement la réciproque de cette proposition d'être vraie.

Proposition 13 (Convergence uniforme d'une suite de Cauchy de fonctions)**.**

★
- Reprendre quelques exercices et propositions démontrés avec les suites de Cauchy réelles ou complexes, avec le lien suite-série. Essayer de regarder quels résultats analogues on obtient en les adaptant au contexte des suites de fonctions. L'un d'entre eux sera très important pour démontrer le théorème de Cauchy linéaire sur les équations différentielles.
- Reprendre ici l'observation déjà faite pour le corollaire 6, sur les résultats du type « ★ converge $\Longrightarrow$ ♣ converge ». Cette démonstration permet une observation proche : laquelle ?

Proposition 14 (La convergence uniforme préserve la continuité en un point)**.**

✓ Chercher à comprendre pourquoi on « pouvait penser » à la majoration de $|f(x) - f(a)|$ par les trois termes de la démonstration, en traduisant qualitativement les hypothèses de l'énoncé. Se demander ensuite pourquoi on prend $n = N$ en fin de démonstration : qu'est-ce qui serait faux si l'on gardait un $n \geqslant N$ arbitraire ?

★
- Pourquoi la démonstration effectuée ne marcherait pas pour montrer que la convergence simple préserve la continuité ? Il semble à première vue qu'on puisse pourtant faire la même chose (comme $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ et $f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$, la différence est inférieure à ε au-delà d'un certain rang). Comprendre cela, c'est plus généralement comprendre l'utilité des majorations *uniformes* partout en analyse.
- On a commencé par majorer $|f_n(x) - f(x)|$ et $|f_n(a) - f(a)|$, et *ensuite* on a majoré $|f_N(x) - f_N(a)|$. Pouvait-on procéder dans l'ordre contraire ?
- À l'inverse, est-ce qu'une suite de fonctions discontinues en un point peut converger uniformément vers une fonction continue en ce point ?

Corollaire 15 (La convergence uniforme préserve la continuité sur un intervalle)**.**

✓	— Jusqu'à présent (et en particulier en 1re année), cette idée de vérifier une hypothèse sur tout segment d'un intervalle (au lieu de l'intervalle entier) n'est jamais apparue. Elle sera fréquente cette année. Pourquoi ? — Pourquoi vérifier la convergence uniforme sur tout segment ? L'énoncé aurait-il été aussi vrai en remplaçant « segment » par « voisinage » ? par « intervalle borné » (qu'il soit fermé ou non) ? Si oui, alors pourquoi le segment a-t-il ma préférence ? — Est-ce que « convergence uniforme sur tout segment de I » équivaut à « convergence uniforme sur I » ? C'est TRÈS important. Se poser la même question pour la convergence simple. Dans le même ordre d'idée : s'il y a convergence uniforme sur $[a, b]$ et $[b, c]$, y a-t-il convergence uniforme sur $[a, c]$?
★	Se poser la question de la préservation des propriétés dans un cadre plus général : si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement (ou uniformément) vers une fonction f et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n vérifie une propriété $\mathcal{P}$, est-ce que f vérifie $\mathcal{P}$? Se la poser pour différentes propriétés : le signe, la monotonie, la stricte monotonie, le caractère borné, la convexité, la stricte convexité, l'uniforme continuité, le caractère lipschitzien, le fait d'être linéaire ou affine, en escalier, etc. D'abord pour la convergence simple (où c'est plus facile à trancher), puis la convergence uniforme si c'est faux pour la convergence simple. Parfois la réponse dépend de l'intervalle (segment ou non), ou du quantificateur existentiel de la propriété (la constante qui majore dans le cas borné, la constante de Lipschitz dans le cas lipschitzien, etc.). Il faudra prendre le temps de se poser la question à TOUTE NOUVELLE NOTION cette année. En début d'année vous manquerez peut-être trop d'expérience pour répondre à ces différentes questions : vous pourrez les reprendre après avoir vu quelques exemples. On peut se poser la question inverse : si f vérifie $\mathcal{P}$, est-ce que f_n vérifie $\mathcal{P}$ au moins pour tout n assez grand ?

Après votre révision de cette partie

1. **Lecture conseillée.** *L'art de majoration.* Ce document répertorie des erreurs trop fréquentes, et donne des méthodes de majoration qui serviront beaucoup par la suite.
2. Essayer les exercices des *Savoir-faire à vérifier.*
3. Méditer sur l'importance du caractère uniforme des majorations, que ce soit pour la convergence uniforme des suites de fonctions ou la définition des suites de Cauchy, et pourquoi c'est ce qui fait tout marcher.

Table des matières