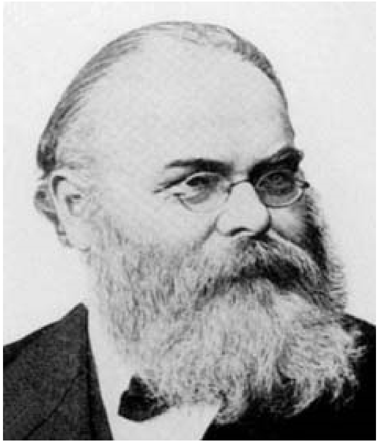
Chapitre XIII — Calcul différentiel

Ludwig Otto Hesse
(1811–1874)



Hermann Schwarz
(1843–1921)

« En probabilités, quelle étrange ironie
Que répondre au hasard ne nous rapporte rien !
Pour saisir ce chapitre, il faut être un génie.
– Ayez du cœur, taupin, le prochain sera bien. »

« En dépit des dessins auxquels je m'ingénie,
Je peine à voir, Monsieur, un espace euclidien !
Quand finira ce cours ? Mon âme est démunie.
– Ayez du cœur, taupin, le prochain sera bien. »

« Las ! La topologie empire ma déroute :
Même les cinq-demis, si savants, n'y voient goutte !
– Courage, la leçon ne dure que trois jours. »

Ainsi suis-je, à l'abord de l'ultime chapitre,
De moins en moins instruit et de plus en plus pitre.
Pourvu qu'aucun d'entre eux ne tombe à mes concours !
(Pierre de Saint-Louis)

Motivation

La Grande Idée du calcul différentiel.

Notations. Sauf mention explicite du contraire, E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles n et p respectivement, tandis que U désigne une partie ouverte de E et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

1 Définitions et propriétés de base

1.1 Applications différentiables

Définition 1 (Application différentiable, différentielle, classe C^1)**.**

Remarque. Pourquoi un ouvert ?

Lemme 2 (Application linéaire négligeable devant $\|\vec{h}\|$)**.**

Autres notations.

Remarque. Attention, $\mathrm{d}f(\vec{a})$ N'EST PAS UN VECTEUR.

Proposition 3 (Fonctions d'une seule variable : différentiabilité et dérivabilité)**.**

Exemple 1. Différentielle de $\|\cdot\|^2$ lorsque $\|\cdot\|$ est euclidienne. ♡

Proposition 4 (Différentielle d'une fonction constante, linéaire, multilinéaire)**.**

Exemple 2. Produit matriciel, produit scalaire.

Proposition 5 (Opérations de base, règle de la chaîne)**.**

Exemple 3. Différentielle d'une norme euclidienne. ♡

Définition-Proposition 6 (Gradient)**.** → ex. 4

Remarque. Par ce même théorème : $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0} \Longleftrightarrow \mathrm{d}f(\vec{a}) = 0_{\mathrm{L}(E,F)}$.

Exemple 4. Gradient d'une norme euclidienne. ← ex. 3

Corollaire 7 (Dérivation le long d'un arc paramétré)**.**

Remarque. On privilégie les chemins rectilignes.

Une interprétation géométrique du gradient.

1.2 Dérivées partielles, matrice jacobienne

Notation. Identification entre $\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$ et $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$.

Définition 8 (Dérivée selon une direction, dérivée partielle)**.**

Remarque. Une dérivée partielle est une dérivée le long d'un arc.

Proposition 9 (Lien entre dérivées partielles et différentielle, gradient)**.**

Exemple 5. Différentielle du déterminant.

Une autre interprétation géométrique du gradient.

Mise en garde 1. La réciproque est fausse.

Corollaire 10 (Caractérisation de la classe C^1 avec les dérivées partielles).

Corollaire 11 (Opérations sur les fonctions de classe C^1).

Définition 12 (Matrice jacobienne).

Théorème 13 (Règle de la chaîne avec les dérivées partielles).

Abus de notation.

Exemple 6. Formules de dérivation en coordonnées polaires.

Exemple 7. Dérivées partielles d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ symétrique en x et y.

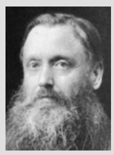
1.3 La classe C^2 et au-delà

Définition 14 (Dérivées partielles k^{es}, classe C^k).

Théorème 15 (Théorème de Schwarz).

Démonstration. On ne traite que le cas $k = 2$, le cas général découlant alors d'une récurrence, et on prend $n = 2$ pour alléger les notations (puisque de toute façon les dérivées partielles secondes ne font intervenir que deux variables). Soit $(x_0, y_0) \in U$. On veut montrer : $\partial_{1,2} f(x_0, y_0) = \partial_{2,1} f(x_0, y_0)$.

1. Introduire $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que tout élément de $[x_0, x_0 + h] \times [y_0, y_0 + k]$ soit dans U.
2. On pose :
$$\delta(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0).$$
On considère les applications
$$\varphi : x \mapsto f(x, y_0 + k) - f(x, y_0), \quad \text{et :} \quad \psi : y \mapsto f(x_0 + h, y) - f(x_0, y).$$
Exprimer $\delta(h, k)$ en fonction de φ puis de ψ, puis en appliquant convenablement un théorème de 1re année, montrer l'existence de $(\theta_1, \theta_2) \in]0,1[^2$ tel que : $\delta(h, k) = h\left(\partial_1 f(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \partial_1 f(x_0 + \theta_1 h, y_0)\right)$, et : $\delta(h, k) = k\left(\partial_2 f(x_0 + h, y_0 + \theta_2 k) - \partial_2 f(x_0 + h, y_0 + \theta_2 k)\right)$.
3. En appliquant ce même théorème à deux autres fonctions, montrer l'existence de $(\theta_3, \theta_4) \in]0,1[^2$ tel que : $\partial_{2,1} f(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_3 k) = \partial_{1,2} f(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_4 k)$. Conclure. □



1863 – 1942

Définition 16 (Matrice hessienne).

Proposition 17 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2).

Démonstration.

1. Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 en 0, avec l'application

$\varphi : t \mapsto f(\vec{a} + t\vec{h})$, et poser $t = 1$. Exprimer $\varphi'(0)$ et $\varphi''(u)$ à l'aide de f et de ses dérivées partielles.

Si l'on note $R(\vec{h})$ le reste intégral obtenu à la question précédente, vérifier que la formule de Taylor-Young est démontrée si l'on a : $R(\vec{h}) - \frac{\langle H_f(\vec{a})\vec{h},\vec{h}\rangle}{2} \underset{\vec{h}\to\vec{0}}{=} o\left(\|\vec{h}\|^2\right)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. À l'aide de la continuité de $\partial_{i,j} f$ en $\vec{a}$, montrer que pour tout $\vec{x} \in U$ dans un voisinage de $\vec{a}$, on a : $\left|\int_0^1 (1-t)\partial_{i,j} f(\vec{a} + t\vec{h})\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\partial_{i,j} f(\vec{a})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (écrire $\frac{1}{2}\partial_{i,j} f(\vec{a})$ sous la forme $\int_0^1 (1-t)\bigstar$). Conclure. $\square$

Remarque. Cas particulier $n = 2$.

2 Extension des théorèmes d'analyse réelle

2.1 Inégalité des accroissements finis et conséquences

Théorème 18 (Inégalité des accroissements finis)**.**

Remarque. Reformulation avec le gradient.

Corollaire 19 (Caractérisation des fonctions de classe C^1 constantes)**.**

Proposition 20 (Dérivée partielle nulle)**.**

Exemple 8. Calcul de $\arctan(x) + \arctan(y)$.

2.2 Résolution d'équations aux dérivées partielles

Méthode 1. Se ramener à $\partial_1 F(\psi) = 0$ ou $\partial_1 F(\psi) = h_1$. Voir *Méthodes*, section 3.2. 3.2

Exemple 9. Fonctions de divergence nulle. ♡

2.3 Extremums et points critiques

Définition 21 (Extremum)**.**

Définition 22 (Point critique)**.**

Théorème 23 (Les extremums d'un ouvert sont parmi les points critiques)**.**

Mise en garde 2. La réciproque est fausse.

Théorème 24 (Hessienne en les points critiques)**.**

Remarque. Si $H_f(\vec{a})$ n'est ni négative ni positive.

Corollaire 25 (Cas particulier $p = 2$)**.**

Méthode 2. Concilier le théorème des bornes atteintes et la nécessité d'être sur un ouvert. Voir *Méthodes*, section 4. 4

Exemple 10. Points M d'un carré $ABCD$ minimisant $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2$.

2.4 Optimisation sous contrainte

Définition 26 (Espace tangent)**.**

Exemple 11. Espace tangent en un point d'un espace affine.

Proposition 27 (Lien entre espace tangent et différentielle, gradient)**.**

Remarque. Structure d'espace vectoriel.

Exemple 12. Espace tangent en un point d'une sphère euclidienne.

Exemple 13. Plan tangent en un point de la surface représentative d'une fonction de deux variables.

Lemme 28 (Lien entre extremums locaux et espaces tangents)**.**

Corollaire 29 (Théorème des extremums liés, ou d'optimisation sous contrainte)**.**

Exemple 14. Une autre démonstration qu'un endomorphisme autoadjoint admet toujours une valeur propre.

— Fin du chapitre XIII —

Figure 1 – Représentation des surfaces d'équations $z = x^3 + y^3$ et $z = y^2 - x^2$.

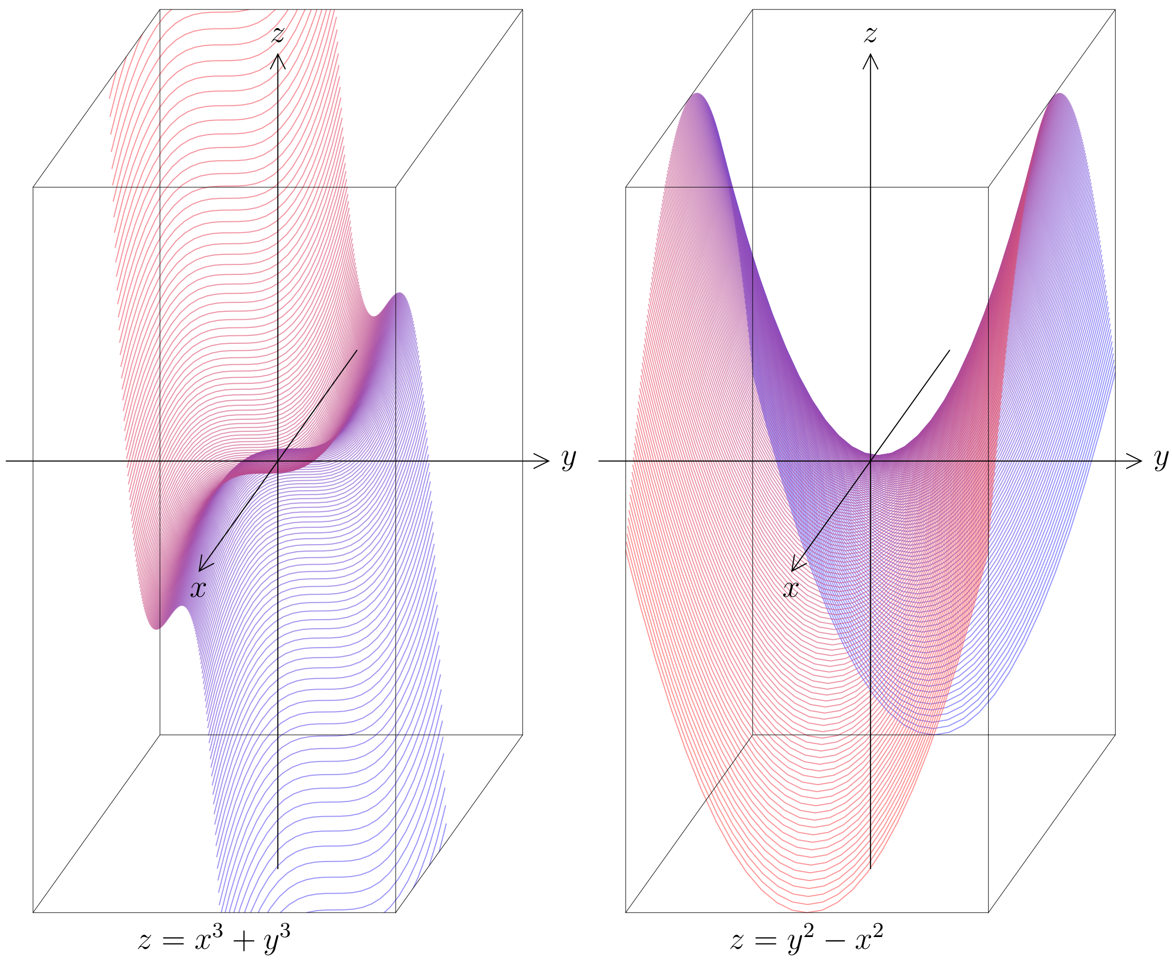


Table des matières