ENS Ulm 2024

Épreuve de mathématiques D, MP & MPI, six heures

Début de l'épreuve

Tout au long de ce sujet, la notation $A \overset{\text{déf}}{=} B$ *indique que le symbole* A *est défini comme étant égal à* B. Rappelons que la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n}{n!}$$

converge, pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$, vers un nombre réel strictement positif que l'on note e^α et que l'on appelle l'*exponentielle de* α. L'application $\alpha \mapsto e^\alpha$ établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_{>0}$ qui satisfait à la relation : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta.$$

Le but de ce sujet est de donner une preuve[1] du résultat suivant, qui est un cas particulier du *théorème d'Hermite-Lindemann-Weierstrass* :

Théorème 1. Soit $r \geqslant 2$ un entier. Si $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Q}$ sont des nombres rationnels distincts, alors les nombres réels $e^{a_1}, \ldots, e^{a_r}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Chemin faisant, nous établirons quelques propriétés de nature arithmétique des séries entières à coefficients rationnels qui sont solutions d'une équation différentielle.

A. Quelques conséquences

1. Pour un nombre rationnel strictement positif $a \in \mathbb{Q}_{>0}$, notons $\log(a)$ le seul nombre réel satisfaisant à $e^{\log a} = a$. Déduire du théorème 1 que $\log(a)$ est irrationnel pour tout nombre rationnel strictement positif $a \neq 1$.
2. Soit $a \in \mathbb{Q}^\times$ un nombre rationnel non nul. Déduire du théorème 1 que, pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{Q}[x]$, on a $P(e^a) \neq 0$.

On dit que le nombre e^a est *transcendant*.

B. Séries entières et fractions rationnelles

Une *série entière à coefficients rationnels* est une suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres rationnels. On munit l'ensemble des telles suites des opérations d'addition et de multiplication

$$\begin{aligned} (c_n)_{n\geqslant 0} + (d_n)_{n\geqslant 0} &= (c_n + d_n)_{n\geqslant 0}, \\ (c_n)_{n\geqslant 0} \cdot (d_n)_{n\geqslant 0} &= \left(\sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k}\right)_{n\geqslant 0}. \end{aligned}$$

L'élément neutre pour l'addition est la suite $(0)_{n\geqslant 0}$ et l'élément neutre pour la multiplication est la suite $(1, 0, 0, \cdots)$. En pratique, plutôt que comme une suite on pensera à une série entière à coefficients rationnels $(c_n)_{n\geqslant 0}$ comme une expression de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

On voit x comme une variable « formelle », c'est-à-dire que l'on ne se soucie pas des propriétés de convergence (si l'on remplace x par un nombre réel α, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} c_n \alpha^n$ peut être convergente

1. suivant l'article « An Alternative Proof of the Lindemann-Weierstrass Theorem » de F. Beukers, J. P. Bézivin et P. Robba (*Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 193–197).

ou divergente). Avec cette notation, les opérations d'addition et multiplication de deux séries entières $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n$ deviennent

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (c_n + d_n) x^n, \\ (f \cdot g)(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k} \right) x^n.\end{aligned}$$

On écrit simplement 0 et 1 pour les éléments neutres pour l'addition et la multiplication. La *dérivée* d'une série entière f comme ci-dessus est la série entière

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) c_{n+1} x^n.$$

L'opération de dériver une série entière est linéaire et satisfait à la règle de Leibniz

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

On note $\mathbb{Q}[\![x]\!]$ l'ensemble des séries entières à coefficients rationnels. On peut voir les polynômes à coefficients rationnels comme le sous-ensemble $\mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{Q}[\![x]\!]$ formé des séries entières telles qu'il existe un entier $d \geqslant 0$ satisfaisant à $c_n = 0$ pour tout $n > d$.

3. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$ une série entière dont les coefficients c_n sont des nombres entiers.
   Montrer que s'il existe un nombre réel $\alpha \geqslant 1$ tel que la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} c_n \alpha^n$ converge, alors f est un polynôme.
4. Soit $Q \in \mathbb{Q}[x]$ un polynôme à coefficients rationnels dont 0 n'est pas racine. Montrer qu'il existe une unique série entière $f \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$ satisfaisant à $Q \cdot f = 1$.
   Montrer que si Q est à coefficients entiers et que son terme constant c_0 vaut 1 ou -1, alors cette unique série entière f est à coefficients entiers.

Rappelons que $\mathbb{C}(x)$ désigne l'ensemble des fractions rationnelles P/Q avec $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ et Q non nul. On considérera le sous-ensemble $\mathbb{Q}(x) \subseteq \mathbb{C}(x)$ formé des fractions rationnelles P/Q avec $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$, que l'on appellera *fractions rationnelles à coefficients rationnels*. Pour un nombre complexe α et un polynôme non nul $R \in \mathbb{Q}[x]$, posons

$$\mathrm{ord}_\alpha(R) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \text{ n'est pas racine de } R, \\ \text{multiplicité de } \alpha & \text{si } \alpha \text{ est racine de } R. \end{cases}$$

Soit P/Q une fraction rationnelle non nulle. On dit que $\alpha \in \mathbb{C}$ est un *pôle* de P/Q si l'inégalité $\mathrm{ord}_\alpha(Q) > \mathrm{ord}_\alpha(P)$ est satisfaite. L'entier $\mathrm{ord}_\alpha(Q) - \mathrm{ord}_\alpha(P)$ s'appelle alors l'*ordre du pôle*. La fraction rationnelle nulle n'a pas de pôle.

5. Montrer que si 0 n'est pas un pôle de $P/Q \in \mathbb{Q}(x)$, alors il existe une unique série entière à coefficients rationnels $g \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$ telle que $P = Q \cdot g$.
   Montrer que l'application $P/Q \mapsto g$ est compatible avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Q}(x)$ et dans $\mathbb{Q}[\![x]\!]$, et qu'elle envoie la dérivée $(P/Q)' = (P'Q - PQ')/Q^2$ sur la série entière dérivée g'.

On dit que g est le *développement en série entière* (parfois abrégé *développement en série* ou encore *développement*) de la fraction rationnelle P/Q et on écrit $g = P/Q$.

6. Soit $Q \in \mathbb{Q}[x]$ un polynôme à coefficients rationnels de terme constant égal à 1. Montrer qu'il existe un entier $b \geqslant 1$ tel que $Q(bx)$ soit à coefficients entiers.

On dit qu'une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ est *globalement bornée* s'il existe des entiers $A, B \geqslant 1$ tels que

$$Af(Bx) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} (B^n A c_n) x^n$$

soit une série entière à coefficients entiers.

7. Montrer que si $f \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$ est le développement en série entière d'une fraction rationnelle à coefficients rationnels, alors f est globalement bornée.
8. Montrer que la série entière
$$\sum_{m=0}^{+\infty} x^{m^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$
où $c_n = 1$ si n est le carré d'un entier $m \geqslant 0$ et $c_n = 0$ autrement, n'est *pas* le développement en série entière d'une fraction rationnelle.

On définit la *primitive* d'une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ comme la série entière

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}.$$

9. Donner un exemple d'un développement en série entière d'une fraction rationnelle dont la primitive n'est pas le développement d'une fraction rationnelle.
10. *(Question plus difficile)* Soit f le développement en série entière d'une fraction rationnelle $P/Q \in \mathbb{Q}(x)$ dont tous les pôles sont des nombres rationnels. Supposons que la primitive $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ soit globalement bornée. Montrer que $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est alors le développement en série entière d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{Q}(x)$.

C. Séries entières et opérateurs différentiels

Dans ce qui suit, on appellera *opérateur différentiel* (sous-entendu : à coefficients polynomiaux à coefficients rationnels) toute expression de la forme

$$L = R_\mu(x) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\mu + \cdots + R_1(x) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + R_0(x),$$

où $\mu \geqslant 0$ est un entier et $R_0, \ldots, R_\mu \in \mathbb{Q}[X]$ sont des polynômes à coefficients rationnels. Si R_μ n'est pas nul, on dit que L est d'*ordre* μ. Un tel opérateur différentiel agit sur une série entière $f \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$ par la formule

$$(L \cdot f)(x) = R_\mu(x) f^{(\mu)}(x) + \cdots + R_1(x) f'(x) + R_0(x) f(x),$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k^{e} d'une série entière.

11. Montrer l'égalité : pour tous $m \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\mu \cdot (x^m f) \\ &= \left(x^m \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\mu + \sum_{i=1}^{\min(\mu,m)} \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)\mu(\mu-1)\cdots(\mu-i+1)}{i!} x^{m-i} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\mu-i} \right) \cdot f.\end{aligned}$$

On dit qu'une série entière $f \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$ est *solution d'une équation différentielle (d'ordre μ)* s'il existe un opérateur différentiel non nul L (d'ordre μ) comme ci-dessus tel que $L \cdot f = 0$.

12. Montrer que le développement en série entière de toute fraction rationnelle à coefficients rationnels est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
13. Montrer qu'une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$ est solution d'une équation différentielle si et seulement s'il existe un entier $d \geqslant 0$ et des polynômes non tous nuls $S_0, \ldots, S_d \in \mathbb{Z}[x]$ tels que : pour tout $n \geqslant 0$,
$$S_0(n)c_n + \cdots + S_d(n)c_{n+d} = 0.$$
14. Donner une nouvelle preuve, basée sur les questions 12 et 13 ci-dessus, du fait que la série entière $\sum_{m=0}^{+\infty} x^{m^2}$ n'est pas le développement d'une fraction rationnelle.
15. Montrer que la série entière
$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!(3n)!}{(n!)^5} x^n$$
est solution d'une équation différentielle, puis en expliciter une.
16. Montrer que $h(x)$ ci-dessus est à coefficients entiers.
17. Montrer qu'une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} x^n \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$ est solution d'une équation différentielle si et seulement si sa *transformée de Laplace*
$$\hat{f}(x) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$
est solution d'une équation différentielle.

D. Stratégie de la démonstration du théorème 1

Soient $r \geqslant 2$ un entier et $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Q}$ des rationnels distincts. Soient $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{Q}^*$ des rationnels non nuls. Posons $e^{a_i x} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_i^n}{n!} x^n$ et considérons la série entière
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \overset{\text{déf}}{=} b_1 e^{a_1 x} + \cdots + b_r e^{a_r x}.$$

18. Montrer que la transformée de Laplace $\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est le développement en série entière de la fraction rationnelle
$$\sum_{i=1}^{r} \frac{b_i}{1 - a_i x}.$$
En déduire que f n'est pas la série entière nulle.

Considérons la suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ définie en termes des coefficients u_n par la formule
$$v_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{u_i}{i!}$$
et la série entière
$$v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \in \mathbb{Q}[\![x]\!].$$

19. Montrer l'égalité des séries entières
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (v_n - n v_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

20. Montrer que l'opérateur différentiel $L = -x^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + (1-x)$ agit sur $v(x)$ par

$$(L \cdot v)(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{b_i}{1-a_i x}.$$

21. En déduire que si $v(x)$ est le développement en série d'une fraction rationnelle P/Q, alors tout élément de l'ensemble non vide $\{1/a_i \mid a_i \neq 0\}$ est un pôle de P/Q.
22. Montrer que $v(x)$ n'est pas le développement en série d'une fraction rationnelle.

Nous avons ainsi réduit la démonstration du théorème 1 à celle de la proposition suivante, qui fera l'objet des parties E et F du sujet.

Proposition 1. Si $b_1 e^{a_1} + \cdots + b_r e^{a_r} = 0$, alors la série entière $v(x)$ est le développement en série entière d'une fraction rationnelle à coefficients rationnels.

On appelle *polynôme exponentiel* toute série entière à coefficients rationnels de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{s} P_i(x) e^{c_i x},$$

où $c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{Q}$ sont des rationnels et $P_1, \ldots, P_s \in \mathbb{Q}[x]$ sont des polynômes.

23. Montrer que le théorème 1 est équivalent à l'énoncé suivant :

    Soit $f(x) \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$ un polynôme exponentiel tel que $f(1) = \sum_{i=1}^{s} P_i(1) e^{c_i}$ s'annule. Alors $f(x)/(x-1)$ est encore un polynôme exponentiel.

E. L'arithmétique des coefficients v_n

Rappelons l'hypothèse $b_1 e^{a_1} + \cdots + b_r e^{a_r} = 0$ de la proposition 1. Quitte à remplacer le polynôme exponentiel $f(x) = b_1 e^{a_1 x} + \cdots + b_r e^{a_r x}$ par un multiple entier, on peut supposer sans perte de généralité que les coefficients $u_0, \ldots, u_{r-1}$ sont des entiers.
On fait cette hypothèse dorénavant.
Définissons des nombres rationnels $s_1, \ldots, s_r$ par la formule

$$(T-a_1)\cdots(T-a_r) = T^r - s_1 T^{r-1} - \cdots - s_{r-1} T - s_r.$$

24. Montrer l'égalité : pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+r} = s_1 u_{n+r-1} + \cdots + s_r u_n.$$

Soit D un dénominateur commun des nombres rationnels $a_1, \ldots, a_r$ et soit

$$A = \max(1, |a_1|, \ldots, |a_n|).$$

25. Montrer que $D^n u_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \geqslant 0$.
26. Montrer qu'il existe un nombre réel $c_1 > 0$ tel que : pour tout $n \geqslant 0$,

$$|v_n| \leqslant c_1 \frac{A^{n+1}}{n+1}.$$

Pour tous entiers n, $k \geqslant 0$, définissons le nombre rationnel $v_n(k)$ comme le coefficient en degré n de la série entière

$$(1 - s_1 x - \cdots - s_r x^r)^k v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(k) x^n.$$

27. Montrer que $v(x)$ est le développement en série entière d'une fraction rationnelle si et seulement s'il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(k)x^n$ soit un polynôme.
28. Observer l'égalité : pour tous $n \geqslant r$ et $k \geqslant 0$,

$$v_n(k+1) = v_n(k) - s_1 v_{n-1}(k) - \cdots - s_r v_{n-r}(k).$$

Posons $C = 1 + |s_1| + \cdots + |s_r|$.

29. Montrer que $D^n v_n(k) \in \mathbb{Z}$ et qu'il existe un nombre réel $c_2 > 0$ tel que

$$|v_n(k)| \leqslant c_2 A^n C^k \text{ pour tous } n \geqslant kr.$$

30. Soit $\ell \geqslant 0$ un entier. Montrer qu'il existe un polynôme $P_\ell \in \mathbb{Q}[x]$ de degré $< r(\ell+1)$ satisfaisant à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-\ell+1)u_{n-\ell}x^n = \frac{P_\ell(x)}{(1 - s_1 x - \cdots - s_r x^r)^{\ell+1}}.$$

31. Définissons deux suites $(w_{n,k})_{n,k\geqslant 0}$ et $(w_n(k))_{n,k\geqslant 0}$ par les formules

$$w_{n,k} = n! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{u_i}{i!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(k)x^n = (1 - s_1 x - \cdots - s_r x^r)^k \sum_{n=0}^{+\infty} w_{n,k}x^n.$$

Montrer l'égalité $w_n(k) = v_n(k)$ pour tous n et k tels que $n \geqslant kr$.

32. En déduire que $k!$ divise $D^n v_n(k)$ pour tous n et k tels que $n \geqslant kr$.
33. Montrer l'égalité

$$v_n(k) = \sum_{i=1}^{r} b_i e^{a_i} \int_{a_i}^{+\infty} e^{-t} t^{n-kr} (t-a_1)^k \cdots (t-a_r)^k \mathrm{d}t.$$

F. Démonstration de la proposition 1

Dans cette partie, nous démontrons la proposition 1, concluant ainsi la démonstration du théorème 1. Il nous suffira de prouver qu'il existe un entier $k_0 \geqslant 0$ tel que la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(k_0)x^n$$

soit un polynôme (d'après la question 27).

34. Montrer que si $v_n(k)$ n'est pas nul et $n \geqslant kr$, alors

$$k! \leqslant |D^n v_n(k)| \leqslant c_2 (AD)^n C^k.$$

35. En déduire qu'il existe un entier k_0 tel que

$$v_n(k) = 0 \text{ pour tous } k \geqslant k_0 \text{ et } kr \leqslant n \leqslant 10kr.$$

36. Conclure que $v_n(k_0) = 0$ pour tout $n \geqslant k_0 r$.

Le théorème est démontré !

G. Fonctions E

Dans cette dernière partie, on présente une généralisation à une classe plus large de séries entières à coefficients rationnels de l'énoncé de la question 23, à savoir le fait que le quotient par $x-1$ d'un polynôme exponentiel s'annulant en 1 est encore un polynôme exponentiel.
Une fonction E (sous-entendu : à coefficients rationnels) est une série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \in \mathbb{Q}[\![x]\!]$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) f est solution d'une équation différentielle ;

(b) il existe un nombre réel $C > 0$ tel que

$$|b_n| \leqslant C^n \quad \text{et} \quad \text{dén}(b_0, \ldots, b_n) \leqslant C^n \text{ pour tout } n \geqslant 1,$$

où $\text{dén}(b_0, \ldots, b_n)$ désigne le plus petit entier $d \geqslant 1$ tel que $db_0, \ldots, db_n$ soient des entiers (« le dénominateur commun de $b_0, \ldots, b_n$ »).

Les polynômes à coefficients rationnels sont des exemples « triviaux » de fonctions E.
Rappelons que $\hat{f}(x)$ désigne la transformée de Laplace introduite dans la question 17.

37. Montrer que si f est une fonction E, alors la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{b_n}{n!}\alpha^n$ converge pour tout nombre réel α. On note $f(\alpha)$ sa valeur.
38. Soit f une fonction E qui n'est pas un polynôme. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n\alpha^n$ diverge pour tout nombre réel α avec $|\alpha| > R$.
39. Quelles sont les fonctions E telles que $\hat{f}$ soit aussi une fonction E ?
40. Démontrer que les fonctions E sont stables par addition et multiplication.
41. Soit f un polynôme exponentiel. Montrer que f est une fonction E telle que $\hat{f}$ soit le développement en série entière d'une fraction rationnelle à pôles rationnels.
42. Montrer que si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est le développement en série entière d'une fraction rationnelle à pôles rationnels, alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{b_n}{n!}x^n$ est une fonction E.
43. Montrer que la fonction de Bessel

$$J_0(x) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

est une fonction E telle que $\hat{J}_0(x)$ satisfasse à l'équation $(1+x^2)\hat{J}_0(x)^2 = 1$. En déduire que $J_0(x)$ n'est pas un polynôme exponentiel.
44. Montrer que les zéros réels de la fonction de Bessel $J_0(x)$ sont simples, c'est-à-dire que si $J_0(\alpha) = 0$, alors $J_0'(\alpha) \neq 0$.
45. Soit $f(x)$ une fonction E telle que $f(1) = 0$. Montrer que la série entière $f(x)/(x-1)$ est encore une fonction E.

Ce dernier résultat est l'un des ingrédients sur lesquels repose la méthode mise en place par Y. André à la fin des années 90 pour démontrer le *théorème de Siegel-Shidlovskii*. Il s'agit d'un énoncé de transcendance pour les valeurs des fonctions E en des nombres rationnels, qui généralise le théorème d'Hermite-Lindemann-Weierstrass et implique, par exemple, que le nombre $J_0(\alpha)$ est transcendant pour tout rationnel non nul α.

Fin du sujet